F2557

1
TOMUL 38
ian. — febr.
1979

1979 AUG 28

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*

Membri :

Acad. I. ANTON,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. CR. MATEESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. RADU PRIȘCU,
Dr. doc. V. VISARION,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacție.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70 116, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O.Box 136—137, telex 11226, București, România. În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, 70 701, str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
71 021, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, București

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38, nr. 1 — Ianuarie—februarie 1979

SUMAR

STUDII

ARISTIDE HALANAY, MIHAIL POPESCU, Analiza stabilităţii hidraulice generale de funcţionare la regimuri tranzitorii a uzinelor hidroelectrice prevăzute cu unul sau două castele de echilibru, prin metoda funcţiei Liapunov 3

I. SETEANU, R. POPA, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. II. Efectul formei secţiunii transversale a curgerii 21

T. OROVEANU, AL. D. STAN, Mişcarea unui fluid printr-un tub cu pereţi permeabili 29

FLORIN IONESCU, Elemente de analiză matriceală a dinamicii conexiunilor de motoare hidraulice rotative 41

V. CÎRTOAJE, Caracterizarea în domeniul frecvenţei a sistemelor liniare continue, invariante în timp, cu funcţii indiciale de tip exponenţial-polinomial . . . 53

T. SIRETEANU, C. TEODOSIU, O. GÜNDISCH, M. RĂUŢĂ, S. PĂRĂIAN, Studiul caracteristicilor de lucru ale amortizoarelor hidraulice 75

F. DINCĂ, O. GÜNDISCH, V. NICOLAE, T. SIRETEANU, I. ROŞU, Amortizoare secvenţiale pentru autovehicule 89

G. KÜMBETLIAN, Influenţa grosimii asupra cîmpurilor mărimilor fizice ale barelor şi plăcilor groase 99

MIRCEA V. SOARE, O propunere de codificare a teoriilor din mecanica construcţiilor 107

C. ŢURCANU, AL. NICA, Modele analitico-cinetice pentru evaluarea emisiilor poluante de la turbomotoarele de aviaţie; tehnici de limitare 125

GHEORGHE ZĂTREANU, CONSTANTIN SILVESTRU, Echilibrajul forţelor de inerţie la motoarele în H 141

DUMITRU RAŞEEV, EMIL TOCACI, Aspecte privind studiul mişcării sapelor de foraj 155

RECENZII 171

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁR
25 57
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratlelt.
752(1980

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM

STUDII

ANALIZA STABILITĂȚII HIDRAULICE GENERALE DE FUNCȚIONARE LA REGIMURI TRANZITORII A UZINELOR HIDROELECTRICE PREVĂZUTE CU UNUL SAU DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU, PRIN METODA FUNCȚIEI LIAPUNOV

de ARISTIDE HALANAY
Universitatea București
MIHAIL POPESCU
Institutul de cercetări hidrotehnice

În articol se expune o metodă de studiu a stabilității hidraulice generale a castelelor de echilibru, bazată pe o analiză a stabilității fundamentată matematic, care permite alegerea preliminară a parametrilor de proiectare ai castelelor de la uzinele hidroelectrice prevăzute cu unul sau două castele de echilibru dispuse în sistem.
În anumite cazuri, metoda permite și o descriere analitică directă a condițiilor de stabilitate.
Se dau două exemple concrete de aplicare a metodei.

Studiul stabilității hidraulice de funcționare a uzinelor hidroelectrice cu derivații la regimuri tranzitorii se poate efectua prin diferite metode : analitice, grafice, analogice și numerice.

Metodele analitice abordează problema stabilității hidraulice a castelelor de echilibru plecînd de la ecuațiile diferențiale ale mișcării apei în sistemul galerie-castel, și tratează separat cazul micilor oscilații [3], [5], [9] și cazul marilor oscilații [5], pe baza unor ipoteze simplificatoare.

Sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării, corespunzător unei valori date a puterii, admite o soluție constantă care descrie un regim staționar de funcționare a uzinei, iar problema constă în studiul stabilității acestuia.

Problema stabilității mișcării comportă în general două aspecte :

a) *studiul stabilității sistemului de ecuații liniarizat*, care asigură comportarea bună a sistemului fizic pentru abateri inițiale mici, ceea ce ar corespunde în funcționarea uzinelor hidroelectrice la manevre care să nu modifice mult puterea de la o valoare la alta (micile oscilații);

b) *stabilirea domeniului de atracție din jurul punctului staționar* și analizarea punctelor asociate manevrelor uzuale, pentru a vedea dacă sînt conținute în acest domeniu (marile oscilații).

În articolul de față se prezintă o metodă de analiză a stabilității hidraulice generale a castelelor de echilibru prin folosirea funcției Liapunov, evidențiindu-se posibilitățile ei de aplicare practică.

Metoda funcției Liapunov se folosește în probleme analoge în lucrările [1] și [2].

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 1, 1979, P. 3—19

1. EXPUNEREA METODEI

1.1. CAZUL UNUI CASTEL DE ECHILIBRU

Se consideră o uzină hidroelectrică prevăzută cu castel de echilibru de secțiune constantă — cu diafragmă la bază ($R \neq 0$), funcționînd pe putere constantă într-o rețea separată (fig. 1). Ecuațiile diferențiale ale mișcării oscilatorii a apei din sistem sînt următoarele :

$$\frac{L}{g}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} + Z + P'W^2 + R'\left|\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$F\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \frac{N_2}{\eta g(H+Z)} - fW = 0\,; \quad \eta g(H+Z)Q_T = N_2, \tag{1}$$

cu notațiile : L — lungimea galeriei de aducțiune, f — aria secțiunii galeriei, F — aria secțiunii orizontale a castelului, Z — nivelul apei din castel față de nivelul din lac, W — viteza apei în galerie, H — căderea, Q_T — debitul centralei, N_2 — puterea centralei după manevră, P' — coeficient de pierdere de sarcină longitudinală pe galerie, R' — coeficient de

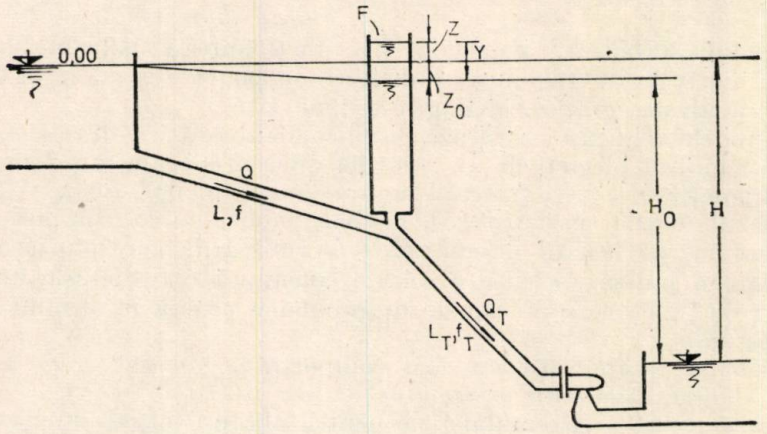


Fig. 1. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu un castel de echilibru.

pierdere de sarcină locală în diafragma (strangularea) castelului, η — randamentul turbinelor, t — timpul, g — accelerația gravitației (s-a considerat $W|W| = W^2$).

Caracteristicile punctului staționar (corespunzător situației de regim) Z_0, W_0 se calculează prin rezolvarea sistemului algebric :

$$\frac{N_2}{\eta g(H+Z)} = fW\,; \quad Z = -P'W^2. \tag{2}$$

Acest sistem conduce la o ecuație de gradul al treilea în Z; se reține soluția Z_0 a ecuației situată în intervalul $\left(-\frac{H}{3}, 0\right)$. Eliminînd pe W între ecuațiile sistemului (1) și făcînd schimbarea de variabilă

$$Y = Z - Z_0, \tag{3}$$

rezultă

$$F\frac{d^2Y}{dt^2} - \frac{N_2\frac{dY}{dt}}{\eta g(H_0+Y)^2} + \frac{fg}{L}\left[Y + Z_0 + \frac{P'}{f^2}\left(F\frac{dY}{dt} + \frac{N_2}{\eta g(H_0+Y)}\right)^2 + \right. \tag{4}$$

$$\left. + R'\left|\frac{dY}{dt}\right|\frac{dY}{dt}\right] = 0,$$

unde s-a notat cu $H_0 = H + Z_0$ — căderea netă.
Se construiește funcția Liapunov :

$$v(Y, V) = \frac{1}{2}FV^2 + \frac{gf}{2L}Y^2\left(1 - \frac{2P'N_2^2}{H_0^2f^2g^2\eta^2(H_0+Y)}\right). \tag{5}$$

Derivata ei în virtutea sistemului este

$$w(Y, V) = -V^2\left[\frac{fgR'}{L}|V| + \frac{gP'F^2}{fL}V - \frac{N_2}{\eta g(H_0+Y)^2} + \right. \tag{6}$$

$$\left. + \frac{2P'FN_2}{LF\eta(H_0+Y)}\right],$$

unde

$$V = \frac{dY}{dt}.$$

Conform teoremei lui Liapunov, condiția de stabilitate la marile oscilații este ca funcția $v(Y, V) > 0$ pentru $Y^2 + V^2 \neq 0$, iar derivata ei în virtutea sistemului să fie negativă.

Prima condiție conduce la inegalitățile cunoscute (din cazul micilor oscilații) :

$$F > F_{Th} = \frac{1}{2g}\frac{fL}{P'H_0} \quad \text{și} \quad -Z_0 < \frac{H}{3}. \tag{7}$$

Pentru a analiza a doua condiție se introduce coeficientul :

$$\alpha = \frac{R}{P} = -\frac{R'\left(\frac{dZ}{dt}\right)^2}{P'W^2} \qquad \text{pentru } Q_T = 0$$

sau

$$\alpha = \frac{f^2 R'}{F^2 P'}. \tag{8}$$

Dacă $\alpha > 1$, condiția asupra derivatei în virtutea sistemului, se reduce la a cere ca

$$\frac{2P'F}{Lf} > \frac{1}{g(H_0 + Y)}, \quad \text{deci} \quad H_0 + Y > \frac{Lf}{2P'Fg} = \frac{F_{Th} \cdot H_0}{F}$$

sau

$$\frac{F}{F_{Th}} > \frac{H_0}{H_0 + Y}. \tag{9}$$

În acest caz situația este analogă, din punctul de vedere al funcției Liapunov considerată, cu cea din cazul sistemului liniarizat ; inegalitatea de mai sus furnizează față de condiția Thoma informații asupra nivelurilor extreme admisibile.

Dacă $\alpha < 1$*), caz întîlnit curent în practică, condiția asupra derivatei în virtutea sistemului conduce la inegalitatea :

$$\frac{gP'F^2}{fL}(\alpha |V| + V) - \frac{N_2}{\eta g(H_0 + Y)^2} + \frac{2P'FN_2}{\eta Lf(H_0 + Y)} > 0, \tag{10}$$

care, în situația cea mai defavorabilă, devine

$$\frac{gP'F^2}{fL}(1 - \alpha) V > \frac{N_2}{\eta g(H_0 + Y)^2} - \frac{2P'FN_2}{\eta Lf(H_0 + Y)} \tag{11}$$

sau

$$V > \frac{fLN_2}{\eta gP'F^2(1 - \alpha)(H_0 + Y)} \left[\frac{1}{g(H_0 + Y)} - \frac{2P'F}{Lf}\right]. \tag{12}$$

Conform teoremei lui LaSalle, pentru a afla domeniul de atracție din jurul punctului staționar, se caută cel mai mare nivel al funcției $v(Y, V) = C$, situat în zona în care derivata în virtutea sistemului este negativă [6].

Pentru aceasta, se construiește curba (Φ) :

$$V = \frac{fLH_0Q_0}{P'F^2(1 - \alpha)(H_0 + Y)} \left[\frac{1}{g(H_0 + Y)} - \frac{2P'F}{Lf}\right] \tag{13}$$

*) În cazul $\alpha = 0$, care corespunde la $R = 0$ (castel fără diafragmă), este cunoscută condiția de stabilitate pentru marile oscilații a lui Ch. Jaeger [5].

și familia de curbe (Ψ_C) :

$$FV^2 + \frac{fg}{L}\left(1 + \frac{2Z_0}{H_0 + Y}\right) Y^2 = C \tag{14}$$

și se reține *domeniul din interiorul curbei* (Ψ_C) — corespunzătoare celei mai mari valori a lui C, care se află în zona de deasupra curbei (Φ). Cunoscînd *domeniul de atracție*, se verifică dacă punctele (Y, V) corespunzătoare celor mai defavorabile manevre din funcționarea uzinei se găsesc în interiorul acestui domeniu. În tot cazul, se vor avea în vedere punctele corespunzătoare manevrei de pornire totală a uzinei $(N_1 = 0\,;\, N_2 = N_{max})$:

$$\left(-Z_0, -\frac{N_{max}}{\eta g HF}\right);\ (Z_{min} - Z_0, 0);\ (Z_{max} - Z_0, 0), \tag{15}$$

care sînt condiții inițiale pentru ecuația (4).
Analiza se face pentru mai multe valori ale ariei F a secțiunii castelului. Curbele (Φ) și (Ψ_C) se pot trasa cu ajutorul calculatorului.

1.2. CAZUL A DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU DISPUSE ÎN SISTEM

Se consideră cazul unei uzine hidroelectrice prevăzute cu un sistem de două castele de echilibru de secțiune constantă — cu diafragme la bază $(R_1, R_2 \neq 0)$, dispuse de o parte și de alta a turbinelor (fig. 2*a*), sau situate pe galeria de aducțiune (fig. 2*b*). Se admite funcționarea uzinei pe putere constantă, într-o rețea energetică separată.

Vom analiza mai întîi schema hidrotehnică din figura 2*a*.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării oscilatorii a apei din sistem sînt următoarele :

$$\begin{aligned}
&\frac{L_1}{g}\frac{dW_1}{dt} + Z_1 + P_1' W_1^2 + R_1' \left|\frac{dZ_1}{dt}\right| \frac{dZ_1}{dt} = 0,\\
&F_1 \frac{dZ_1}{dt} + \frac{N_2}{\eta g(H + Z_1 - Z_2)} - f_1 W_1 = 0,\\
&\frac{L_2}{g}\frac{dW_2}{dt} - Z_2 + P_2' W_2^2 - R_2' \left|\frac{dZ_2}{dt}\right| \frac{dZ_2}{dt} = 0\\
&F_2 \frac{dZ_2}{dt} - \frac{N_2}{\eta g(H + Z_1 - Z_2)} + f_2 W_2 = 0\,;\quad \eta g(H + Z_1 - Z_2)\, Q_T = N_2.
\end{aligned} \tag{16}$$

Se vor parcurge etapele de calcul și de analiză a stabilității adoptate în cazul unui castel de echilibru.

Caracteristicile punctului staționar Z_1^0, W_1^0; Z_2^0, W_2^0 se calculează prin rezolvarea sistemului algebric :

$$\frac{N_2}{\eta g(H+Z_1-Z_2)} = f_1 W_1 = f_2 W_2 ; \quad Z_1 = -P_1' W_1^2 ; \quad Z_2 = P_2' W_2^2. \tag{17}$$

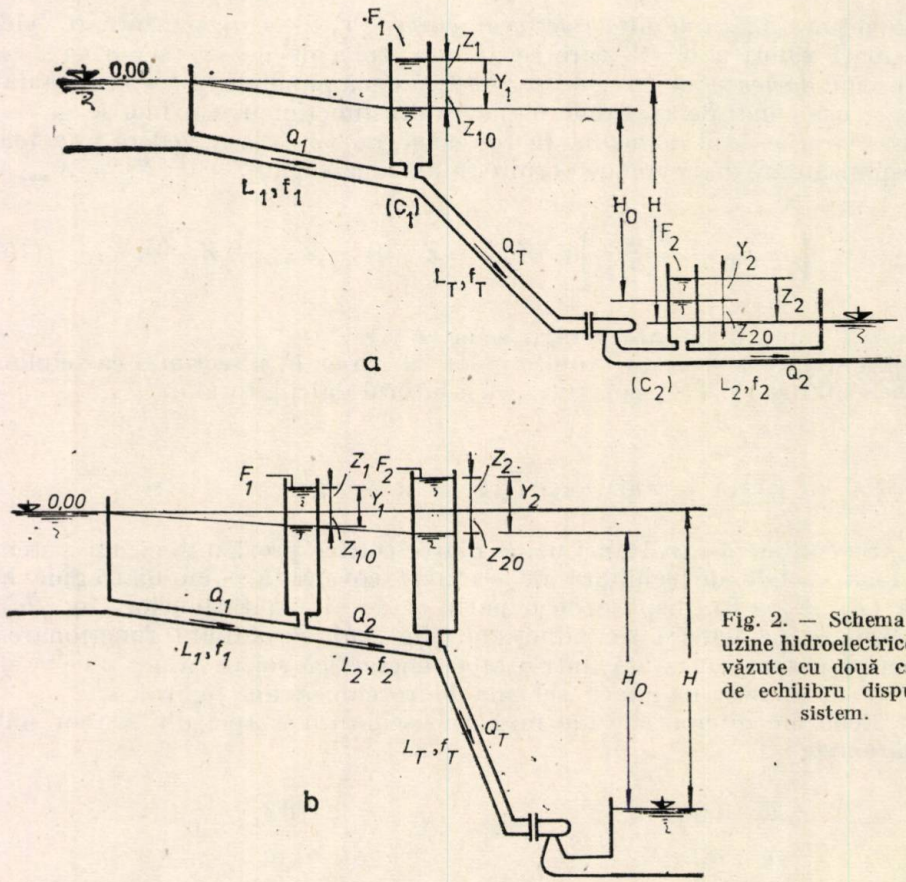


Fig. 2. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu două castele de echilibru dispuse în sistem.

Se face înlocuirea

$$Z_2 = -\frac{P_2' f_1^2}{P_1' f_2^2} Z_1 \tag{18}$$

în prima ecuație și rezultă

$$\frac{N_2^2}{\eta^2 g^2 \left(H + Z_1 + \dfrac{P_2' f_1^2}{P_1' f_2^2} Z_1\right)^2} = f_1 W_1^2 = -\frac{f_1^2}{P_1'} Z_1 \tag{19}$$

sau

$$\left(H + \frac{P_1' f_2^2 + P_2' f_1^2}{P_1' f_2^2} Z_1\right)^2 Z_1 + \frac{P_1' N_2^2}{\eta^2 g^2 f_1^2} = 0. \tag{20}$$

Din ecuația (20) se reține soluția Z_1^0 situată în intervalul $\left(-\frac{H}{3}\cdot\right.$ $\left.\cdot\frac{P_1'f_2^2}{P_1'f_2^2+P_2'f_1^2},\ 0\right)$, la care corespunde pentru Z_2^0 o soluție cuprinsă în intervalul $\left(0,\ \frac{H}{3}\ \frac{P_2'f_1^2}{P_1'f_2^2+P_2'f_1^2}\right)$.

Făcînd schimbarea de variabilă:

$$Y_1 = Z_1 - Z_1^0 \quad \text{și} \quad Y_2 = Z_2 - Z_2^0 \tag{21}$$

și eliminînd succesiv pe W_1 și W_2, rezultă

$$F_1\frac{d^2Y_1}{dt^2}+\frac{N_2}{\eta g(H_0+Y_1-Y_2)^2}\left(\frac{dY_2}{dt}-\frac{dY_1}{dt}\right)+$$

$$+\frac{f_1 g}{L_1}\left\{Z_1^0+Y_1+\frac{P_1'}{f_1^2}\left[F_1\frac{dY_1}{dt}+\frac{N_2}{\eta g(H+Y_1-Y_2)}\right]+R_1'\left|\frac{dY_1}{dt}\right|\frac{dY_1}{dt}\right\}=0,$$

(22)

$$F_2\frac{d^2Y_2}{dt^2}+\frac{N_2}{\eta g(H_0+Y_1-Y_2)^2}\left(\frac{dY_1}{dt}-\frac{dY_2}{dt}\right)+$$

$$+\frac{f_2 g}{L_2}\left\{Z_2^0+Y_2-\frac{P_2'}{f_2^2}\left[F_2\frac{dY_2}{dt}-\frac{N_2}{\eta g(H+Y_1-Y_2)}\right]^2+R_2'\left|\frac{dY_2}{dt}\right|\frac{dY_2}{dt}\right\}=0,$$

cu notația $H_0 = H + Z_1 - Z_2$ — căderea netă.

În calculele ce urmează, apare convenabilă o nouă schimbare de variabilă:

$$Y_{12} = Y_1 - Y_2 \quad \text{și} \quad Z_{12} = Y_2 + \frac{\frac{f_1^2}{P_1'}}{\frac{f_1^2}{P_1'}+\frac{f_2^2}{P_2'}}Y_{12}, \tag{23}$$

din care rezultă

$$\frac{dY_{12}}{dt} = V_1 - V_2 \quad \text{și} \quad \frac{dZ_{12}}{dt} = \frac{1}{\frac{f_1^2}{P_1'}+\frac{f_2^2}{P_2'}}\left(\frac{f_1^2}{P_1'}V_1+\frac{f_2^2}{P_2'}V_2\right), \tag{24}$$

unde

$$V_1 = \frac{dY_1}{dt} \quad \text{și} \quad V_2 = \frac{dY_2}{dt}.$$

Astfel, sistemul de ecuații (16) capătă o nouă formă :

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{N_2}{\eta g F_1 (H_0 + Y_{12})^2}(V_1 - V_2) -$$

$$- \frac{f_1 g}{L_1 F_1}\left\{ Z_1^0 + \frac{\frac{f_2^2}{P_2'}}{\frac{f_1^2}{P_1'} + \frac{f_2^2}{P_2'}} Y_{12} + Z_{12} + \frac{P_1'}{f_1^2}\left[F_1 V_1 + \frac{N_2}{\eta g (H_0 + Y_{12})} \right]^2 + R_1' V_1 |V_1| \right\},$$

(25)

$$\frac{dV_2}{dt} = - \frac{N_2}{\eta g F_2 (H_0 + Y_{12})^2}(V_1 - V_2) -$$

$$- \frac{f_2 g}{L_2 F_2}\left\{ Z_2^0 - \frac{\frac{f_1^2}{P_1'}}{\frac{f_1^2}{P_1'} + \frac{f_2^2}{P_2'}} Y_{12} + Z_{12} - \frac{P_2'}{f_2^2}\left[F_2 V_2 - \frac{N_2}{\eta g (H_0 + Y_{12})} \right]^2 + R_2' |V_2| V_2 \right\}.$$

Se introduc coeficienții :

$$\alpha_1 = \frac{f_1^2 R_1'}{F_1^2 P_1'} \quad \text{și} \quad \alpha_2 = \frac{f_2^2 R_2'}{F_2^2 P_2'} \tag{26}$$

și se alege următoarea funcție Liapunov :

$$2v(Y_{12}, Z_{12}, V_1, V_2) = \frac{f_1 L_1 F_1}{P_1'} V_1^2 + \frac{f_2 L_2 F_2}{P_2'} V_2^2 +$$

$$+ g \frac{\frac{f_1^2}{P_1'} \frac{f_2^2}{P_2'}}{\frac{f_1^2}{P_1'} + \frac{f_2^2}{P_2'}} Y_{12}^2 + g\left(\frac{f_1^2}{P_1'} + \frac{f_2^2}{P_2'} \right) Z_{12}^2 - \frac{2N_2^2}{\eta^2 g} \int_0^{Y_{12}} \left[\frac{1}{H_0^2} - \frac{1}{(H_0 + Y)^2} \right] dY, \tag{27}$$

care, după efectuarea calculelor, devine

$$v(Y_{12}, Z_{12}, V_1, V_2) = \frac{f_1 L_1 F_1}{2P_1'} V_1^2 + \frac{f_2 L_2 F_2}{2P_2'} V_2^2 +$$

$$+ g\left[\frac{f_1^2 f_2^2}{2(P_2' f_1^2 + P_1' f_2^2)} - \frac{N_2^2}{\eta^2 g^2 H_0^2 (H_0 + Y_{12})} \right] Y_{12}^2 + \frac{1}{2} g \frac{P_2' f_1^2 + P_1' f_2^2}{P_1' P_2'} Z_{12}^2. \tag{28}$$

Derivata ei în virtutea sistemului este $-w(Y_{12}, Z_{12}, V_1, V_2)$, unde

$$w(Y_{12}, Z_{12}, V_1, V_2) = \left[\frac{2F_1N_2}{\eta(H_0+Y_{12})} - \frac{f_1L_1N_2}{\eta g P_1'(H_0+Y_{12})^2} + \right.$$

$$\left. + gF_1^2(\alpha_1 \mid V_1 \mid + V_1)\right] V_1^2 + \frac{N_2}{\eta g(H_0+Y_{12})^2}\left(\frac{f_1L_1}{P_1'} + \frac{f_2L_2}{P_2'}\right) V_1V_2 + \quad (29)$$

$$+ \left[\frac{2F_2N_2}{\eta(H_0+Y_{12})} - \frac{f_2L_2N_2}{\eta g P_2'(H_0+Y_{12})^2} + gF_2^2(\alpha_2 \mid V_2 \mid + V_2)\right] V_2^2.$$

În cazul micilor oscilații (considerarea sistemului de ecuații liniarizat), funcția Liapunov ia forma :

$$v_L(Y_{12}, Z_{12}, V_1, V_2) = \frac{f_1L_1F_1}{2P_1'} V_1^2 + \frac{f_2L_2}{2P_2'} V_2^2 +$$

$$+ g\left[\frac{f_1^2f_2^2}{2(P_2'f_1^2 + P_1'f_2^2)} - \frac{N_2^2}{\eta^2g^2H_0^3}\right] + \frac{1}{2} g \frac{P_2'f_1^2 + P_1'f_2^2}{P_1'P_2'} Z_{12}^2, \quad (30)$$

iar derivata ei în virtutea sistemului este $-w_L(V_1, V_2)$, unde

$$w_L(V_1, V_2) = \left(\frac{2F_1N_2}{\eta H_0} - \frac{f_1L_1N_2}{\eta g P_1'H_0^2}\right) V_1^2 +$$

$$+ \frac{N_2}{\eta g H_0^2}\left(\frac{f_1L_1}{P_1'} + \frac{f_2L_2}{P_2'}\right) V_1V_2 + \left(\frac{2F_2N_2}{\eta H_0} - \frac{f_2L_2N_2}{\eta g P_2'H_0^2}\right) V_2^2. \quad (31)$$

De aici se deduc următoarele condiții de stabilitate a micilor oscilații :

$$F_1 > \frac{f_1L_1}{2gP_1'H_0}; \qquad F_2 > \frac{f_2L_2}{2gP_2'H_0},$$

$$\left(2F_1 - \frac{f_1L_1}{gP_1'H_0}\right)\left(2F_2 - \frac{f_2L_2}{gP_2'H_0}\right) - \frac{1}{4g^2H_0^2}\left(\frac{f_1L_1}{P_1'} + \frac{f_2L_2}{P_2'}\right)^2 > 0. \quad (32)$$

Din ultima condiție rezultă

$$H_0 > \frac{1}{4g}\left[\frac{f_1L_1}{P_1'F_1} + \frac{f_2L_2}{P_2'F_2} + \sqrt{\left(\frac{f_1L_1}{P_1'F_1} + \frac{f_2L_2}{P_2'F_2}\right)^2 + \frac{1}{F_1F_2}\left(\frac{f_1L_1}{P_1'} - \frac{f_2L_2}{P_2'}\right)^2}\right] \quad (33)$$

sau

$$H_0 > \frac{1}{4g}\left[\frac{f_1 L_1}{P_1' F_1} + \frac{f_2 L_2}{P_2' F_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}\right)\left(\frac{L_1^2 f_1^2}{P_2'^2 F_1} + \frac{L_2^2 f_2^2}{P_2'^2 F_2}\right)}\right]. \tag{34}$$

Această inegalitate constituie o condiție suficientă pentru stabilitatea micilor oscilații și poate înlocui condițiile mult mai complicate deduse cu ajutorul criteriului Routh-Hurwitz [7].

Dacă se introduc notațiile :

$$F_{10} = \frac{L_1 f_1}{2g P_1' H_0} \quad \text{și} \quad F_{20} = \frac{L_2 f_2}{2g P_2' H_0}, \tag{35}$$

care exprimă secțiunile limită ale lui Thoma pentru sistemele galerie — castel amonte și aval de turbine — considerate separat, atunci condiția (34) devine :

$$\left[\left(\frac{F_{10}}{F_1}+\frac{F_{20}}{F_2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}\right)\left(\frac{F_{10}^2}{F_1}+\frac{F_{20}^2}{F_2}\right)}\right] < 2. \tag{36}$$

În cazul în care valorile F_{10} și F_{20} diferă puțin între ele, atunci condiția suficientă de stabilitate a sistemului la mici oscilații devine și mai simplă :

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2} < \frac{1}{\max(F_{10}, F_{20})}. \tag{37}$$

Această condiție este asemănătoare ca formă cu condiția lui Escande [7] :

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2} < \frac{1}{F_{10}}+\frac{1}{F_{20}}, \tag{38}$$

care este necesară, dar nu și suficientă, pentru stabilitatea la mici oscilații a sistemului.

Se pot obține condiții simplificate și separat pentru parametrii F_1 și F_2.

Într-adevăr, ținînd seama de inegalitatea evidentă $ab \geqslant -\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, din relația (31) se obține următoarea inegalitate :

$$w_L(V_1, V_2) > \left[\frac{2F_1 N_2}{\eta H_0} - \frac{f_1 L_1 N_2}{\eta g P_1' H_0^2} - \frac{N_2}{2\eta g H_0^2}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'}+\frac{f_2 L_2}{P_2'}\right)\right] V_1^2 + \\ + \left[\frac{2F_2 N_2}{\eta H_0} - \frac{f_2 L_2 N_2}{\eta g P_2' H_0^2} - \frac{N_2}{2\eta g H_0^2}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'}+\frac{f_2 L_2}{P_2'}\right)\right] V_2^2, \tag{39}$$

de unde rezultă, separat pentru F_1 și F_2, condițiile simple:

$$F_1 > \frac{f_1 L_1}{2P_1' g H_0} + \frac{1}{4gH_0}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'} + \frac{f_2 L_2}{P_2'}\right),$$

$$F_2 > \frac{f_2 L_2}{2P_2' g H_0} + \frac{1}{4gH_0}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'} + \frac{f_2 L_2}{P_2'}\right) \tag{40}$$

sau

$$F_1 > F_{10} + \frac{1}{2}(F_{10} + F_{20}),$$

$$F_2 > F_{20} + \frac{1}{2}(F_{10} + F_{20}). \tag{41}$$

Pentru analiza stabilității hidraulice generale a sistemului (cazul marilor oscilații) se tratează cazul $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$, întîlnit mai des în practică.
În acest caz

$$w(Y_{12}, Z_{12}, V_1, V_2) = \left[\frac{2F_1 N_2}{\eta(H_0 + Y_{12})} - \frac{f_1 L_1 N_2}{\eta g P_1'(H_0 + Y_{12})} + (1-\alpha_1) g F_1^2 V_1\right] V_1^2 -$$

$$- \frac{N_2}{2\eta g(H_0 + Y_{12})^2}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'} + \frac{f_2 L_2}{P_2'}\right)(V_1^2 + V_2^2) + \tag{42}$$

$$+ \left[\frac{2F_2 N_2}{\eta(H_0 + Y_{12})} - \frac{f_2 L_2 N_2}{\eta g P_2'(H_0 + Y_{12})^2} + (1-\alpha_2) g F_2^2 V_2\right] V_2^2,$$

de unde rezultă condițiile:

$$2F_1(H_0 + Y_{12}) > \frac{f_1 L_1}{P_1' g} + \frac{1}{2g}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'} + \frac{f_2 L_2}{P_2'}\right),$$

$$2F_2(H_0 + Y_{12}) > \frac{f_2 L_2}{P_2' g} + \frac{1}{2g}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'} + \frac{f_2 L_2}{P_2'}\right),$$

$$(1 - \alpha_1) g F_1^2 V_1 + \frac{2F_1 N_2}{\eta(H_0 + Y_{12})}\Big] - \frac{N_2}{2\eta g(H_0 + Y_{12})^2}\left(\frac{3f_1 L_1}{P_1'} + \frac{f_2 L_2}{P_2'}\right) > 0, \tag{43}$$

$$(1 - \alpha_2) g F_2^2 V_2 + \frac{2F_2 N_2}{\eta(H_0 + Y_{12})} - \frac{N_2}{2\eta g(H_0 + Y_{12})^2}\left(\frac{f_1 L_1}{P_1'} + \frac{3f_2 L_2}{P_2'}\right) > 0$$

sau

$$V_1 > \frac{N_2}{\eta g(1-\alpha_1)(H_0+Y_{12})F_1^2}\left[\frac{1}{2g(H_0+Y_{12})}\left(\frac{3f_1L_1}{P_1'}+\frac{f_2L_2}{P_2'}\right)-2F_1\right],$$

$$V_2 > \frac{N_2}{\eta g(1-\alpha_2)(H_0+Y_{12})F_2^2}\left[\frac{1}{2g(H_0+Y_{12})}\left(\frac{f_1L_1}{P_1'}+\frac{3f_2L_2}{P_2'}\right)-2F_2\right], \quad (44)$$

relații care permit construcția curbelor (Φ_1) și (Φ_2). Pentru analiza domeniului de atracție se utilizează următoarele funcții, obținute din relația (28) :

$$v_1(Y_{12}, V_1) = \frac{f_1L_1F_1}{2P_1'}V_1^2 + g\left[\frac{f_1^2f_2^2}{2(P_2'f_1^2+P_1'f_2^2)}-\frac{N_2^2}{\eta^2g^2H_0^2(H_0+Y_{12})}\right]Y_{12}^2,$$

$$v_2(Y_{12}, V_2) = \frac{f_2L_2F_2}{2P_2'}V_2^2 + g\left[\frac{f_1^2f_2^2}{2(P_2'f_1^2+P_1'f_2^2)}-\frac{N_2^2}{\eta^2g^2H_0^2(H_0+Y_{12})}\right]Y_{12}^2, \quad (45)$$

care permit construcția familiilor de curbe (Ψ_{C1}) și (Ψ_{C2}) :

$$\frac{1}{2}F_1V_1^2+\frac{gf_1}{2L_1}\left(\frac{1}{1+\dfrac{P_2'/f_2^2}{P_1'/f_1^2}}-\frac{2P_1'Q_0^2}{(H_0+Y_{12})f_1^2}\right)Y_{12}^2 = C_1,$$

$$\frac{1}{2}F_2V_2^2+\frac{gf_2}{2L_2}\left(\frac{1}{1+\dfrac{P_1'/f_1^2}{P_2'/f_2^2}}-\frac{2P_2'Q_0^2}{(H_0+Y_{12})f_2^2}\right)Y_{12}^2 = C_2. \quad (46)$$

Analiza stabilității hidraulice generale a sistemului se va face succesiv cu ajutorul curbelor (Φ_1), (Ψ_{C1}) și (Φ_2), (Ψ_{C2}) printr-o procedură analogă celei folosite în cazul unui castel de echilibru.

Pentru analiza schemei hidrotehnice din figura 2*b* se pleacă de la sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării :

$$\frac{L_1}{g}\frac{dW_1}{dt}+Z_1+P_1'W_1^2+R_1'\left|\frac{dZ_1}{dt}\right|\frac{dZ_1}{dt}=0,$$

$$\frac{L_2}{g}\frac{dW_2}{dt}+Z_2-Z_1+P_2'W_2^2+R_2'\left|\frac{dZ_2}{dt}\right|\frac{dZ_2}{dt}=0,$$

$$F_1\frac{dZ_1}{dt}+W_2f_2=W_1f_1, \quad (47)$$

$$F_2\frac{dZ_2}{dt}-W_2f_2=-\frac{N_2}{\eta g(H_2+Z_2)}$$

și se poate dezvolta o metodică analogă celei folosite mai sus. Metoda propusă oferă posibilitatea analizării în ansamblu a stabilității hidraulice generale de funcționare la regimuri tranzitorii a uzinelor hidroelectrice prevăzute cu unul sau două castele de echilibru dispuse în sistem, și permite alegerea preliminară optimă a parametrilor hidraulici de proiectare a castelelor de echilibru, care apoi se verifică prin metode numerice.

2. APLICAȚII

Pentru aplicarea metodei propuse s-au ales cazurile a două uzine hidroelectrice, studiate anterior de noi prin metode numerice [8].

2.1. CAZUL UNUI CASTEL DE ECHILIBRU

Se menționează principalele caracteristici ale uzinei (figura 1):

$$L = 8130 \text{ m}; \quad d = 4{,}4 \ m; \quad L_T = 740 \text{ m},$$

$$d_T = 3{,}4 \text{ m}; \quad H = 470 \text{ m}; \quad N = 215 \text{ MW}.$$

Pierderea de sarcină în diafragma castelului s-a admis de forma $R = 0{,}00416\ Q_0^2$, de unde rezultă $\alpha = 0{,}87$.

Calculele s-au efectuat cu următoarele valori ale secțiunilor castelului: $F = 10; 12; 15; 20; 28; 35$ m^2 și s-au avut în vedere două regimuri de funcționare a uzinei, cu $N_2 = 150$ MW și 215 MW.

În figura 3 sînt reproduse, sub formă grafică, rezultatele calculelor pentru $F = 12; 20; 28$ m^2; s-au notat cu A și B punctele corespunzătoare manevrei de pornire totală a uzinei și s-a avut în vedere și valoarea $\alpha = 0{,}61$. Se remarcă concordanța acestor rezultate cu cele obținute prin simularea numerică: secțiunea $F = 12$ m^2 imprimă uzinei o funcționare hidraulică instabilă, față de secțiunea $F = 28$ m^2 — acceptată la proiectarea uzinei, care asigură funcționarea stabilă la regimuri tranzitorii. Camerele superioară și inferioară ale castelului s-au dimensionat la oscilații externe [8].

La aplicarea efectivă a metodei se poate începe cu trasarea curbelor Φ pentru mai multe valori ale lui F și α, eliminîndu-se de la început situațiile de instabilitate generală a funcționării uzinei, în care curbele Φ corespunzătoare taie axa Y în punctele de abscisă pozitivă [4].

2.2. CAZUL A DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU DISPUSE ÎN SISTEM

Dintre caracteristicile uzinei (fig. 2*a*) se menționează:

$$L_1 = 5000 \text{ m}; \quad d_1 = 7 \text{ m}; \quad L_T = 300 \text{ m}; \quad d_T = 5{,}6 \text{ m},$$

$$L_2 = 500 \text{ m}; \quad d_2 = 7 \text{ m}; \quad H = 130 \text{ m}; \quad N = 180 \text{ MW}.$$

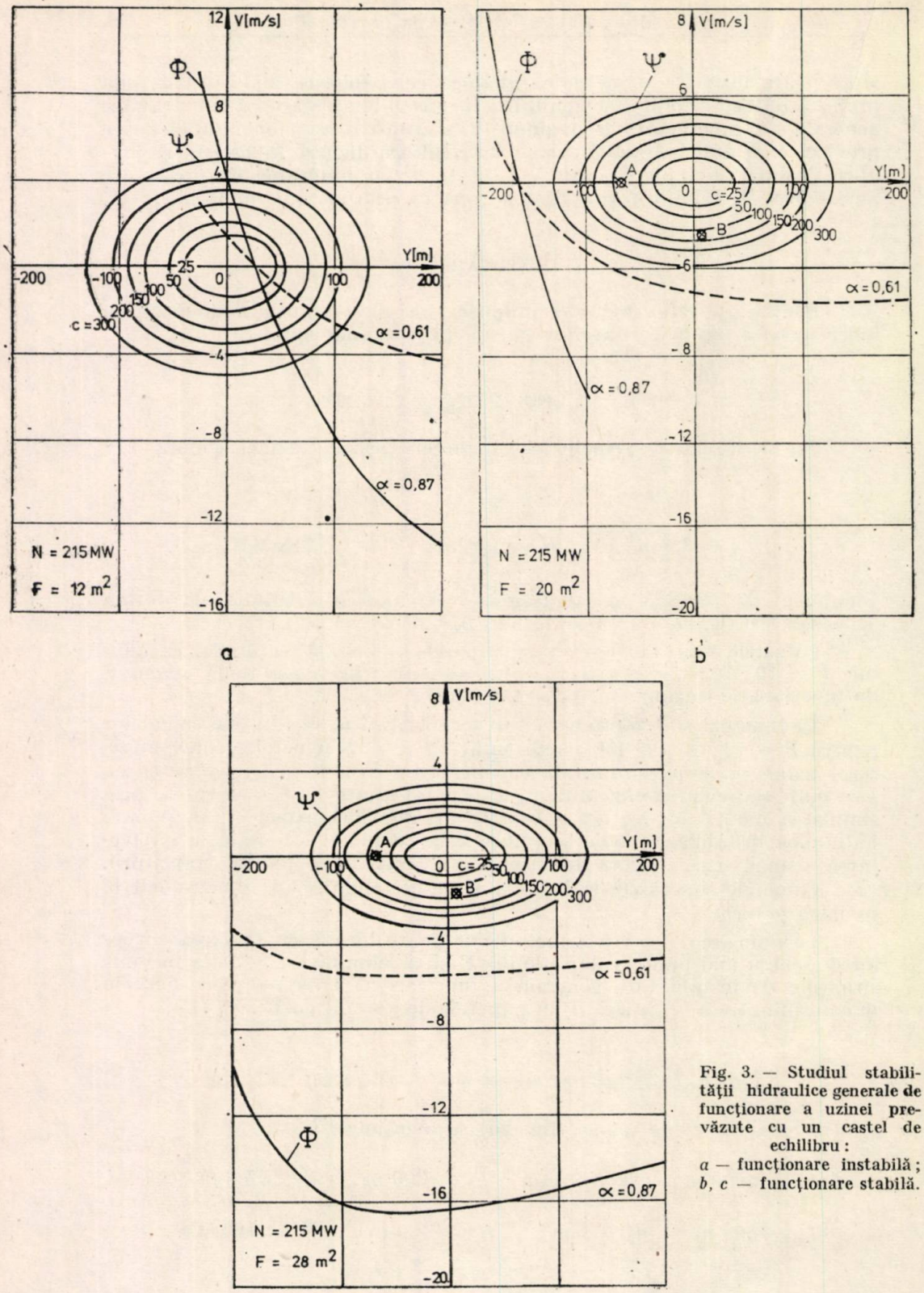


Fig. 3. — Studiul stabilității hidraulice generale de funcționare a uzinei prevăzute cu un castel de echilibru :
a — funcționare instabilă ;
b, *c* — funcționare stabilă.

Castelele de echilibru sînt prevăzute cu diafragme la bază. S-au analizat cazurile $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}75$ și $\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}87$. Calculele s-au efectuat cu următoarele valori ale secțiunilor castelelor :

$$F_1 ; F_2 = 800 ; 700 ; 600 ; 500 ; 400 ; 300 ; 200 \text{ m}^2$$

și s-au avut în vedere două regimuri de funcționare a uzinei, cu $N_2 = 100$ și 150 MW.

În figura 4 sînt reproduse, sub formă grafică, rezultatele calculelor pentru $F_1 ; F_2 = 800 ; 400$ m² și $N_2 = 150$ MW.

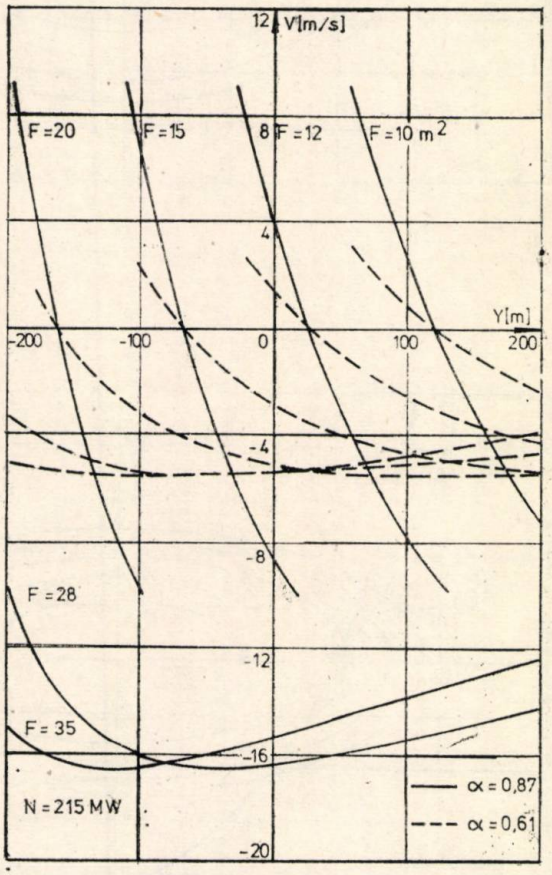
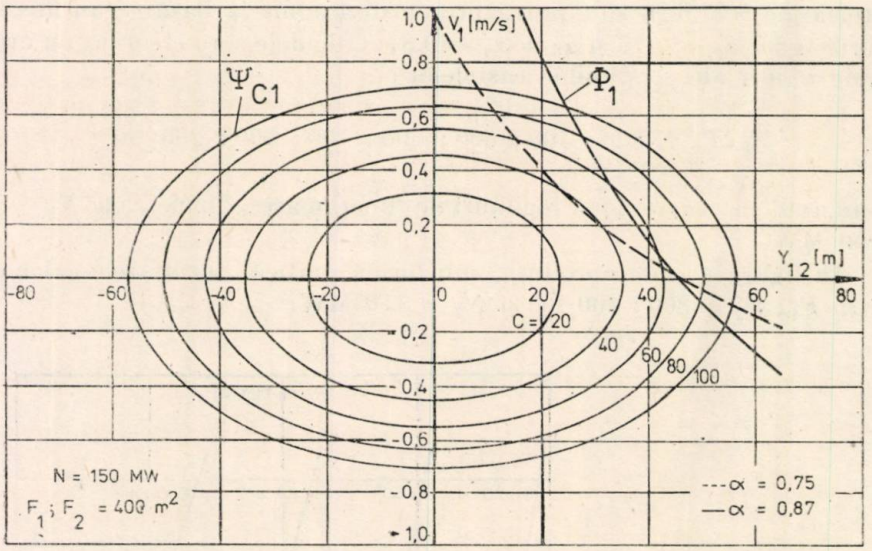


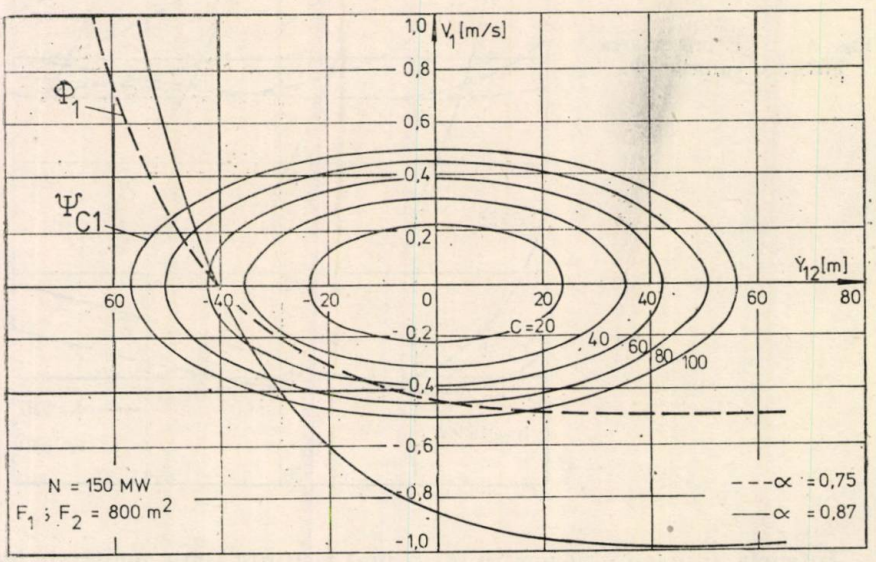
Fig. 4. — Reprezentarea grafică a curbelor Φ.

Întrucît, în exemplul nostru, s-au luat secțiuni egale pentru galeriile de aducțiune și de fugă ($d_1 = d_2 = 7$m), curbele Φ_1 și Φ_2 și, respectiv, Ψ_{C1} și Ψ_{C2} au rezultat identice, iar analiza stabilității sistemului s-a putut face numai cu un set de curbe. Astfel, se pot pune în evidență situațiile de stabilitate și instabilitate generală a sistemului.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1949



a



b

Fig. 5. — Studiul stabilității hidraulice generale de funcționare a uzinei prevăzute cu două castele de echilibru :
a — funcționare instabilă ; *b* — funcționare stabilă.

3. CONCLUZII

Metoda prezentată mai sus, bazată pe o analiză a stabilității fundamentată matematic, permite alegerea preliminară a parametrilor de proiectare a castelelor de echilibru din cadrul uzinelor hidroelectrice prevăzute cu unul sau două castele de echilibru dispuse în sistem, parametrii care se verifică apoi prin metode numerice. De asemenea, în anumite cazuri, metoda permite și o descriere analitică directă a condițiilor de stabilitate.

Primită la redacție la 26 iulie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. G. Aronovici, N. Kartvelisvili, I. Liubimtev, *Ghidravliceski udar i uravlitelinie rezervoari*, Izdatelistvo Nauca, Moskva, 1968.
2. D. Arsenie, *Un critérium de stabilité et quelques inégalités nouvelles obtenues par la méthode de la fonction de Liapunov dans le cas de moyennes oscillations dans les cheminés d'équilibre*, Simposion AIRH, Bucarest, 1976.
3. L. Escande, *Stabilité d'une chambre d'équilibre de la étranglement avec asservissement de la puissance électrique à la puissance hydraulique*, Recherches hydrauliques, AIRH, Vol. 1, 1963.
4. A. Halanay, M. Popescu, *Analiza stabilității hidraulice generale a castelelor de echilibru prin metoda funcției Liapunov*, Hidrotehnica, *8* (1978).
5. C. Jaeger, *Hydraulique technique*, Dunod, Paris, 1954.
6. S. P. LaSalle, *Stability Theory for Ordinary Differential Equations*, Journal of Differential Equations, *4* (1968).
7. M. Popescu, *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXI**, (1969).
8. M. Popescu, *Metode noi pentru calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, Studii de hidraulică, **XXIII**, (1970).
9. B. Zickman, *Méthodes nouvelles pour le calcul des cheminées d'équilibre*, La Houille Blanche, *5* (1953).

TRANSPORTUL ALUVIUNILOR ÎN REGIM NEPERMANENT. II EFECTUL FORMEI SECȚIUNII TRANSVERSALE A CURGERII

de I. SETEANU, R. POPA
nstitutul politehnic București

Se prezintă un model de calcul al procesului de transport al aluviunilor în regim nepermanent în albii cu pat mobil și secțiune transversală arbitrară. Se descompune domeniul de curgere în tuburi de curent componente, efectuîndu-se bilanțul aluviunilor transportate cu relația lui Engelund-Hansen. Se indică un exemplu de calcul al procesului de afuiere — transport — depunere pentru lacul de acumulare Bicaz.

1. INTRODUCERE

Capacitatea de transport a aluviunilor constituie una dintre funcțiile cele mai importante ale unui curs de apă, cu efect direct asupra structurii morfologice a bazinului hidrografic aferent. Scara de timp mare a procesului de eroziune, transport și sedimentare a materialului, precum și numărul mare de parametrii care influențează fenomenul, fac ca acest capitol al hidraulicii să fie unul dintre cele mai puțin elucidate teoretic, deși volumul de cercetări experimentale „in situ" este apreciabil.

Profilul în lung al unui curs de apă, definit pe linia de talveg, constituie rezultatul la un moment dat al proceselor de eroziune, transport și depozitare, schimbările de pantă fiind direct legate și provocate de modificările topografice și geomorfologice ale terenului. La rîndul său, mișcarea aluviunilor este strîns dependentă de schimbările în timp ale debitelor solid și lichid. Orice modificare a echilibrului natural al curgerii are ca rezultat un proces tranzitoriu de deplasare spre o nouă stare de echilibru care poate să fie avantajoasă pentru programul de regularizare al cursului de apă, dar poate să producă adesea efecte nedorite care să reclame protecții de maluri sau operații ulterioare de dragare, în general deosebit de costisitoare și de lungă durată.

În lucrarea de față se continuă analiza curgerii nepermanente în albii cu pat mobil din [1], extinzîndu-se analiza la secțiuni transversale de formă arbitrară.

2. ECUAȚIILE CURGERII UNIDIMENSIONALE NEPERMANENTE

Aluviunile în suspensie exercită o influență redusă asupra procesului de afuiere, marea majoritate a stocului de aluviuni de fund deplasîndu-se în timpul perioadelor de ape mari în care acțiunea curentului asupra albiei minore este redusă, dar albia majoră suferă modificări sensibile. De obicei, compoziția granulometrică a aluviunilor de fund se schemati-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 1, 1979, P. 21—28

COSTELINNI— 15

zează printr-o granulometrie uniformă, abaterea de la sfericitate fiind, după Meyer-Peter, importantă doar pentru granulele foarte mici. Influența coeziunii interne a masei de aluviuni este dificil de prins în calcule [2] și de aceea studiul stabilității la afuiere se restrînge de obicei la paturi nisipoase. Dintre numeroasele relații propuse în literatură pentru determinarea debitului volumetric S de aluviuni tîrîte, s-a preferat în lucrarea de față formula lui Engelund-Hansen [3]:

$$\frac{S}{B\cdot D^{3/2}\cdot\sqrt{\Delta\cdot g}} = 0{,}084\cdot\left(\frac{h\cdot i}{\Delta\cdot D}\right)^{5/2}\cdot\frac{C^2}{g}, \tag{1}$$

unde h reprezintă adîncimea curentului, B — lățimea medie a albiei, i — panta hidraulică, C — coeficientul lui Chezy, Δ — greutatea relativă specifică medie sub apă a sedimentului transportat, iar D este diametrul mediu al granulelor ($d_{50\%}$).

La modelarea procesului de afuiere-depunere se admite că regimul presiunilor într-o secțiune transversală este practic hidrostatic și se neglijează curenții transversali.

Pentru debitul fazei lichide se scriu ecuațiile lui Saint-Venant (fig. 1):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + g\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + g\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = R_f, \tag{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V\cdot\frac{\partial h}{\partial x} + h\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

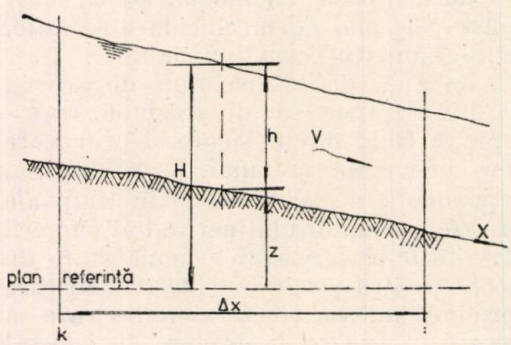


Fig. 1

în care R_f este rezistența hidrodinamică la înaintare:

$$R_f = -\frac{g\cdot V\cdot|V|}{C^2\cdot h}. \tag{4}$$

Modificările patului albiei se datoresc neechilibrării bilanțului între cantitățile de aluviuni care intră, respectiv ies din sectorul de curgere considerat, conform ecuației de continuitate:

$$B\cdot\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Se poate arăta [1] că sistemul hiperbolic de ecuații cu derivate parțiale (2), (3), (5) are viteza de deplasare a perturbațiilor de fund (panta caracteristicilor) dată de

$$c_3 = -\frac{V\cdot g\cdot\dfrac{\partial S}{\partial V}}{B\cdot(V^2 - g\cdot h)}. \tag{6}$$

Pentru curgeri subcritice lente, aproximînd relația (1) prin $S = a\cdot V^b\cdot B$, unde V este viteza medie (a și b constante), se obține celeritatea sedimentului:

$$\frac{c_3}{V} = b\cdot\frac{S}{Q} \ll 1 \tag{7}$$

deoarece $S \ll Q$. Din această cauză se poate admite (cu excepția viiturilor foarte abrupte), că regimul de curgere este cvasipermanent, înlocuindu-se hidrograful real printr-un hidrograf în trepte.

Transcrierea directă în diferențe finite a ecuației (5) conduce la o schemă de calcul instabilă, fiind necesară, după Lax [4], introducerea unui termen de pseudo-vîscozitate T:

$$\frac{z_j^{n+1} - z_j^n - T}{\Delta t} + \frac{S_{j+1}^n - S_{j-1}^n}{2 \cdot B_j \cdot \Delta x} = 0, \tag{8}$$

$$T = \frac{\alpha}{2} \cdot z_{j+1}^n - \alpha \cdot z_j^n + \frac{\alpha}{2} \cdot z_{j-1}^n, \tag{9}$$

$$\alpha = 0{,}01 + \left(c_3 \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2, \tag{10}$$

unde j specifică poziția nodului spațial, iar n a nodului temporal într-o rețea bidimensională spațiotemporală.

Riguros vorbind, relațiile de mai sus sînt valabile pentru o albie de secțiune dreptunghiulară și lățime lent variabilă, dar se pot aplica în cazul unei secțiuni transversale arbitrare pentru tuburile de curent componente de lățime suficient de mică, profilul longitudinal al suprafeței libere (de remuu) determinîndu-se în schema unidimensională de curgere gradual-variată.

3. MODELAREA MATEMATICĂ A CURGERII FAZEI LICHIDE

Relația lui Bernoulli între două secțiuni transversale, i și k apropiate, este echivalentă cu sistemul lui Saint-Venant în regim permanent gradual-variat:

$$H_i = H_k + F \cdot Q^2, \tag{11}$$

$$H_i = z_i + h_i, \tag{12}$$

$$F = \zeta \cdot \left(\frac{1}{\omega_k^2} - \frac{1}{\omega_i^2}\right) + \frac{\Delta x}{\overline{K}^2}, \tag{13}$$

$$\zeta = \begin{cases} \alpha_B/(2 \cdot g) & \text{pentru canale convergente,} \\ 0 & \text{pentru canale divergente,} \end{cases} \tag{14}$$

$$\frac{2}{\overline{K}^2} = \frac{1}{K_i^2} + \frac{1}{K_k^2}, \tag{15}$$

$$K = \omega \cdot C \cdot \sqrt{R}, \tag{16}$$

$$C = \frac{1}{n} \cdot R^{1/6} \qquad \text{(Manning)}, \tag{17}$$

$$R = \frac{\omega}{\chi}, \tag{18}$$

unde K reprezintă modulul de debit, ω — secțiunea vie, R — raza hidraulică, χ — perimetrul udat, n — coeficientul de rugozitate, iar α_B este coeficientul lui Coriolis.

Pentru determinarea curbei de remuu s-a folosit un program de calcul FORTRAN, care ține seama de forma concretă a profilului transversal, asimilîndu-se patul albiei cu un contur poligonal [5]. Pentru curgeri subcritice lente, calculul se efectuează din secțiunea aval spre amonte.

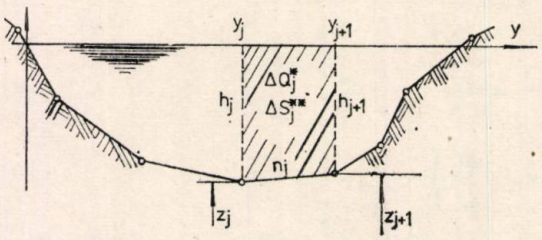


Fig. 2

Cunoscîndu-se cotele COTA (I) ale suprafeței libere în secțiunile transversale de calcul este necesar să se divizeze domeniul de curgere în tuburi de curent componente. Pentru aceasta se determină în prealabil variația debitului în funcție de coordonata transversală y a secțiunii (fig. 2).

În conformitate cu formula lui Chezy, pentru un canal dreptunghiular elementar se poate scrie viteza medie locală v:

$$v = \lambda \cdot v^*, \tag{19}$$

$$v^*(y) = \left[\frac{1}{n(y)} \cdot h^{1/6}(y)\right] \cdot \sqrt{h(y)}, \tag{20}$$

unde λ este un factor de proporționalitate determinat din condiția $\lambda = Q/Q^*$.

Pentru zona $y_j \div y_{j+1}$ se obține

$$Q^*_{j+1} = Q^*_j + \Delta Q^*_j, \tag{21}$$

$$\Delta Q^*_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} v^*(y) \cdot h(y) \cdot \mathrm{d}y = \frac{3}{8 \cdot n_j} \cdot \frac{y_{j+1} - y_j}{h_{j+1} - h_j} \cdot (h^{8/3}_{j+1} - h^{8/3}_j), \tag{22}$$

respectiv

$$\Delta Q^*_j = \frac{h^{5/3}_j}{n_j} \cdot (y_{j+1} - y_j) \tag{23}$$

dacă $h_{j+1} = h_j$.

Determinîndu-se $Q^*(y)$ și parametrul λ, se obține, prin interpolare liniară, șirul coordonatelor $y^*_1, y^*_2, \ldots, y^*_{N+1}$ ale nodurilor tuburilor de curent componente, de debite egale Q/N.

Pentru fiecare tub de curent component se pot aplica relațiile transportului de sediment ale schemei unidimensionale de curgere.

4. MODELAREA MATEMATICĂ A CURGERII FAZEI SOLIDE

Folosind formula lui Chezy pentru viteza medie locală (19)—(20), se determină variația debitului solid în funcție de coordonata y a secțiunii. După transformări algebrice simple, relația lui Engelund-Hansen (1) se scrie:

$$s = \frac{S}{B}, \tag{24}$$

$$s = \lambda^5 \cdot s^*, \tag{25}$$

$$s^*(y) = \frac{0{,}084}{D(y) \cdot \Delta^2 \cdot \sqrt{g} \cdot n^4(y)} \cdot h^{19/6}(y). \tag{26}$$

Pentru zona $y_j \div y_{j+1}$ se obține:

$$S^*_{j+1} = S^*_j + \Delta S^*_j, \tag{27}$$

$$\Delta S^*_j = \int_{y_j}^{y_{j+1}} s^*(y) \cdot \mathrm{d}y = \frac{0{,}00644}{D_j \cdot \Delta^2 \cdot n_j^4} \cdot \frac{h_{j+1}^{25/6} - h_j^{25/6}}{h_{j+1} - h_j} \cdot (y_{j+1} - y_j), \tag{28}$$

respectiv

$$\Delta S^*_j = \frac{0{,}02682}{D_j \cdot \Delta^2 \cdot n_j^4} \cdot h_j^{19/6} \cdot (y_{j+1} - y_j) \tag{29}$$

dacă $h_{j+1} = h_j$.

Determinîndu-se $S^*(y)$, se calculează debitul solid transportat prin tuburile de curent componente, folosind interpolarea liniară

$$\Delta S^{**}_n = S^*(y^*_{n+1}) - S^*(y^*_n). \tag{30}$$

În acest fel, se cunoaște pentru fiecare tub de curent n component, în fiecare secțiune transversală, lățimea acestuia $b_n = y^*_{n+1} - y^*_n$, debitul lichid transportat prin tub, $q_n = Q/N$, și debitul solid, $\sigma_n = \lambda^5 \cdot \Delta S^{**}_n$, care diferă de la o secțiune transversală la alta. Aceste valori sînt obținute pentru un regim hidraulic permanent dat (o treaptă a hidrografului afluent), iar în cazul curgerii nepermanente se calculează pentru un șir de momente de timp $t_1, t_2, \ldots$, spațiate prin pasul de timp Δt.

Pentru fiecare tub de curent component se integrează ecuația de continuitate (5), conform schemei în diferențe (8) — (10), rezultînd în cele din urmă variația în timp a coordonatei $z(x, y, t)$ a fundului, adică modul de variație a patului mobil al albiei în cursul procesului de eroziune — transport — depunere.

5. EXEMPLU DE CALCUL. REZULTATE NUMERICE. CONCLUZII

Programul de calcul FORTRAN algoritmizat în conformitate cu modelul matematic de mai sus a fost aplicat pentru un regim de curgere nepermanent în lacul de acumulare Bicaz, alegînd ca date de bază rezultatele măsurătorilor din [6] asupra morfologiei fundului lacului. Poziționarea secțiunilor transversale de calcul este indicată în figura 3, iar coordonatele patului pentru profilul transversal $i = 6$ (fig. 4) sînt indicate în tabelul următor :

Punct	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y(m)	0,00	90,00	105,00	221,00	252,00	282,00	330,00	452,00	475,00
z (mdM)	514,20	478,00	480,00	473,00	470,00	455,00	459,00	457,20	457,00

Punct	10	11	12	13	14	15
y(m)	688,00	895,00	982,00	1052,00	1120,00	1290,00
z(mdM)	459,00	458,00	467,00	495,00	502,00	515,10

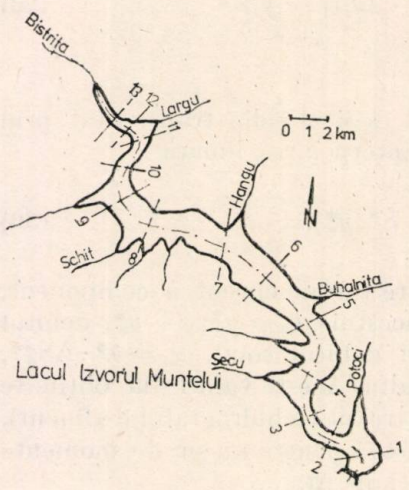


Fig. 3

Pentru simplificare, s-a admis aceeași rugozitate ($n = 0{,}067$) și granulometrie ($D = 2$ mm) pe întregul domeniu de curgere. Greutatea specifică relativă a aluviunilor s-a luat $\Delta + 1 = 2{,}65$. Valorile treptelor de debit introduse în calcul și cotele suprafeței libere la barajul UHE V. I. Lenin sînt indicate în continuare :

Cota baraj (mdM)	Debit (m^3/s)
510,00	180
510,50	200
511,00	220

iar pasul de timp s-a admis $\Delta t = 10$ h. Coeficientul Coriolis s-a luat $\alpha_B = 1{,}1$.

Spectrul tuburilor de curent în domeniul de curgere schematizat (cu linia de talveg rectilinie) la momentul de timp $t = 10$ h este reprezentat în figura 5, iar în figura 4 se prezintă divizarea corespunzătoare a secțiunii transversale.

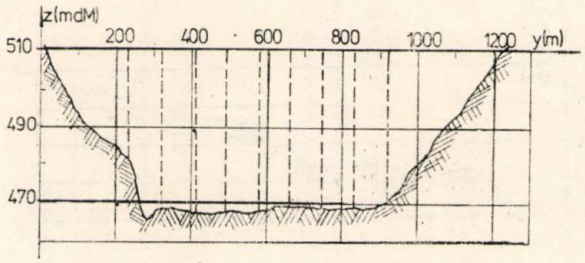


Fig. 4

În figura 6 se indică evoluția patului mobil al fundului lacului pentru tubul de curent $n = 9$, la momentele de timp alese.

Întrucît observațiile experimentale [7] arată că liniile izotahe (de egală viteză) nu sînt orizontale, folosirea formulei lui Chezy pentru calculul vitezei locale (19) — (20) are ca rezultat o subestimare a debitului

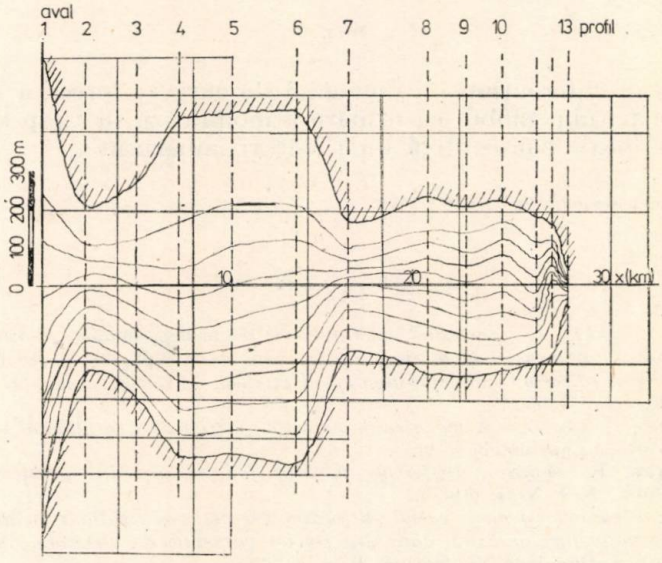


Fig. 5

solid transportat în zonele de adîncime redusă ale albiei și o supraestimare a acestuia în vecinătatea liniei de talveg. Într-o lucrare viitoare se va analiza procesul de afuiere-depunere rezultat prin folosirea unor ipoteze de calcul mai realiste (linii izotahe determinate în natură sau pe model). Este interesant de studiat de asemenea influența rugozității și

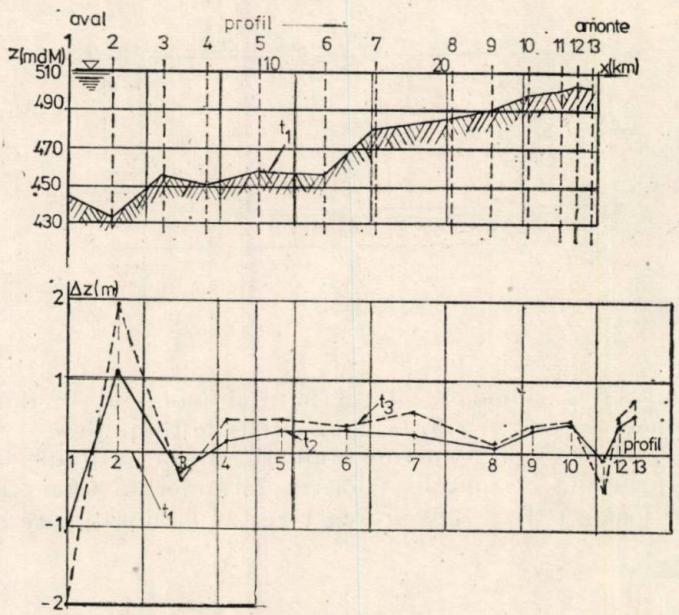


Fig. 6

granulometriei diferențiate în domeniul de curgere, precum și efectul de „pavare" a patului mobil, ca urmare a modificării în timp a curbei granulometrice locale consecutivă unor viituri importante.

Primită la redacție la 31 iulie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. A. Diacon, I. Seteanu, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. I. Efectul modificării profilului transversal al curgerii*, St. Cerc. Mec. Apl., **35**, *1* (1976).
2. F. Partheniades, *Erosion and deposition of cohesive soils*, Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., **91**, HYI (1965).
3. F. Engelund, E. Hansen, *A monograph on sediment transport in alluvial streams*, Teknisk Forlag, Copenhagen (1967).
4. R. Richtmyer, K. Morton, *Difference methods for initial-value problems*, Interscience Publ., New York (1967).
5. K. Felkel, *Programme pour le calcul par ordinateur des modifications du niveau du fond et de la surface de l'eau, dans une rivière par suite du charriage*, XXII-e Congrès International de Navigation, Paris (1969).
6. I. Bojoi, V. Surdeanu, *Evoluția fenomenului de colmatare în zonele de intensitate maximă a sedimentării din lacul Izvorul-Muntelui Bicaz*, Lucrările stațiunii Stejarul, Geologie-Geografie, (1972—1973).
7. C. L. Chiu, H. C. Lin, K. Mizumura, *Simulation of hydraulic processes in open channels*, Proc. A.S.C.E., J. of Hydr. Div., **102**, HY2 (1976).

MIȘCAREA UNUI FLUID PRINTR-UN TUB CU PEREȚI PERMEABILI

de. T. OROVEANU și AL. D. STAN
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În anumite situații practice, mișcarea unui fluid se efectuează prin tuburi cu pereți permeabili. Un asemenea caz ar putea exista la deschiderea stratelor productive de petrol cu ajutorul perforatoarelor mecanice sau al jeturilor. Într-o astfel de situație, este necesar să fie cunoscute elementele mișcării (viteza de filtrare prin pereții tubului, debitul de tranzit, căderea de presiune etc.).
Relațiile de calcul obținute în această lucrare, pe care le considerăm corecte, sînt utile pentru stabilirea parametrilor tehnologici optimi (debit de pompare, presiune) la tratamentele de sonde unde se presupune existența unor astfel de tuburi cu pereți permeabili.

1. CONSIDERAȚII ASUPRA UNOR STUDII EFECTUATE PÎNĂ ÎN PREZENT

Mișcarea laminară a unui fluid într-un tub de secțiune circulară și cu pereți poroși a fost analizată în [1], unde s-a propus o lege exponențială de variație a vitezei de filtrare în lungul unui asemenea tub și anume

$$V = V_0 \, e^{-\alpha x} \tag{1}$$

pentru $r = R$. Au mai fost considerate și următoarele condiții la limită:

$$v = 0, \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \tag{2}$$

la $r = 0$,

$$u = 0 \tag{3}$$

la $r = R$ și

$$Q_0 = 2\pi \int_0^R ru(0, r) \, dr \tag{4}$$

pentru $x = 0$.

Componentele u și v ale vitezei sînt definite în raport cu sistemul de axe de coordonate reprezentat în figura 1.

Așa cum se observă imediat, mărimea V_0 din (1) este viteza de filtrare la intrarea în tub ($x = 0$).

Autorii lucrării menționate au presupus că mișcarea fluidului este staționară și suficient de lentă, numărul lui Reynolds fiind deci mic. În aceste condiții, problema se reduce la integrarea ecuației

$$E^2(E^2\psi) = 0, \tag{5}$$

unde apare operatorul

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \tag{6}$$

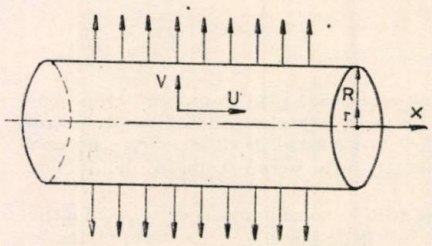


Fig. 1

iar ψ este funcția de curent, definită prin relațiile

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad v = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{7}$$

Cu condițiile la limită precizate mai înainte, au fost obținute pentru componentele vitezei expresiile

$$u = V_0\, e^{-\alpha x}\frac{J_1(\alpha R)J_0(\alpha r) - \frac{r}{R}J_0(\alpha R)J_1(\alpha r)}{J_1^2(\alpha R) - J_0(\alpha R)J_2(\alpha R)} + \\ + \left(\frac{2Q_0}{\pi R^2} - \frac{4V_0}{\alpha R}\right)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{8}$$

și

$$v = V_0\, e^{-\alpha x}\frac{J_1(\alpha R)J_1(\alpha r) - \frac{r}{R}J_0(\alpha R)J_2(\alpha r)}{J_1^2(\alpha R) - J_0(\alpha R)J_2(\alpha R)}, \tag{9}$$

J_0, J_1 și J_2 fiind funcțiile Bessel de specia întîia, de ordinele zero, unu și doi respectiv.

Căderea de presiune între secțiunea de intrare și o secțiune oarecare

$$\Delta p = p(0, r) - p(x, r) \tag{10}$$

are expresia

$$\Delta p = \left(\frac{8\mu Q_0}{\pi R^4} - \frac{16\mu V_0}{\alpha R^3}\right)x + \frac{2\mu V_0}{R}(1 - e^{-\alpha x})\frac{J_0(\alpha R)J_0(\alpha r)}{J_1^2(\alpha R) - J_0(\alpha R)J_2(\alpha R)}. \tag{11}$$

Constanta α care intervine în (1) și apoi în toate rezultatele prezentate mai sus, nu a fost determinată de autorii lucrării [1], valoarea ei depinzînd evident de caracteristicile mediului poros din care este format peretele tubului.

Plecînd de la aceste rezultate, putem calcula cu ușurință căderea medie de presiune în raport cu secțiunea tubului.

$$\Delta p_m = \frac{2}{R^2}\int_0^R r\Delta p\,\mathrm{d}r \tag{12}$$

sau, după efectuarea calculelor,

$$\Delta p = \left(\frac{8\mu Q_0}{\pi R^4} - \frac{16\mu V_0}{\alpha R^3}\right)x + \frac{4\mu V_0}{\alpha R^2}(1-\mathrm{e}^{-\alpha x})\,\frac{J_0(\alpha R)\,J_1(\alpha R)}{J_1^2(\alpha R) - J_0(\alpha R)\,J_2(\alpha R)}. \tag{13}$$

În ceea ce privește debitul într-o secțiune transversală oarecare a tubului,

$$Q = 2\pi\int_0^R ru\,\mathrm{d}r, \tag{14}$$

obținem, după utilizarea expresiei (8) a vitezei longitudinale u,

$$Q = Q_0 - \frac{2\pi R V_0}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}). \tag{15}$$

2. INTEGRAREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE CU NOILE CONDIȚII LA LIMITĂ ADMISE

Există situații practice în care, simultan cu mișcarea fluidului în lungul tubului, se produce și o filtrare prin pereții acestuia. Un asemenea caz se întîlnește la sondele de extracție care au fost deschise cu perforatoare mecanice sau cu jeturi abrazive. În ipoteza curgerii fluidului printr-o astfel de perforatură apare și o filtrare în stratul productiv, atunci cînd se face un tratament la sondă, sau de la strat către tubul permeabil atunci cînd produce sonda.

Pentru cazul unei fisuri [3], am arătat că viteza de filtrare dintr-o secțiune oarecare depinde de valoarea acesteia din secțiunea inițială și de căderea de presiune care se produce în fisură. Rezultatele obținute au ca punct de plecare admiterea unei legi de variație foarte generale a vitezei de filtrare în lungul fisurii. Tot ca în cazul fisurii, vom presupune că viteza de filtrare pe peretele tubului este de forma

$$v\,|_{r=R} = V(x). \tag{16}$$

Ecuațiile de mișcare, în sistemul de coordonate ales ca în figura 1, sînt

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial r}v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial r}v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right),
\end{aligned} \tag{17}$$

unde am notat cu p presiunea, cu ν viscozitatea cinematică a fluidului și am neglijat forța de masă, ca și autorii lucrării menționate mai sus [1].

În afara condiției la limită admise (16), mai trebuie satisfăcută și condiția

$$u = 0 \tag{18}$$

la $r = R$.

Dacă introducem variabilele adimensionale definite prin relațiile

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \qquad \bar{r} = \frac{r}{R} \tag{19}$$

și

$$\bar{u} = \frac{u}{u_0}, \qquad \bar{v} = \frac{v}{u_0}, \qquad \bar{V} = \frac{V}{u_0}, \tag{20}$$

respectiv

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho u_0^2}, \tag{21}$$

unde u_0 este o valoare de referință a vitezei u, ecuațiile (17) devin

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial r} v &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathcal{R}e}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \\ \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial r} v &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\mathcal{R}e}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Pentru simplificarea scrierii, am omis barele și am utilizat notația

$$\mathcal{R}e = \frac{u_0 R}{\nu}. \tag{23}$$

În ceea ce privește condițiile la limită pentru ecuațiile (22), acestea au forma

$$u = 0, \qquad v = V \tag{24}$$

la $r = 1$.

După eliminarea presiunii între ecuațiile (22), obținem

$$\begin{aligned} \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mathcal{R}e}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

și dacă introducem funcția Ψ definită prin relațiile

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi), \qquad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \tag{26}$$

găsim pentru această funcție ecuația

$$\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D^2\right)\Psi = \frac{1}{\mathcal{R}e}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + D^2\right)^2\Psi, \tag{27}$$

unde am introdus operatorul

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}. \tag{28}$$

Utilizarea funcției Ψ este posibilă deoarece aceasta satisface identic ecuația de continuitate

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0, \tag{29}$$

care a fost de altfel utilizată și pentru a se ajunge la ecuația (25).

Din (24) și (26) rezultă imediat condițiile la limită pentru funcția Ψ și anume

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\Psi) = 0, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \tag{30}$$

la $r = 1$.

În continuare, introducem funcția $\Phi(r, k)$, transformata Fourier a lui $\Psi(x, r)$, în raport cu variabila x și parametrul k [4],

$$\Phi(r, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,\Psi(x,r)\,dx \tag{31}$$

precum și funcția $W(k)$, transformata Fourier a lui $V(x)$, cu același parametru,

$$W(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\,V(x)\,dx. \tag{32}$$

Revenind la ecuația (27), vom considera cazul în care numărul lui Reynolds este mic, ceea ce permite să se neglijeze toți termenii din membrul stîng. Această aproximație este echivalentă de altfel cu aceea pe care au utilizat-o autorii lucrării citate mai înainte [1].

Dacă aplicăm transformarea Fourier ecuației astfel simplificate, obținem

$$(L^2 - k^2)^2 \Phi = 0, \tag{33}$$

unde

$$L^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{r^2}. \tag{34}$$

Prin aceeași transformare, condițiile la limită (30) devin

$$\Phi(r, k) + r\frac{\partial \Phi(r, k)}{\partial r} = 0, \qquad ik\Phi(r, k) = W(k) \tag{35}$$

la $r = 1$.

Pentru ecuația (33) considerăm o soluție de aceeași formă cu aceea propusă în [2] și anume

$$\Phi(r, k) = AI_1(kr) + BrI_0(kr), \tag{36}$$

A și B fiind constante care se determină cu ajutorul condițiilor (35). Cu I_0 și I_1 am notat funcțiile Bessel modificate, de specia întîia, de ordinul zero, respectiv unu.

După cîteva calcule, găsim

$$A = -\frac{W(k)}{ik}\frac{2I_0(k) + kI_1(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)\, I_1(k)},$$
$$B = \frac{W(k)}{ik}\frac{kI_0(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)\, I_1(k)} \tag{37}$$

și funcția $\Phi(r,k)$ are deci forma

$$\Phi(r, k) = -\frac{W(k)}{ik}\frac{[2I_0(k) + kI_1(k)]\, I_1(kr) - krI_0(k)\, I_0(kr)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)\, I_1(k)}. \tag{38}$$

Funcția $\Psi(x, r)$ și viteza $V(x)$ pot fi obținute din formulele

$$\Psi(x, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\, \Phi(r, k)\, \mathrm{d}k \tag{39}$$

și

$$V(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ikx}\, W(k)\, \mathrm{d}k. \tag{40}$$

Calculul efectiv presupune cunoașterea lui $W(k)$, respectiv fixarea legii de variație a vitezei $V(x)$. Ca și într-o lucrare anterioară [3], ne vom mărgini la stabilirea formulelor de calcul pentru viteza medie și pentru căderea de presiune care se produce într-un tub permeabil.

Dacă ținem seama de relația evidentă dintre funcția Ψ introdusă prin relațiile (26) și funcția de curent ψ definită prin relațiile (7), debitul ce se filtrează prin peretele tubului ($r = 1$), între secțiunile $-x$ și $+x$, este

$$Q_f = 2\pi [\Psi(-x, 1) - \Psi(x, 1)] = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \Phi(1, k)\, dk \quad (41)$$

sau

$$Q_f = 2\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(k)}{k} \sin kx\, dk \quad (42)$$

dacă utilizăm o formulă bine cunoscută și ținem seama de a doua condiție (35).

Pe de altă parte, același debit se mai poate scrie

$$Q_f = 4\pi x V(\xi) \quad (43)$$

cu $\xi \in [-x, x]$; obținem prin urmare

$$xV(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(k)}{k} \sin kx\, dk. \quad (44)$$

Într-o secțiune transversală oarecare a tubului, viteza medie are expresia

$$u_m(x) = 2 \int_0^1 ur\, dr \quad (45)$$

și dacă utilizăm expresia (26) a vitezei u precum și formula (39), găsim

$$u_m(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \Phi(1, k)\, dk. \quad (46)$$

După ce scriem în același mod viteza medie în secțiunea $-x$ și scădem din acest rezultat pe cel precedent, obținem

$$u_m(-x) - u_m(x) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W(k)}{k} \sin kx\, dk. \quad (47)$$

Comparînd această formulă cu (44), rezultă imediat

$$u_m(-x) - u_m(x) = 4xV(\xi), \quad (48)$$

relație care poate fi scrisă și între secțiunile **0** și x sub forma

$$u_m(0) - u_m(x) = 2xV(\xi) \tag{49}$$

cu $\xi \in [0, x]$.

În ceea ce privește căderea de presiune, pe o lungime elementară dx a tubului, aceasta are expresia

$$dp = -\frac{8}{\mathcal{R}e} u_m(x)\, dx, \tag{50}$$

iar dacă înlocuim pe $u_m(x)$ din (49) și integrăm, găsim

$$p(0) - p(x) = \frac{8}{\mathcal{R}e} [u_m(0) - xV(\xi)]\, x. \tag{51}$$

Dacă revenim la forma dimensională pentru toate variabilele, rezultă

$$\Delta p = \frac{8\mu}{R^2} \left[u_m(0) - \frac{x}{R} V(\xi)\right] x, \tag{52}$$

unde am notat cu Δp diferența dintre presiunile $p(0)$ și $p(x)$.

Pentru a stabili modul în care variază viteza de filtrare în lungul tubului, luăm ca punct de plecare expresia efortului tangențial

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{53}$$

sau, sub formă adimensională,

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{54}$$

Pentru a ajunge la această ultimă expresie, am utilizat relațiile (19) și (20), barele fiind omise, ca și mai înainte, iar efortul tangențial a fost împărțit cu ρu_0^2.

Pe peretele tubului ($r = 1$), obținem

$$\bar{\tau}_0 = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{r=1} \tag{55}$$

și dacă apelăm la rezultatele precedente putem da acestei expresii o formă adecvată pentru calculele ce urmează. Într-adevăr, din prima relație (26) și din (39), găsim imediat

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{\partial^2 \Phi(r, k)}{\partial r^2}\, dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, k)}{\partial r}\, dk - \tag{56}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{\Phi(r, k)}{r^2}\, dk$$

și dacă ținem seama de expresia (38) a funcției Φ, după cîteva calcule rezultă

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{kW(k)}{i}\, dk. \tag{57}$$

Tot astfel, din a doua relație (26) și din (39) găsim

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 e^{-ikx} \Phi(r,k)\, dk \tag{58}$$

și, utilizînd din nou expresia (38),

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{r=1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{kW(k)}{i}\, dk. \tag{59}$$

Observăm că o simplificare a calculelor necesare pentru a se ajunge la formulele (57) și (59) se realizează dacă ținem seama de condițiile la limită (35).

Așadar, expresia (55) a efortului tangențial la perete are forma

$$\bar{\tau}_0 = \frac{2}{\mathcal{R}e\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{kW(k)}{i}\, dk. \tag{60}$$

Pe o lungime elementară dx a tubului, putem scrie însă

$$dp = 2\bar{\tau}_0\, dx \tag{61}$$

și după integrarea în raport cu x între secțiunile $-x$ și $+x$ găsim

$$\begin{aligned} p(-x) - p(x) &= \frac{4}{\mathcal{R}e\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ikx} - e^{-ikx})\, W(k)\, dk = \\ &= \frac{4}{\mathcal{R}e} [V(-x) - V(x)], \end{aligned} \tag{62}$$

rezultat la care ajungem cu ajutorul formulei (40). Considerînd acum secțiunile 0 și x, putem scrie deci

$$p(0) - p(x) = \frac{4}{\mathcal{R}e} [V(0) - V(x)], \tag{63}$$

sau, după ce revenim la mărimile dimensionale,

$$\Delta p = \frac{4\mu}{R} [V(0) - V(x)], \tag{64}$$

Δp avînd aceeași semnificație ca și în formula (52).

Din (64) deducem însă

$$V(x) = V(0) - \frac{R}{4\mu}\Delta p, \tag{65}$$

rezultat care arată, ca și în cazul unei fisuri permeabile [3], că viteza de filtrare dintr-o secțiune oarecare a tubului depinde de aceea din secțiunea inițială $V(0)$ și de căderea de presiune Δp dintre cele două secțiuni.

3. COMPARAREA REZULTATELOR OBȚINUTE CU CELE DIN LITERATURĂ

Debitul care se filtrează prin peretele tubului între secțiunea inițială și o secțiune oarecare, are expresia

$$Q_f = 2\pi R\int_0^x V(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi RV(0)\,x - 2\pi R\left[u_m(0)\frac{x}{R} - \frac{2}{3}V(\xi)\frac{x^2}{R^2}\right]x = \tag{66}$$

$$= 2\pi RV(0)\,x - \frac{2}{3}\pi[2u_m(0) + u_m(x)]\,x^2,$$

la care ajungem după ce utilizăm succesiv formulele (65) și (52) și introducem pentru $V(\xi)$ expresia dimensională dedusă din (49).

Prin urmare, în secțiunea transversală considerată a tubului, debitul are expresia

$$Q = Q_0 - Q_f = Q_0 - 2\pi RV(0)\,x + \frac{2}{3}\pi[2u_m(0) + u_m(x)]\,x^2, \tag{67}$$

de unde obținem

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\pi RV(0)}{Q_0}\,x + \frac{2\pi}{3Q_0}[2u_m(0) + u_m(x)]\,x^2. \tag{68}$$

Pe de altă parte, din (15) rezultă

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\pi RV_0}{\alpha Q_0}(1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}), \tag{69}$$

V_0 având, evident, aceeași semnificație cu $V(0)$.

O comparație între formulele (68) și (69) este posibilă atunci cînd exponentul αx este mic. Astfel, pentru $0 \leqslant \alpha x \leqslant \ln 2$, există aproximații polinomiale ale funcției $\mathrm{e}^{-\alpha x}$, cu o eroare din ce în ce mai mică pe măsură ce gradul polinomului crește. Cu o eroare mai mică sau cel mult egală cu 3×10^{-3}, putem scrie

$$\mathrm{e}^{-\alpha x} = 1 - 0{,}9664\,\alpha x + 0{,}3536\,\alpha^2 x^2 \tag{70}$$

și prin urmare formula (69) devine

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{1{,}9328\,\pi R V_0}{Q_0}\,x + \frac{0{,}7072\,\pi R V_0 \alpha}{Q_0}\,x^2, \tag{71}$$

primii doi termeni din membrul drept diferind foarte puțin de aceia corespunzători din (68). Deosebirea între valorile raportului calculate cu ajutorul celor două formule ar putea fi pusă în evidență numai prin compararea ultimilor termeni din membrul drept. Din motive evidente, acest lucru nu poate fi realizat ; semnalăm numai faptul că în formula (68) apare în membrul drept un termen care nu mai conține pe Q_0, dacă înlocuim pe $u_m(0)$ în funcție de acest debit inițial.

4. CONCLUZII

Din studiul pe care l-am efectuat, rezultă că viteza de filtrare într-un tub cu pereți permeabili depinde de căderea de presiune care se produce. Variația vitezei de filtrare este cu atît mai redusă cu cît această cădere de presiune este mai mică. Invers, dacă presiunea scade mai repede, ceea ce se întîmplă la tuburi cu secțiunea transversală foarte mică, viteza de filtrare scade rapid în lungul tubului.

De asemenea, datorită filtrării prin peretele tubului, căderea de presiune este mai mică decît la un tub impermeabil, în care viteza medie este egală cu aceea din secțiunea inițială a tubului permeabil.

Primită la redacție la 25 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Kozinski, F. P. Schmidt, E. N. Lightfoot, *Velocity Profiles in Porous — Walled Ducts*, Ind. Eng. Chem. Fundament., **9**, *3* (1970).
2. M. E. O'Neill, *The resistance to steady parallel viscous flows produced by small scale boundary irregularities*, Chem. Eng. Science, **25** (1970).
3. T. Oroveanu și Al. D. Stan, *Mișcarea lentă a unui fluid incompresibil printr-o fisură permeabilă*, Stud. cerc. mec. apl., **37**, *1* (1978).
4. I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Mc.Graw-Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 23—29.

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATRICEALĂ A DINAMICII CONEXIUNILOR DE MOTOARE HIDRAULICE ROTATIVE

de FLORIN IONESCU

Institutul politehnic București

Pornind de la prezentarea motorului hidraulic rotativ cu capacitate constantă ca pe un element cvadripolar caracterizat de variabilele de mișcare și de efort, hidraulice și mecanice, lucrarea prezintă pe baza matricelor caracteristice ale motorului și ale legăturilor sale vîscoelastice cu celelalte elemente ale lanțurilor cinematice, avantajele utilizării teoriei cvadripolilor la analiza conexiunilor de motoare hidraulice rotative.
Cu unele ipoteze simplificatoare sînt determinate și prezentate matricele caracteristice ale conexiunilor : paralel, serie, serie-paralel paralel-serie, precum și principalele concluzii de ordin teoretic și practic ce decurg din analiza acestor matrice.

1. INTRODUCERE

Analiza unei instalații de acționare hidraulică constă în a stabili pe cale teoretică și experimentală evoluția în timp și în frecvență a mărimilor mecanice de mișcare, v, ω, și de efort, F, M, realizate de instalație, precum și a mărimilor hidraulice corespunzătoare, Q, p, în punctele de interes ; o categorie aparte de caracteristici o formează și corelația dintre aceste mărimi. Studiul experimental se face în condiții reale de regim staționar sau tranzitoriu în care lucrează instalația, iar cel teoretic în condiții cît mai apropiate posibil de acestea.

Numeroase elemente componente ale instalațiilor hidraulice de acționare, spre deosebire de cele din domeniul electronic, funcționează în regim de putere ridicată fiind prin urmare elemente de putere. Elementele vehiculează între ele informații de un nivel energetic ridicat, fapt care le conferă, din acest punct de vedere un caracter mai complex, funcționarea lor fiind descrisă de o pereche de mărimi de intrare și o pereche de mărimi de ieșire legate între ele printr-un sistem de ecuații ce poate fi transpus într-o matrice caracteristică sub forma [5,10] :

$$\begin{Vmatrix} V_{Mi} \\ V_{Ei} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} V_{Me} \\ V_{Ee} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

în relație s-au notat prin : $V_{Mi,e}$ variabilele de mișcare de intrare i și de ieșire e, ce pot fi v, ω, Q ; $V_{Ei,e}$ variabilele de efort de intrare, respectiv de ieșire, F, M, p ; A_{ij} termenii matricei caracteristice $\| A \|$, formați din constante, expresii algebrice, derivate de diferite ordine ale variabilelor etc.

Sînt unele elemente ale instalațiilor hidraulice, cum ar fi pompele cu debit reglabil, de exemplu, a căror funcționare este descrisă de încă o pereche de mărimi, forța de comandă și parametrul reglabil fapt care le atribuie caracteristica de sexapoli. În figura 1 sînt reprezentate cele trei

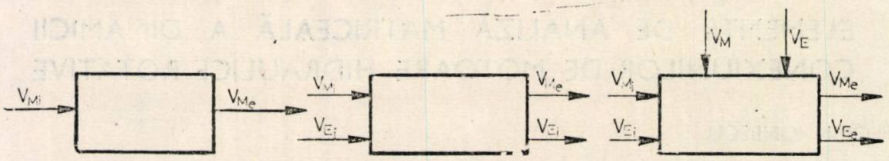


Fig. 1

modalități de reprezentare bipolare, cvadripolare și sexapolare ale elementelor instalațiilor hidraulice.

Ținînd seama de caracterul complex pe care îl au, elementele și instalațiile hidraulice de acționare, trebuie privite ca sisteme multivariabile, pentru studiul lor fiind valabile metode specifice de studiu [2].

Atît în cadrul dipolului, cît și al celorlalte, transformata Laplace se poate utiliza doar în situația în care ecuațiile matematice care le descriu funcționarea sînt liniare cu parametri constanți, ceea ce înseamnă de fapt că elementele sistemului nu conțin nelinearități, iar dacă există sînt neesențiale, nu conțin generatori sau consumatori de energie și au parametrii concentrați. Cum funcționarea reală este însoțită însă și de astfel de neconcordanțe, în studiu se introduc unele ipoteze simplificatoare neconforme cu realitatea, dar dacă simplificările respective nu alterează mult calitativ și cantitativ, rezultatele sînt considerate eficace.

Matricea $\| A \| = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$, caracteristică a cvadripolului liniar, care definește comportarea intrării față de ieșire (matrice inversă de transfer), servește la studiul cvadripolilor legați de lanț. Ținînd însă seama de faptul că elementele de putere pot fi legate mult mai divers decît dipolii pe lîngă matricea caracteristică $\| A \|$ sînt utilizate frecvent în analiză și matricele de altă formă cum sînt [3]:

— matricea admitantă $\| D \|$, matricea impedantă $\| Z \|$, matricea serie-paralel $\| H \|$, matricea paralel-serie $\| F \|$, matrice care sînt definite în [3] și care au fost folosite în acest studiu.

Folosirea matricelor caracteristice în analiza comportării dinamice a cvadripolilor hidraulici este mai puțin cunoscută și se recomandă din următoarele puncte de vedere:

— permite studiul cvadripolilor legați în cascadă sau mixt;
— pune mai bine în evidență canalele pe care circulă informațiile de tip mișcare și efort între elementele instalației;
— facilitează studiul numeric pe calculatoarele numerice;

— sistemele mai complexe pot fi descompuse în elemente simple de tip elasticitate, frecare, element motor, care servesc mai apoi la determinarea matricei sistemului.

2. MOTORUL HIDRAULIC ROTATIV CA ELEMENT CVADRIPOLAR

În [5] sînt prezentate ca avînd caracter generalizator, două tipuri de instalaţii structural-funcţionale distincte, instalaţii de bază în sistemele de acţionare hidraulică şi anume :

— instalaţii cu funcţionare la presiune constantă ;

— instalaţii cu funcţionare la presiune variabilă.

Corespunzător acestor două moduri de lucru, informaţiile şi energia vehiculate între elemente au sensuri specifice de circulaţie şi implică aceeaşi optică şi, desigur, reprezentare şi pentru elementele hidraulice.

Ţinînd seama de cele arătate mai sus, motorul hidraulic cu capacitate constantă are simbolic, reprezentările corespunzătoare din figura 2,

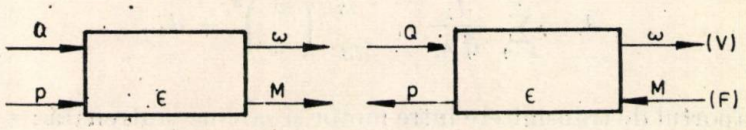


Fig. 2

unde se evidenţiază cele două canale de informaţii şi energie. Transpusă matriceal, funcţionarea motorului are expresia (2)

$$\left\| \begin{matrix} Q \\ p \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \omega \\ M \end{matrix} \right\|. \tag{2}$$

În vederea precizării termenilor A_{ij} ai matricei caracteristice, considerăm binevenită o scurtă analiză a unor lucrări mai reprezentative apărute în literatura de specialitate.

În [7], Kopacek analizează proprietăţile dinamice ale motoarelor hidraulice rotative introducînd în criteriile de apreciere a proprietăţilor dinamice definite de el parametrii de natură mecanică : M, J, ε, ω. Criteriile, considerînd motorul hidraulic un element de ordinul întîi, determinate pe baza acceleraţiei unghiulare, sînt utile pentru o apreciere primară şi comparativă a motoarelor, dar sînt incomplete întrucît consideră motorul hidraulic perfect şi prin urmare nu pun în evidenţă şi mărimile hidraulice debit, presiune, amortizări etc.

Drazdil în [4], Oprean în [8], precum şi Ionescu în [5] şi [6], evidenţiază matematic ansamblul legăturilor hidromecanice şi se poate afirma că

modelul matematic (3) este relativ complet și poate constitui o bază în studiile de analiză,

$$Q = \omega \frac{V}{2\pi} + \frac{\partial Q}{\partial p} p + \frac{V'}{\beta} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

$$p \frac{V}{2\pi} = M + J_r \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} + b\omega + p_2 \frac{V}{2\pi}. \tag{3}$$

În (3) s-au notat prin $Q(\mathrm{m^3 s^{-1}})$ debitul de intrare în motor ; $\omega(\mathrm{s^{-1}})$ — viteza unghiulară de rotație ; $V(\mathrm{m^3})$ — capacitatea motorului ; $p(\mathrm{Nm^{-2}})$ — presiunea uleiului din motor ; $V'(\mathrm{m^{-3}})$volumul de fluid aflat sub presiune pe aspirația motorului ; $\beta(\mathrm{Nm^{-2}})$ — modulul de elasticitate al fluidului ; $J_r(\mathrm{Nms^2})$ — momentul de inerție al motorului (J_M) și în anumite situații al întregii instalații redus la arborele motor conform relației :

$$J_r = \sum_{k=0}^{n} \frac{J_k}{i_k^2 \eta_k} + \frac{m}{\eta_j} \left(\frac{v}{\omega} \right)^2 + J_M, \tag{I}$$

i_k este raportul de transmitere între motor și sarcina antrenată ; $\eta_{k,j}$ — randamentul elementelor de transmitere k, j ; $m(\mathrm{kg})$ — masa aflată în mișcare de translație cu viteza $v(\mathrm{ms^{-1}})$; $b\,(\mathrm{Nms})$ — coeficientul liniarizat al pierderilor de cuplu sau gradient static de cuplu ; $\partial Q/\partial p\ (\mathrm{N^{-1}m^5})$ — coeficientul liniarizat al pierderilor de debit sau gradient static de debit ; $M(\mathrm{Nm})$ — — cuplu rezistent la arborele motor sau redus la acesta cu relația cunoscută ;

$$M = M_r \prod_{k=1}^{n-1} i_k \eta_k + F \left(\frac{v}{\omega} \right) \prod_{1}^{n-1} i_k, \tag{II}$$

$J_k\ (\mathrm{Nms^2})$ — masa inerțială aflată în raport i_k față de motor ; $F(N)$ — forța rezistentă în mișcarea de translație.

În figurile 3*a* și *b*, sînt reprezentate modelele fizice ale celor două tipuri de acționări.

Trecerea sistemului (3) sub formă matriceală (2) conduce la matricea caracteristică (4),

$$\| A \| = \begin{Vmatrix} \dfrac{V}{2\pi} & \dfrac{\partial Q}{\partial p} \dfrac{2\pi}{V} \\ \dfrac{2\pi}{V} (Js + b) & \dfrac{2\pi}{V} \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

în care au fost operate unele simplificări neesențiale pentru scopul acestei lucrări și anume :

– presiunea care operează asupra gradientului de pierderi a fost transpusă prin cuplul în regim staționar ;

– a fost neglijat efectul compresibilității fluidului, termenul $(V'/\beta)\ (dp/dt)$ devenind astfel nul.

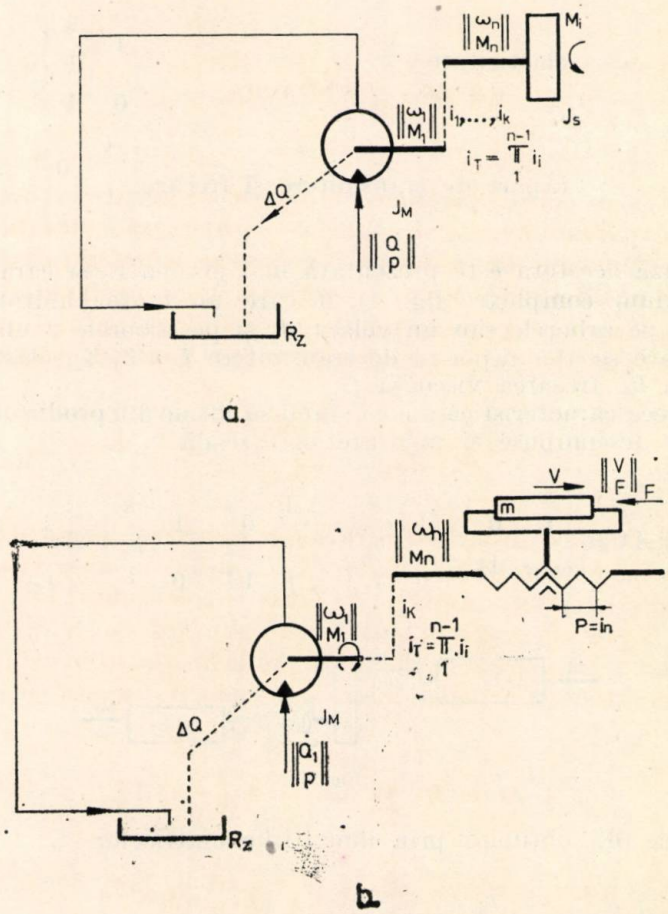


Fig. 3

3. TRANSPUNEREA MATRICEALĂ A CELORLALTE ELEMENTE DIN LANȚURILE CINEMATICE

Între motor și organul de lucru antrenat în mișcare de translație sau de rotație se găsesc unul sau mai multe mecanisme caracterizate prin inerție, constantă de elasticitate, frecare, raport de transmitere etc. ; aceste caracteristici pot fi separate, scrierea matriceală permițînd a le considera ca aparținînd unor elemente fictive, individuale, distincte montate în cascadă. În aceste condiții, matricea unui ansamblu de maricet caracteristice este produsul acestora.

Prezentăm pe scurt matricele caracteristice ale unor mecanisme din lanțurile cinematice ale mișcării de rotație cu proprietăți mecanice individualizate.

— masa inerțială $\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ Js & 1 \end{Vmatrix}$,

— elasticitate $\begin{Vmatrix} 1 & \frac{s}{k} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$,

— raport de transmitere și frecare $\begin{Vmatrix} \frac{1}{i} & 0 \\ f & i \end{Vmatrix}$.

Pe baza acestora este prezentată mai jos matricea caracteristică a unei conexiuni complexe (fig. 4), în care un motor hidraulic rotativ antrenează pe arborele său un volant J_1 și pe arborele 2 un alt volant J_2, între care se află raportul de transmitere $i = Z_1/Z_2$, elasticitățile de torsiune k_1, k_2, frecarea vîscoasă f.

Matricea caracteristică a conexiunii se obține din produsul matricelor individuale descompuse și montate în cascadă

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ J_1 s & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \frac{s}{k_1} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{i} & 0 \\ f & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & \frac{s}{k_2} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ J_2 s & 1 \end{Vmatrix} \tag{5}$$

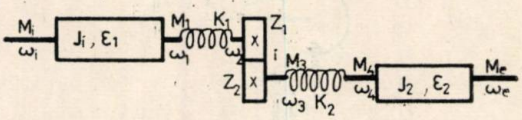


Fig. 4

și are forma (6), obținută prin înmulțirile matricelor :

$$\begin{Vmatrix} \frac{J_2 f}{K_1 K_2} s^3 + \left(\frac{J_2}{k_1} i + \frac{J_2}{k_2 i} \right) s^2 + \frac{f}{k_1} s + \frac{1}{i} \\ \frac{J_1 J_2}{k_1 k_2} f s^4 + \left(\frac{J_1 J_2}{k_1} i + \frac{J_1 J_2}{k_2 i} s^3 + \left(\frac{J_1 f}{k_1} + \frac{J_2 f}{k_2} \right) s^2 + \left(\frac{J_1}{i} + J_2 i \right) s + f \right. \\ \frac{f}{k_1 k_2} s^2 + \left(\frac{i}{k_1} + \frac{i}{k_2} \right) s \\ \left. \frac{J_1}{k_1 k_2} f s^3 + \left(\frac{J_1}{k_2 i} + \frac{J_1}{k_1} i \right) s^2 + \frac{f}{k} s + i \right\| \end{Vmatrix} . \tag{6}$$

În rezolvarea acestei matrice se aplică metodele de reducere sau se operează de la caz la caz, simplificări justificate. Este de notat că gradul în s al ecuațiilor crește cu creșterea numărului de grade de libertate ale sistemului.

Procedînd în modul descris mai sus pe baza matricelor caracteristice ale tuturor elementelor, motor, vîscoelastice etc., poate fi analizată orice instalație hidraulică de acționare.

4. ANALIZA CONEXIUNILOR DE MOTOARE HIDRAULICE ROTATIVE

Motoarele hidraulice sînt cvadripoli cu impedanță la ieșire egală cu impedanța iterativă a cvadripolului, unde impedanța iterativă Z_0 are expresia

$$Z_0 = \frac{A_{11} - A_{12} \pm \sqrt{(A_{11} - A_{12})^2 + 4A_{12}A_{21}}}{2A_{21}} \tag{7}$$

și în consecință egală cu impedanța de intrare $Z_i = Z_e = Z_0$; în această condiție legătura energetică dintre intrare și ieșire există și motoarele sînt abordabile ca cvadripoli [3].

Două sau mai multe motoare hidraulice-cvadripoli pot fi conexate în paralel, în serie, în serie-paralel sau în paralel-serie după modul în care sub aspect fizic și constructiv sînt corelate între ele mărimile hidraulice și mecanice; aceste conexiuni se fac în scopul de a amplifica mărimile mecanice de ieșire folosind aceleași mărimi hidraulice de intrare, de a îmbunătăți caracteristicile tranzitorii sau staționare ale instalațiilor acționate.

Studiul conexiunilor cu motoare hidraulice se face în ipoteza că prin funcționare nu se schimbă funcționarea internă a fiecăruia dintre motoare, condiție de validitate fizică valabilă pentru cvadripolii legați în lanț [3].

Pentru simplificarea calculelor în aplicațiile care urmează vom neglija ca fiind neesențiale pentru scopul lucrării, proprietățile vîscoelastice ale părților mecanice, proprietăți care pot fi luate în considerație în cazul unui studiu aprofundat.

a. MOTOARE HIDRAULICE CONEXATE ÎN PARALEL

Fie două motoare hidraulice identice montate în paralel ca în figura 5*a* și matriceal ca în figura 5*b*.

Matricea admitanță $\| D \|$ a conexiunii este egală cu suma matricelor admitanță $\| D_i \|$ a fiecărui motor și egală cu

$$\| D \| = 2 \| D_i \|.$$

Matricea caracteristică $\| A \|_p$ a conexiunii se obține cu relația

$$\| A \|_p = \frac{1}{D_{21}} \begin{Vmatrix} -D_{22} & 1 \\ -|D| & D_n \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

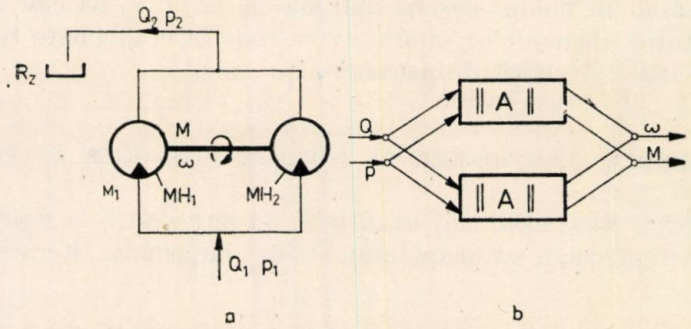


Fig. 5

După calcule intermediare se obține matricea conexiunii paralel de forma

$$\| A \|_p = \begin{Vmatrix} A_{11} & \frac{A_{12}}{2} \\ 2A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{V}{2\pi} & \frac{1}{2}\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{2\pi}{V} \\ 2\cdot\frac{2\pi}{V}(Js+b) & \frac{2\pi}{V} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Din analiza matriceală a conexiunii se observă că față de acționarea cu un singur motor, montajul asigură un moment motor dublu, dar o viteză unghiulară redusă la jumătate. Mai rezultă din analiza matricei caracteristice a conexiunii că montajul realizează o dublare a rezistențelor pasive și o reducere la jumătate a pierderilor de debit interioare, ceea ce implică o reducere a amortizărilor.

b. MOTOARE HIDRAULICE CONECTATE ÎN SERIE

În figura 6 sînt prezentate schema fizică a montajului și schema bloc ; aici însumarea turațiilor celor două motoare se face prin intermediul diferențialului.

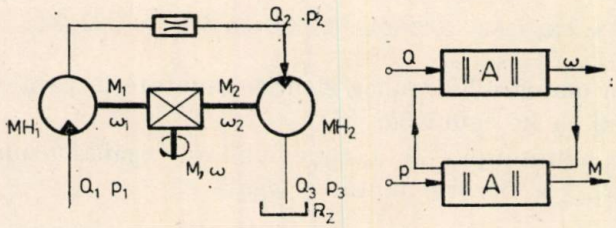


Fig. 6

Matricea caracteristică $\| A \|_s$ se obține din matricea impedanță $\| Z \|$ a conexiunii :

$$\| A \|_s = \frac{1}{Z_{21}} \begin{vmatrix} Z_{11} & -|Z| \\ 1 & -Z_{22} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

La rîndul său matricea impedanță este suma matricelor impedanță ale celor două motoare-cvadripoli $\| Z \| = 2 \| Z_i \|$. Procedînd în acest mod și folosind relația de legătură dintre matricea impedanță și matricea caracteristică a unui element de forma

$$\| Z_i \| = \frac{1}{A_{21}} \begin{vmatrix} A_{11} & -|A| \\ 1 & -A_{22} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

se obține matricea caracteristică a conexiunii care are expresia finală :

$$\| A \|_s = \begin{vmatrix} A_{11} & 2A_{12} \\ \frac{A_{21}}{2} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{V}{2\pi} & 2\frac{\partial Q}{\partial p}\frac{2\pi}{V} \\ \frac{1}{2}\frac{2\pi}{V}(J s + b) & \frac{2\pi}{V} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Din analiza acestei relații rezultă că față de acționarea cu un singur motor, montajul asigură o viteză unghiulară $\omega = 2\omega_1$, dublă și un cuplu egal. Se constată totodată o reducere la jumătate a rezistențelor pasive și o dublare a pierderilor de debit, respectiv o îmbunătățire a amortizărilor și reducerea riscului de rezonanță.

c. MOTOARE HIDRAULICE CONECTATE ÎN PARALEL-SERIE

Matricea paralel-serie a conexiunii $\| F \|$ ale cărei scheme de principiu și bloc sînt date în figura 7, este suma matricelor paralel-serie a cvadripolilor elementari, obținîndu-se succesiv :

$$\| F_i \| = \frac{1}{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{21} & |A| \\ 1 & -A_{12} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

$$\| F \| = 2 \| F_i \| = \frac{2}{A_{11}} \begin{vmatrix} A_{21} & |A| \\ 1 & -A_{12} \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Matricea caracteristică $\| A \|_{ps}$ a conexiunii se determină din matricea paralel-serie a conexiunii cu relația

$$\| A \|_{ps} = -\frac{1}{F_{21}} \begin{vmatrix} 1 & -F_{22} \\ F_{11} & -|F| \end{vmatrix} \tag{15}$$

și duce la

$$\|A\|_{ps} = \begin{Vmatrix} \frac{A_{11}}{2} & A_{12} \\ A_{21} & 2A_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{V}{\Sigma\pi} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\Sigma\pi}{V} \\ \frac{\Sigma\pi}{V}(Js+b) & 2\frac{2\pi}{V} \end{Vmatrix}. \tag{16}$$

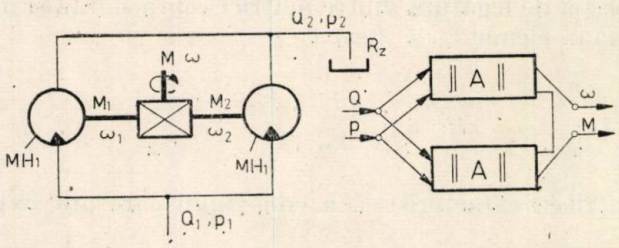


Fig. 7.

Din analiza bilanțului energetic și a matricei rezultă că montajul paralel-serie asigură o viteză unghiulară de rotație și un cuplu egal cu mărimile obținute în acționarea cu un singur motor, și prin urmare un asemenea montaj nu este justificat din punct de vedere practic.

d. MOTOARE HIDRAULICE CONECTATE ÎN SERIE-PARALEL

În figura 8 este reprezentată schema simplificată a montajului și schema bloc.

Matricea serie-paralel $\|H\|$ a conexiunii este suma matricelor serie-paralel ale fiecărui motor conform relației

$$\|H\| = 2\|H_i\| = \frac{2}{A_{22}} \begin{Vmatrix} A_{12} & |A| \\ 1 & -A_{21} \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

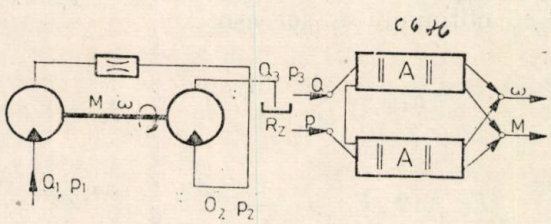


Fig. 8

Matricea caracteristică a montajului $\|A\|_{sp}$ se obține din $\|H\|$ cu relația

$$\|A\|_{sp} = \frac{1}{H_{21}} \begin{Vmatrix} -|H| & H_{11} \\ -H_{22} & 1 \end{Vmatrix} \tag{18}$$

și expresia

$$\| A \|_{sp} = \begin{Vmatrix} 2A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & \dfrac{A_{22}}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2\dfrac{V}{2\pi} & \dfrac{\partial Q}{\partial p}\dfrac{2\pi}{V} \\ \dfrac{2\pi}{V}(Js+b) & \dfrac{1}{2}\dfrac{2\pi}{V} \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Față de acționarea cu un singur motor, montajul asigură un cuplu de două ori mai mare, dar o viteză unghiulară egală ; se dublează volumul de fluid aflat sub presiune, ceea ce crește pericolul instabilității instalației.

5. CONCLUZII

Lucrarea evidențiază utilitatea studiului motoarelor hidraulice ca elemente multivariabile. În condițiile de validitate aplicabile la conexiunile în lanț, studiul acestor conexiuni se poate realiza ușor cu ajutorul teoriei cvadripolilor, care permite inserarea în calcul și a caracteristicilor vîscoelastice ale elementelor de legătură dintre motoare. În acest sens lucrarea prezintă cîteva indicații și exemple utile care pot servi drept bază în cercetarea mai aprofundată a instalațiilor hidraulice de acționare pe bazele noi ale teoriei cvadripolilor.

Din analiza matricelor caracteristice obținute pot fi extrase, pe lîngă concluziile prezentate, și concluzii de ordin practic necesare în proiectarea modernă a acționărilor respective atît în regim staționar, cît și în regim tranzitoriu sau asupra stabilității și amortizări în instalație cu conexiuni de motoare hidraulice rotative.

Prin introducerea în matricea caracteristică (4) a celorlalte mărimi la care s-a renunțat în studiul de față din rațiuni de ordin practic, fidelitatea studiului, calitatea și cantitatea concluziilor extrase din aceasta pot fi îmbunătățite.

Prin reprezentarea cvadripolară a elementelor instalațiilor hidraulice de acționare se deschide perspectiva studiilor de sinteză a acestora pe baza acordării statice (de transfer maxim de energie) și dinamice (compatibilitate dinamică) între elementele de execuție și organul de lucru acționat.

Primită la redacție la 24 mai 1978

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Bălan, *Lecții complementare de mecanică teoretică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1969.
2. S. Călin, I. Dumitrache, P. Dimo, *Automatizări electronice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.
3. V. Crăciunoiu, C. Ilie, A. Chiriac, *Elemente de execuție*, Edit. tehnică, București, 1970.
4. M. Drazdil, *Über das dynamische Verhalten von Rotationshydromotoren bei Steuerung durch Strom und Drück*, Ölhydraulick und Pneumati **14**, *1* (1970).

5. Fl. Ionescu, D. Catrina, Al. Dorin, *Mecanica fluidelor şi acţionări hidraulice şi pneumatice*, Edit. I.P.B., 1978.
6. Fl. Ionescu, *Elemente de dinamica motoarelor cu pistonaşe axiale folosite în acţionarea hidrostatică a maşinilor unelte*, Buletinul I.P.B., **XXXIX**, *2* ser. mec. (1977).
7. I. Kopacek, *Dynamische Eingeschaften hydraulischer Antriebe*, Ölhydraulick und Pneumatik, **11**, *10* (1972).
8. A. Oprean, Fl. Ionescu, *Analiza unor parametri funcţionali ai motoarelor hidraulice rotative în regim dinamic prin modelare pe calculator*, St. cerc. mec. apl., **32**, *3* (1973).
9. A. Oprean, Fl. Ionescu, L. Măsălar, M. Dobre, *Studiul dinamicii motoarelor hidraulice rotative*, St. cerc. mec. apl., **31**, *2* (1972).
10. N. K. Reid, *Mathematical modeling in the design of fluid power systems*, Fluid power control I, Fall, 1971, MAE 5453.

CARACTERIZAREA ÎN DOMENIUL FRECVENȚEI A SISTEMELOR LINIARE CONTINUE, INVARIANTE ÎN TIMP, CU FUNCȚII INDICIALE DE TIP EXPONENȚIAL-POLINOMIAL

de V. CÎRTOAJE

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

Lucrarea fundamentează într-o manieră de sine stătătoare care sugerează totuși posibilitatea aplicării calculului operațional (a transformatei Fourier), corelațiile existente între domeniul frecvenței și domeniul timpului la o anumită clasă de sisteme liniare continue și invariante în timp.
Datorită componentei polinomiale, clasa funcțiilor de tip exponențial-polinomial luate în considerație în prezenta lucrare nu admite transformate Fourier. Totuși, caracterizarea în domeniul frecvenței a sistemelor cu funcții indiciale de tip exponențial-polinomial s-a putut face printr-o definire adecvată a funcțiilor de frecvență, pe baza răspunsului în regim permanent a sistemului la intrare sinusoidală.
Sînt prezentate în continuare metodologia de determinare experimentală a funcțiilor de frecvență, proprietățile principale ale acestora, relațiile de obținere a funcției indiciale din funcțiile de frecvență și o importantă teoremă care exprimă condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile de frecvență pentru ca acestea să corespundă unor sisteme cu funcție indicială de tip exponențial-polinomial.
În încheiere, sînt tratate sistemele în conexiune serie și cu reacție.

1. RELAȚII DE CONVOLUȚIE INTRARE-IEȘIRE

Pentru un sistem liniar cu intrarea x, ieșirea y și funcția indicială $a(t)$ integrabilă (în sens Riemann) pe $[0, \infty)$, aflat pînă în momentul $t = 0$ într-un regim staționar, caracterizat prin $x(t) = y(t) = 0$ pentru $t < 0$, se poate calcula semnalul de ieșire $y(t)$ pentru orice semnal de intrare $x(t)$ derivabil pe $(0, t]$, cu $x(0) = \frac{1}{2}\, x(0+)$ și cu derivata $x'(t)$ integrabilă pe $[0, t]$, cu relația *)

$$y(t) = \begin{cases} a(0)x(0+), & t = 0, \\ a(t)\,x(0+) + \int_0^t a(t-\theta)x'(\theta)\,\mathrm{d}\theta, & t > 0. \end{cases} \tag{1}$$

*) Pe parcursul întregii lucrări, toate integralele vor fi luate în accepțiunea de mai jos:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+}^{b-} f(x)\mathrm{d}x, \quad a<b.$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 1, 1979, P. 53–74

Plecînd de la definiția funcției indiciale, ca răspuns al sistemului aflat în condiții inițiale nule, atunci cînd la momentul $t = 0$ se aplică la intrare un semnal de tip treaptă unitară :

$$H(t) = \begin{cases} 0 \ , & t < 0, \\ 0{,}5, & t = 0, \\ 1 \ , & t > 0, \end{cases}$$

relația (1) se deduce ușor pe baza proprietății de superpoziție a sistemelor liniare (fig. 1) :

$$y(t) = a(t)x(0+) + \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\Delta = t}} \sum_{k=1}^{n} a(t - k\Delta)\,[x(k\Delta) - x((k-1)\Delta)].$$

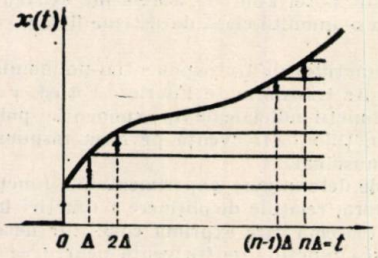


Fig. 1. — Semnal de intrare aproximat prin semnale de tip treaptă, decalate în timp.

Prin schimbarea variabilei de integrare, relația (1) se aduce la forma :

$$y(t) = a(t)x(0+) + \int_0^t a(\theta)\,x'(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta, \quad t > 0. \tag{1'}$$

Se poate dovedi ușor că atunci cînd $x(t)$ nu este derivabilă pe $(0, t]$, dar există o diviziune a intervalului $[0, t]$:

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_s = t,$$

astfel încît $x(t)$ să fie derivabilă pe fiecare interval (θ_{k-1}, θ_k), să aibă derivata $x'(t)$ integrabilă pe $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, iar în fiecare punct θ_k să aibă limite laterale finite și valoarea egală cu semisuma limitelor laterale, mărimea de ieșire $y(t)$ este dată de relația

$$y(t) = \sum_{k=0}^{s} [x(\theta_k+) - x(\theta_k-)]a(t-\theta_k) + \int_0^t a(t-\theta)x'(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \quad t > 0, \tag{1''}$$

unde

$$\int_0^t a(t-\theta)x'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=1}^{s} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} a(t-\theta)x'(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Dacă, în plus, $a(t)$ este derivabilă pe $(0, t]$ și are derivata $a'(t)$ integrabilă pe $[0, t]$, avem

$$y(t) = a(0)\,[x(t+) - x(t-)] + a(0+)x(t-) + \int_0^t a'(t-\theta)\,x(\theta)\,d\theta, \quad t>0. \tag{1'''}$$

2. CLASA SISTEMELOR CU FUNCȚII INDICIALE DE TIP EXPONENȚIAL-POLINOMIAL

Această clasă, numită în cele ce urmează clasa sistemelor de tip EP, se caracterizează prin proprietatea de decompozabilitate a fiecărui sistem A cu funcția indicială $a(t)$, în două subsisteme B și C conectate în paralel (fig. 2), primul cu funcția indicială $b(t)$ de tip polinomial :

$$b(t) = \begin{cases} 0{,}5\ b_0 & , \ t = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{m} b_{m-i}\, t^{m-i}, & t>0, \end{cases} \tag{2}$$

iar al doilea, cu funcția indicială $c(t)$ de tip „exponențial",

$$\lim_{t\to\infty} t^r\, c^{(p)}\ (t) = 0 \qquad (r,\ p = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

derivabilă de un număr nelimitat de ori pe fiecare interval (t_{k-1}, t_k), unde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \infty$ și având în fiecare punct t_k valoarea egală cu semisuma limitelor laterale, iar limitele laterale ale ei și ale derivatelor ei, finite.

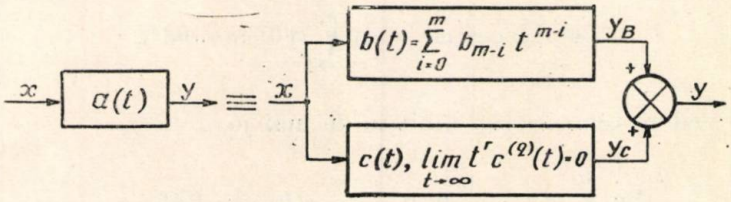


Fig. 2. — Decompozabilitatea unui sistem de tip EP după funcția indicială.

Operația de decompozabilitate se poate efectua simplu, pe baza relațiilor de mai jos, în ordinea scrierii lor :

$$\begin{aligned} b_m &= \lim_{t\to\infty} \frac{a(t)}{t^m}, \\ b_{m-i} &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{m-i}} \left[a(t) - \sum_{l=0}^{i-1} b_{m-l}\, t^{m-l} \right], \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m, \\ b(t) &= \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\ t^{m-i}, \\ c(t) &= a(t) - b(t). \end{aligned} \tag{4}$$

3. DETERMINAREA FUNCȚIILOR DE FRECVENȚĂ DIN FUNCȚIA INDICIALĂ

Să presupunem că la intrarea sistemului A se aplică un semnal care conține componenta sinusoidală :

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Cu ajutorul relației (1'), putem afla răspunsurile subsistemelor B și C corespunzătoare acestei componente sinusoidale de intrare :

$$y_B(t) = -A \sum_{i=0}^{m-1} (m-i)!\, b_{m-i} \sum_{k=1}^{m-i} \frac{(-1)^k t^{m-i-k}}{(m-i-k)!\omega^k} \sin\left(\varphi + \frac{k\pi}{2}\right) +$$

$$+ A \sin(\omega t + \varphi) \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \cos\frac{(m-i)\pi}{2} -$$

$$- A \cos(\omega t + \varphi) \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \sin\frac{(m-i)\pi}{2},$$

$$y_c(t) = A \sin\varphi\, c(t) + A\omega \int_0^t c(\theta) \cos[\omega(t-\theta) + \varphi]\mathrm{d}\theta =$$

$$= A \sin\varphi\, c(t) + A\omega \sin(\omega t + \varphi) \int_0^t c(\theta) \sin\omega\theta \mathrm{d}\theta +$$

$$+ A\omega \cos(\omega t + \varphi) \int_0^t c(\theta) \cos\omega\theta \mathrm{d}\theta.$$

Avînd în vedere relațiile (3), limitele de mai jos,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t c(\theta) \sin\omega\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^\infty c(\theta) \sin\omega\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t c(\theta) \cos\omega\theta\, \mathrm{d}\theta = \int_0^\infty c(\theta) \cos\omega\theta\, \mathrm{d}\theta,$$

există și sînt finite. Prin urmare, în regim permanent, semnalul de ieșire din sistem conține componenta sinusoidală :

$$y(t) = A\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \cos\frac{(m-i)\pi}{2} + \omega\int_0^\infty c(\theta) \sin\omega\theta \mathrm{d}\theta\right] \sin(\omega t + \varphi)$$

$$+ A\left[-\sum_{i=1}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \sin\frac{(m-i)\pi}{2} + \omega\int_0^\infty c(\theta) \cos\omega\theta\, \mathrm{d}\theta\right] \cos(\omega t + \varphi),$$

pe baza căreia se definesc funcţiile reale de frecvenţă :

$$U(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \cos \frac{(m-i)\pi}{2} + \omega \int_0^{\infty} c(\theta) \sin \omega\theta \, d\theta, \quad (5)$$

$$V(\omega) = -\sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \sin \frac{(m-i)\pi}{2} + \omega \int_0^{\infty} c(\theta) \cos \omega\theta \, d\theta, \quad (6)$$

şi funcţia complexă de frecvenţă :

$$F(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{(j\omega)^{m-i}} + j\omega \int_0^{\infty} c(\theta)\, e^{-j\omega\theta} \, d\theta. \quad (7)$$

Din expresia componentei sinusoidale a semnalului de ieşire $y_B(t)$ în regim permanent, se obţin funcţiile de frecvenţă ale subsistemului B :

$$U_B(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \cos \frac{(m-i)\pi}{2}, \quad (8)$$

$$V_B(\omega) = -\sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \sin \frac{(m-i)\pi}{2}, \quad (9)$$

$$F_B(j\omega) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{(j\omega)^{m-i}}, \quad (10)$$

iar din expresia componentei sinusoidale a semnalului de ieşire $y_C(t)$ în regim permanent, se obţin funcţiile de frecvenţă ale subsistemului C :

$$U_C(\omega) = \omega \int_0^{\infty} c(\theta) \sin \omega\theta \, d\theta, \quad (11)$$

$$V_C(\omega) = \omega \int_0^{\infty} c(\theta) \cos \omega\theta \, d\theta, \quad (12)$$

$$F_C(j\omega) = j\omega \int_0^{\infty} c(\theta)\, e^{-j\omega\theta} \, d\theta. \quad (13)$$

Observaţii.

a) Plecînd de la funcţia indicială a sistemului A :

$$a(t) = \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\, t^{m-i} + c(t),$$

se găsește pentru funcția de transfer următoarea expresie :

$$F(s) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{s^{m-i}} + s \int_0^{\infty} c(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Relația (7) dovedește că la sistemele de tip EP, funcția complexă de frecvență poate fi obținută direct din funcția de transfer, prin înlocuirea variabilei complexe s cu variabila imaginară $j\omega$.

b) Funcția complexă de frecvență $F(j\omega)$ a unui sistem de tip EP poate fi definită elegant, ca fiind raportul dintre reprezentarea în complex $Y(t)$ a componentei sinusoidale $y(t)$ de la ieșirea sistemului (aflat în regim permanent) și reprezentarea în complex $X(t)$ a componentei sinusoidale $x(t)$ de la intrare. Într-adevăr,

$$X(t) = A\, e^{j(\omega t+\varphi)},$$

$$Y(t) = AU(\omega)\, e^{j(\omega t+\varphi)} + AV(\omega)\, e^{j\left(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} = Ae^{j(\omega t+\varphi)}\,[U(\omega) + jV(\omega)]$$

și deci

$$\frac{Y(t)}{X(t)} = U(\omega) + jV(\omega) = F(j\omega). \tag{14}$$

4. DECOMPOZABILITATEA SISTEMELOR DE TIP EP DUPĂ FUNCȚIILE DE FRECVENȚĂ

Ținînd seama de relațiile (7), (10) și (13), de compozabilitatea unui sistem A cu funcția complexă de frecvență $F(j\omega)$ în cele două subsisteme B și C, se face cu ajutorul relațiilor :

$$b_m = \frac{1}{m!} \lim_{\omega\to 0} (j\omega)^m F(j\omega),$$

$$b_{m-i} = \frac{1}{(m-i)!} \lim_{\omega\to 0} \left[(j\omega)^{m-i} F(j\omega) - \sum_{l=0}^{i-1} \frac{(m-l)!\, b_{m-l}}{(j\omega)^{i-l}} \right], \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$F_B(j\omega) = \sum_{t=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{(j\omega)^{m-i}}, \tag{15}$$

$$F_C(j\omega) = F(j\omega) - F_B(j\omega).$$

De asemenea, ținînd seama de (5), (6), (8), (9), (11) și (12), relațiile de decompozabilitate după funcțiile reale de frecvență $U(\omega)$ și $V(\omega)$, sînt următoarele :

$$b_m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{m!} \lim\limits_{\omega \to 0} \omega^m U(\omega), & m = \text{par}, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{m!} \lim\limits_{\omega \to 0} \omega^m V(\omega), & m = \text{impar}, \end{cases}$$

$$b_{m-i} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{(m-i)!} \lim\limits_{\omega \to 0} \left[\omega^{m-i} U(\omega) - \sum\limits_{l=0}^{i-1} \dfrac{(m-l)!\, b_{m-l}}{\omega^{i-l}} \cos \dfrac{(m-l)\pi}{2} \right], \\ \qquad\qquad m - i = \text{par}, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{m-i+1}{2}}}{(m-i)!} \lim\limits_{\omega \to 0} \left[\omega^{m-i} V(\omega) - \sum\limits_{l=0}^{i-1} \dfrac{(m-l)!\, b_{m-l}}{\omega^{i-l}} \sin \dfrac{(m-l)\pi}{2} \right], \\ \qquad\qquad m - i = \text{impar}, \end{cases} \tag{16}$$

$$U_B(\omega) = \sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \cos \frac{(m-i)\pi}{2},$$

$$V_B(\omega) = -\sum_{i=0}^{m} \frac{(m-i)!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \sin \frac{(m-i)\pi}{2},$$

$$U_C(\omega) = U(\omega) - U_B(\omega),$$

$$V_C(\omega) = V(\omega) - V_B(\omega).$$

5. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A FUNCȚIILOR DE FRECVENȚĂ

Plecînd de la faptul că funcțiile de frecvență ale sistemelor exponențial-parabolice s-au definit prin intermediul expresiei :

$$y(t) = A\left(\frac{2b_2}{\omega} t + \frac{b_1}{\omega}\right) + AU(\omega)\sin(\omega t + \varphi) + AV(\omega)\cos(\omega t + \varphi),$$

care exprimă valoare în regim permanent a semnalului de ieșire din sistem atunci cînd la intrare se aplică un semnal sinusoidal $x = A \sin(\omega t + \varphi)$,

reiese cu ușurință esența metodologiei de determinare experimentală a funcțiilor de frecvență ale sistemelor de acest tip (fig. 3).

Se ajustează b_2' pînă cînd semnalul de ieșire y_e oscilează în jurul unei valori constante, apoi se ajustează b_1' pînă cînd această valoare constantă

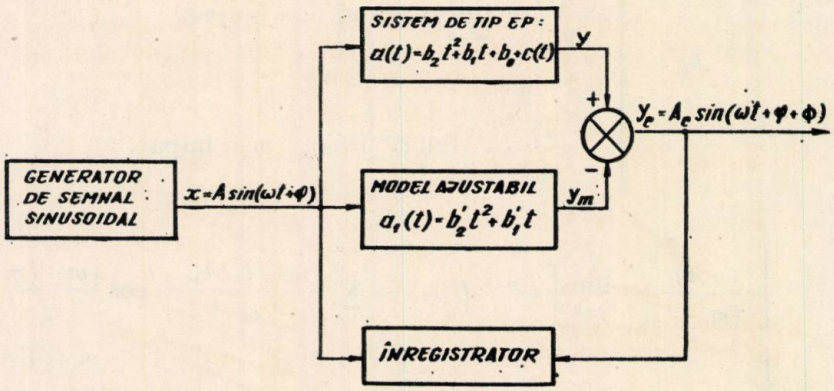


Fig. 3. — Schema de determinare experimentală a funcțiilor de frecvență la sistemele cu funcție indicială exponențial-parabolică ($m = 2$).

devine zero. Valorile găsite pentru coeficienții b_1' și b_2' sînt independente de frecvența semnalului de intrare.

Funcțiile de frecvență se determină pentru diverse valori ale lui ω, cu ajutorul relațiilor :

$$U(\omega)=-\frac{b_2'}{\omega^2}+\frac{A_e(\omega)}{A}\cos\Phi(\omega), \tag{16}$$

$$V(\omega)=\frac{b_1'}{\omega}+\frac{A_e(\omega)}{A}\sin\Phi(\omega), \tag{17}$$

$$F(j\omega)=\frac{b_2'}{(j\omega)^2}+\frac{b_1'}{j\omega}+\frac{A_e(\omega)}{A}e^{j\Phi(\omega)}. \tag{18}$$

În cazul cînd componenta $b(t)$ a funcției indiciale este reprezentată printr-un polinom de grad superior, $m>2$, coeficienții acestui polinom se pot determina experimental cu ajutorul unei scheme realizate pe baza relațiilor de decompozabilitate.

6. UNELE PROPRIETĂȚI ALE FUNCȚIILOR DE FRECVENȚĂ

a) Din relațiile (5) și (6) se constată că funcția de frecvență $U(\omega)$ nu este influențată de componentele b_it^i, i — impar, ale funcției indiciale, iar funcția de frecvență $V(\omega)$ nu este influențată de componentele $b_i t^i$, i — par, ale aceleiași funcții. Prin urmare, $U(\omega)$ nu conține informații

referitoare la caracterul simplu integral, triplu integral etc. al sistemului, iar $V(\omega)$ nu conține informații referitoare la caracterul proporțional, dublu integral etc. al sistemului. De aici reiese concluzia că funcțiile de frecvență $U(\omega)$ și $V(\omega)$, luate separat, nu asigură caracterizarea completă a unui sistem de tip EP (a funcției lui indiciale). În paragraful următor vom vedea că atît $U(\omega)$, cît și $V(\omega)$ permit determinarea completă a funcției indiciale $c(t)$, iar funcția complexă de frecvență $F(j\omega)$, prin cele două componente ale sale $U(\omega)$ și $V(\omega)$, permite determinarea completă a funcției indiciale $a(t)$ în clasa sistemelor de tip EP.

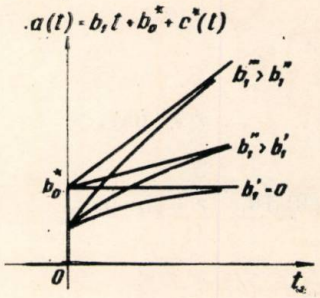


Fig. 4. — Clasa funcțiilor indiciale exponențial-liniare caracterizate de aceeași funcție de frecvență $U(\omega)$.

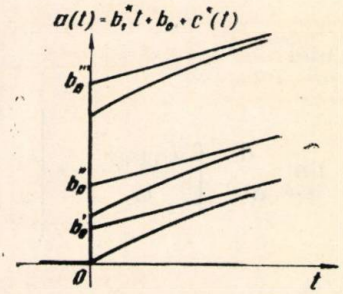


Fig. 5. — Clasa funcțiilor indiciale exponențial-liniare caracterizate de aceeași funcție de frecvență $V(\omega)$.

b) Pe baza relațiilor (3), (10) și (13) se constată că funcțiile de frecvență sînt de un număr nelimitat de ori derivabile în raport cu ω pe intervalul $(0, \infty)$ [2], iar

$$\frac{\mathrm{d}^r F_C(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^r} = \int_0^\infty (-r + j\omega\theta)\theta^{r-1} c(\theta)\, \mathrm{e}^{-j\left(\omega\theta + \frac{r\pi}{2}\right)} \mathrm{d}\theta, \quad r \geqslant 0, \tag{19}$$

de unde rezultă

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\mathrm{d}^r F_C(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^r} = -r\, \mathrm{e}^{-j\frac{r\pi}{2}} \int_0^\infty \theta^{r-1} c(\theta)\, \mathrm{d}\theta, \tag{20}$$

și de aici

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\mathrm{d}^r U_C(\omega)}{\mathrm{d}\omega^r} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+2}{2}} r \int_0^\infty \theta^{r-1} c(\theta)\mathrm{d}\theta, & r = \text{par}, \\ 0, & r = \text{impar}, \end{cases} \tag{21}$$

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\mathrm{d}^r V_C(\omega)}{\mathrm{d}\omega^r} = \begin{cases} 0, & r = \text{par} \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} r \int_0^\infty \theta^{r-1} c(\theta)\mathrm{d}\theta, & r = \text{impar}. \end{cases} \tag{22}$$

Tot din relația (13) se obține

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r}\left[\frac{F_C(j\omega)}{\omega}\right]=\int_0^\infty \theta^r\, c(\theta)\, \mathrm{e}^{-j\left[\omega\theta+\frac{(r-1)\pi}{2}\right]}\,\mathrm{d}\theta, \quad r\geqslant 0, \tag{23}$$

de unde rezultă

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r}\left[\frac{F_C(j\omega)}{\omega}\right]=\mathrm{e}^{-j\frac{(r-1)\pi}{2}}\int_0^\infty \theta^r c(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{24}$$

și de aici

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r}\left[\frac{U_C(\omega)}{\omega}\right]=\begin{cases} 0 & , \quad r=\text{par},\\ (-1)^{\frac{r-1}{2}}\displaystyle\int_0^\infty \theta^r c(\theta)\,\mathrm{d}\theta, & r=\text{impar},\end{cases} \tag{25}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r}\left[\frac{V_C(\omega)}{\omega}\right]=\begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}}\displaystyle\int_0^\infty \theta^r\, c(\theta)\mathrm{d}\theta, & r=\text{par},\\ 0 & , \quad r=\text{impar}.\end{cases} \tag{26}$$

c) În urma integrării prin părți, relația (7) devine :

$$F(j\omega)=\sum_{i=0}^{m}\frac{(m-i)!\,b_{m-i}}{(j\omega)^{m-i}}+\sum_{k=0}^{n-1}[c(t_{k+})-c(t_{k-})]\,\mathrm{e}^{-j\omega t_k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k} c'(\theta)\,\mathrm{e}^{-j\omega\theta}\,\mathrm{d}\theta, \tag{27}$$

de unde, prin derivări repetate, se obține

$$\frac{\mathrm{d}^r F(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^r}=\sum_{i=0}^{m}\frac{(m-i+r-1)!\,(m-i)\,b_{m-i}}{(j\omega)^{m-i+r}}\,\mathrm{e}^{-j\frac{r\pi}{2}}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}[c(t_{k+})-c(t_{k-})]\,t_k^r\,\mathrm{e}^{-j\left(\omega t_k+\frac{r\pi}{2}\right)}+ \tag{28}$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\theta^r c'(\theta)\,\mathrm{e}^{-j\left(\omega\theta+\frac{r\pi}{2}\right)}\,\mathrm{d}\theta, \quad r\geqslant 1.$$

Dacă funcția indicială $c(t)$ este continuă pe $(0, \infty)$, direct [2] sau prin efectuarea unei noi integrări prin părți, din relațiile (27) și (28) rezultă

$$\lim_{\omega\to\infty} F(j\omega) = b_0 + c(0+) = a(0+), \tag{29}$$

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{\mathrm{d}^r F(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^r} = 0, \quad r \geqslant 1. \tag{30}$$

În urma integrării succesive prin părți, din relația (13) rezultă

$$F_C(j\omega) = \sum_{l=0}^{q-1} F^*_{Cl}(j\omega) + F_{Cq}(j\omega), \tag{31}$$

unde

$$F^*_{Cl}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^l} \sum_{k=0}^{n-1} [c^{(l)}(t_k+) - c^{(l)}(t_k-)]\, \mathrm{e}^{-j\omega t_k}, \quad l = 0, 1, \ldots, q-1, \tag{32}$$

$$F_{Cq}(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^{q-1}} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} c^{(q)}(\theta)\, \mathrm{e}^{-j\omega\theta}\, \mathrm{d}\theta. \tag{33}$$

Deoarece

$$\omega^q \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r} \left[\frac{F_{Cq}(j\omega)}{\omega}\right] =$$

$$= \sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^{r-s}(q+r-s)!\, q\, C_r^s}{q!\,(q+r-s)\omega^{r-s}} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \theta^s\, c^{(q)}(\theta)\, \mathrm{e}^{-j\left[\omega\theta + \frac{(q+s-1)\pi}{2}\right]}\, \mathrm{d}\theta, \tag{34}$$

direct [2], sau printr-o nouă integrare prin părți, se obține

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^q \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r} \left[\frac{F_{Cq}(j\omega)}{\omega}\right] = 0, \quad q \geqslant 0, \quad r \geqslant 0. \tag{35}$$

d) Din relațiile (5) și (6) se constată imediat că funcția de frecvență $U(\omega)$ este pară, iar funcția de frecvență $V(\omega)$ este impară:

$$U(\omega) = U(-\omega), \tag{36}$$

$$V(\omega) = -V(-\omega). \tag{37}$$

e) Dacă funcțiile indiciale a două sisteme A_1 și A_2 sînt legate prin relația

$$a_1(t) = a_2(\alpha t), \tag{38}$$

atunci, din (7) rezultă că funcțiile complexe de frecvență ale sistemelor satisfac relația

$$F_1(j\omega) = F_2\left(j\,\frac{\omega}{\alpha}\right). \tag{39}$$

Prin urmare, la o „dilatare" („contracție") a funcției indiciale, corespunde o „contracție" („dilatare") a funcțiilor de frecvență.

7. DETERMINAREA FUNCȚIEI INDICIALE DIN FUNCȚIILE DE FRECVENȚĂ

Funcția indicială $c(t)$ poate fi reprezentată pe intervalul $(0, \infty)$, prin cele două integrale reale Fourier :

$$c(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \omega t\, d\omega \int_0^\infty c(\theta) \sin \omega\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \omega t\, d\omega \int_0^\infty c(\theta) \cos \omega\theta d\theta, \tag{40}$$

de unde, pe baza relațiilor (11) și (12), rezultă

$$c(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega} \sin \omega t\, d\omega, \quad t > 0, \tag{41}$$

$$c(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_C(\omega)}{\omega} \cos \omega t\, d\omega, \quad t > 0, \tag{42}$$

și de aici

$$a(t) = \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\, t^{m-i} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega} \sin \omega t\, d\omega, \quad t > 0, \tag{43}$$

$$a(t) = \sum_{i=0}^{m} b_{m-i}\, t^{m-i} + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{V_C(\omega)}{\omega} \cos \omega t\, d\omega, \quad t > 0. \tag{44}$$

Ținînd seama că $U_C(\omega)$ este pară și $V_C(\omega)$ — impară, relațiile (41) și (42) permit exprimarea componentei $c(t)$ a funcției indiciale în raport cu funcția complexă de frecvență $F_C(j)$, sub următoarele două forme :

$$c(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\int_0^\infty \frac{F_C(j\omega)}{j\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_C(j\omega)}{j\omega}\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{45}$$

În conformitate cu relațiile (41) și (42), $c(t)$ se poate determina fie din funcția de frecvență $U_C(\omega)$, fie din $V_C(\omega)$. Deoarece $U_C(\omega)$ se poate

obține din $U(\omega)$, iar $V_C(\omega)$ din $V(\omega)$, rezultă că $c(t)$ se poate determina fie din funcția de frecvență $U(\omega)$, fie din $V(\omega)$.

Din relațiile (43), (44) și de decompozabilitate a sistemelor de tip EP după funcțiile de frecvență, rezultă că pentru determinarea funcției indiciale $a(t)$ trebuie să se cunoască fie $U(\omega)$ și comportarea în jurul valorii $\omega = 0$ a funcției $V(\omega)$ (sau $V_B(\omega)$), fie $V(\omega)$ și comportarea în jurul valorii $\omega = 0$ a funcției $U(\omega)$ (sau $U_B(\omega)$).

8. TEOREMA LUI PARSEVAL

Utilizînd pe rînd relațiile (41) și (11), avem

$$\int_0^\infty c^2(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty c(t)dt \int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega}\sin \omega t d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega}\,d\omega \int_0^\infty c(t)\sin\,\omega t\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{U_C(\omega)}{\omega}\right]^2 d\omega.$$

În mod analog, pe baza relațiilor (42) și (12), se obține

$$\int_0^\infty c^2(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{V_C(\omega)}{\omega}\right]^2 d\omega,$$

și de aici

$$\int_0^\infty c^2(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{U_C(\omega)}{\omega}\right]^2 d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{V_C(\omega)}{\omega}\right]^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left|\frac{F_C(j\omega)}{j\omega}\right|^2 d\omega. \qquad (46)$$

9. CORELAȚII INTEGRALE ÎNTRE FUNCȚIILE REALE DE FRECVENȚĂ

Din (11) și (41), respectiv (12) și (42), se obțin următoarele relații de dependență între $U_C(\omega)$ și $V_C(\omega)$:

$$\frac{U_C(\omega)}{\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin \omega t\,dt \int_0^\infty \frac{V_C(\omega)}{\omega}\cos \omega t\,d\omega, \qquad (47)$$

$$\frac{V_C(\omega)}{\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos \omega t\,dt \int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega}\sin \omega t\,d\omega. \qquad (48)$$

10. RECUNOAȘTEREA UNUI SISTEM DE TIP EP DUPĂ FUNCȚIILE DE FRECVENȚĂ

Din proprietățile funcțiilor de frecvență deduse la paragraful 6, se evidențiază următoarele condiții necesare pentru ca o funcție reală de frecvență $U(\omega)$ să caracterizeze un sistem de tip EP :

a) Valorile coeficienților b_{m-i} $(m - i = 0, 2, 4, \ldots)$, rezultate din relațiile de decompozabilitate după $U(\omega)$ să fie finite ;

b) $U(\omega)$ să fie de un număr nelimitat de ori derivabilă pe $(0, \infty)$;

$$\text{c)} \lim_{\omega \to 0} \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r} \left[\frac{[U_C(\omega)}{\omega} \right] = \begin{cases} 0 \ , & r = 0, 2, 4, \ldots, \\ \text{finit}, & r = 1, 3, 5, \ldots, \end{cases}$$

unde

$$U_C(\omega) = U(\omega) - \sum_{i=0}^{m} \frac{(m - i)\,!\, b_{m-i}}{\omega^{m-i}} \cos \frac{(m - i)\,\pi}{2} ;$$

d) pentru orice $q \geqslant 1$:

$$U_C(\omega) = \sum_{l=0}^{q-1} U_{Cl}^{*}(\omega) + U_{Cq}(\omega),$$

unde

$$U_{Cl}^{*}(\omega) = \frac{1}{\omega^l} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{lk} \cos \left(\omega t_k + \frac{l\pi}{2} \right), \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1}$$

și

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega^q \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\omega^r} \left[\frac{U_{Cq}(\omega)}{\omega} \right] = 0, \quad (\forall)\, r \geqslant 0.$$

În continuare, vom arăta că aceste condiții sînt și suficiente pentru ca $U(\omega)$ să fie funcția reală de frecvență a unui sistem de tip EP, adică să existe o funcție indicială $a(t)$ de tip polinomial-exponențial, căreia să-i corespundă funcția reală de frecvență $U(\omega)$.

Pentru aceasta vom dovedi că :

— funcția

$$c(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_C(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega, \quad t > 0,$$

satisface relațiile

$$\lim_{t \to \infty} t^r \, c^{(p)}(t) = 0, \quad r, p = 0, 1, 2, \ldots,$$

este derivabilă de un număr nelimitat de ori pe fiecare interval (t_{k-1}, t_k), unde $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ și $t_n = \infty$, are în fiecare punct t_k valoarea egală

cu semisuma limitelor laterale, iar limitele laterale ale ei și ale derivatelor ei sînt finite ;

– sistemul cu funcția indicială :

$$a(t) = \sum_{\substack{i=0 \\ m-i=\text{par}}}^{m} b_{m-i}\, t^{m-i} + c(t)$$

are pe $U(\omega)$ drept funcție reală de frecvență.

Efectuînd integrări succesive prin părți, și ținînd seama de proprietățile b), c) și d), funcția $c(t)$ se aduce sub forma

$$c(t) = \frac{2}{\pi t^{r+1}} \int_0^{\infty} \left[\frac{U_C(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \sin \left[\omega t + \frac{(r+1)\pi}{2} \right] \mathrm{d}\omega, \quad (\forall)\, r \geqslant -1, \quad (49)$$

de unde rezultă

$$\lim_{t \to \infty} t^r\, c(t) = 0.$$

În continuare, se descompune funcția $c(t)$ în două componente :

$$c_1(t) = \frac{2}{\pi t^{r+1}} \int_0^{1} \left[\frac{U_C(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \sin \left[\omega t + \frac{(r+1)\pi}{2} \right] \mathrm{d}\omega, \quad (50)$$

$$c_2(t) = \frac{2}{\pi t^{r+1}} \int_1^{\infty} \left[\frac{U_C(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \sin \left[\omega t + \frac{(r+1)\pi}{2} \right] \mathrm{d}\omega. \quad (51)$$

Pentru $c_1(t)$ se găsește

$$c_1^{(p)}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^{p-i}\, C_p^i\, (r+p-i)\,!}{r\,!\, t^{r+p-i+1}} \int_0^{1} \omega^i \left[\frac{U_C(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \sin \left[\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{(r+i+1)\pi}{2} \right] \mathrm{d}\omega \quad (52)$$

de unde r ezultă

$$\lim_{t \to \infty} t^r\, c_1^{(p)}(t) = 0.$$

Ținînd seama de proprietatea d), funcția $c_2(t)$ se scrie sub forma :

$$c_2(t) = \sum_{l=0}^{q-1} c_{2l}^{*}(t) + c_{2q}(t), \quad (53)$$

unde

$$c_{2l}^{*}(t) = \frac{2}{\pi t^{r+1}} \int_1^{\infty} \left[\frac{U_{Cl}^{*}(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \sin \left[\omega t + \frac{(r+1)\pi}{2} \right] \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi t^{r+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{lk} \sum_{i=0}^{r+1} \frac{(-1)^{r-i+1} C_{r+1}^{i} (l+r-i+1)!\, t_k^i}{l!} \times$$

$$\times \int_1^{\infty} \frac{\cos \left[\omega t_k + \frac{(l+i)\pi}{2} \right] \sin \left[\omega t + \frac{(r+1)\pi}{2} \right]}{\omega^{l+r-i+2}} \mathrm{d}\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi t^{r+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{lk} \sum_{i=0}^{r+1} \frac{(-1)^{r-i+1} C_{r+1}^{i} (l+r-i+1)!\, t_k^i}{l!} \times$$

$$\times \left\{ (t+t_k)^{l+r-i+1} \int_{t+t_k}^{\infty} \frac{\sin \left[\theta + \frac{(l+r+i+1)\pi}{2} \right]}{\theta^{l+r-i+2}} \mathrm{d}\theta + \right.$$

$$\left. + (t-t_k)^{l+r-i+1} \int_{t-t_k}^{\infty} \frac{\sin \left[\theta + \frac{(-l+r-i+1)\pi}{2} \right.}{\theta^{l+r-i+2}} \mathrm{d}\theta \right\}, \tag{54}$$

$$c_{2q}^{*}(t) = \frac{2}{\pi t^{r+1}} \int_1^{\infty} \left[\frac{U_{Cq}(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \sin \left[\omega t + \frac{(r+1)\pi}{2} \right] \mathrm{d}\omega. \tag{55}$$

Avem

$$\lim_{t \to \infty} t^r \, c_{2l}^{*}(t) = 0,$$

şi cu atît mai mult :

$$\lim_{t \to \infty} t^r \, c_{2l}^{*(p)}(t) = 0.$$

Pentru $q > p + 2$, există egalitatea

$$\lim_{t \to \infty} \omega^{p+2} \left[\frac{U_{Cq}(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} = 0,$$

care ne permite să scriem relaţia

$$c_{2q}^{(p)}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{p} \frac{(-1)^{p-i} C_p^i (r+p-i)!}{r!\, t^{r+p-i+1}} \int_1^{\infty} \omega^i \left[\frac{U_{Cq}(\omega)}{\omega} \right]^{(r+1)} \times$$

$$\times \sin \left[\omega t + \frac{(r+i+1)\pi}{2} \right] d\omega, \tag{56}$$

de unde rezultă

$$\lim_{t \to \infty} t^r c_{2q}^{(p)}(t) = 0,$$

şi ţinînd seama de rezultatele precedente,

$$\lim_{t \to \infty} t^r c^{(p)}(t) = 0.$$

Pentru $r + 1 = 0$, funcţia $c_1(t)$ este de un număr nelimitat de ori derivabilă pe $(0, \infty)$, $c_{2q}(t)$ este derivabilă pe acelaşi interval de cel puţin $(q - 2)$ ori (q — arbitrar de mare) şi

$$c_{2l}^{*}(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{lk} \int_1^{\infty} \frac{\cos \left(\omega t_k + \frac{l\pi}{2} \right) \sin \omega t}{\omega^{l+1}} d\omega. \tag{57}$$

Pentru $l = 0$, se obţine

$$c_{20}^{*}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{lk} [H(t - t_k) - Si(t + t_k) - S_i(t - t_k)], \tag{58}$$

unde prin $H(t - t_k)$ am notat funcţia lui Heaviside :

$$H(t - t_k) = \begin{cases} 0, & t < t_k, \\ 0{,}5 & t = t_k \\ 1 & t > t_k. \end{cases}$$

În punctele t_k, $k > 0$, funcţia $c_{20}^{*}(t)$ are valoarea egală cu semisuma limitelor laterale, iar funcţiile $c_{2l}^{*}(t)$, $l > 0$, sînt continue.

Pe fiecare interval (t_{k-1}, t_k), funcţiile $c_{2l}^{*}(t)$ sînt derivabile de un număr nelimitat de ori, iar în punctele t_k limitele laterale ale

derivatelor sînt finite :

$$c_{2l}^{*(p)}(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_{lk}\int_1^\infty \dfrac{\cos\left(\omega t_k + \dfrac{l\pi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \dfrac{p\pi}{2}\right)}{\omega^{l-p+1}}\,\mathrm{d}\omega, & p<l, \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_{lk}\left[\dfrac{(-1)^l-1}{2} + H(t-t_k) - \right. & \\ \left. -\dfrac{(-1)^l}{\pi}\,Si\,(t+t_k) - \dfrac{1}{\pi}\,Si\,(t-t_k)\right] & p=l, \\ -\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\alpha_{lk}\left\{(-1)^l\left[\dfrac{\sin(t+t_k)}{t+t_k}\right]^{(p-l-1)} + \right. & \\ \left. +\left[\dfrac{\sin(t-t_k)}{t-t_k}\right]^{p-l-1}\right\}, & p>l. \end{cases} \tag{59}$$

În plus,

$$c^{(p)}(t_k+) - c^{(p)}(t_k-) = c_{2p}^{*(p)}(t_k+) - c_{2p}^{*(p)}(t_k-) = \alpha_{pk}. \tag{60}$$

În sfîrșit, ținînd seama de relația (5), sistemul cu funcția indicială $a(t)$ admite următoarea funcție reală de frecvență :

$$U^*(\omega) = \sum_{i=0}^{m}\frac{(m-i)!\,b_{m-i}}{\omega^{m-i}}\cos\frac{(m-i)\pi}{2} +$$

$$+\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega}\sin\omega\theta\,\mathrm{d}\omega$$

și deoarece $\dfrac{U_C(\omega)}{\omega}$ poate fi reprezentată printr-o integrală Fourier :

$$\frac{U_C(\omega)}{\omega} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega}\sin\omega\theta\,\mathrm{d}\omega,$$

rezultă

$$U^*(\omega) = \sum_{i=0}^{m}\frac{(m-i)\,b_{m-i}}{\omega^{m-i}}\cos\frac{(m-i)\pi}{2} + U_C(\omega) = U(\omega).$$

În mod analog se poate enunța și demonstra cîte o teoremă care să exprime condițiile necesare și suficiente pentru ca o funcție reală de frecvență $V(\omega)$, respectiv o funcție complexă de frecvență $F(j\omega)$ să caracterizeze un sistem de tip EP.

11. CONEXIUNEA SERIE

Vom arăta că prin conectarea în serie a două sisteme A_1 și A_2 de tip EP, cu funcțiile complexe de frecvență $F_1(j\omega)$ și $F_2(j\omega)$, se obține un sistem A tot de tip EP, cu funcția de frecvență :

$$F(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega). \tag{61}$$

Pe baza proprietății de decompozabilitate a sistemelor de tip EP, conexiunea serie a celor două sisteme poate fi reprezentată sub forma dată în figura 6.

Dacă regimul este staționar, caracterizat prin condiții inițiale nule și se aplică la $t = 0$ un semnal de intrare $x(t)$ de tip treaptă unitară, se obțin la ieșirile sistemelor A_1 și A chiar funcțiile indiciale ale acestor sisteme :

$$y_B(t) = b_1(t),$$

$$y_C(t) = c_1(t),$$

$$y(t) = a(t).$$

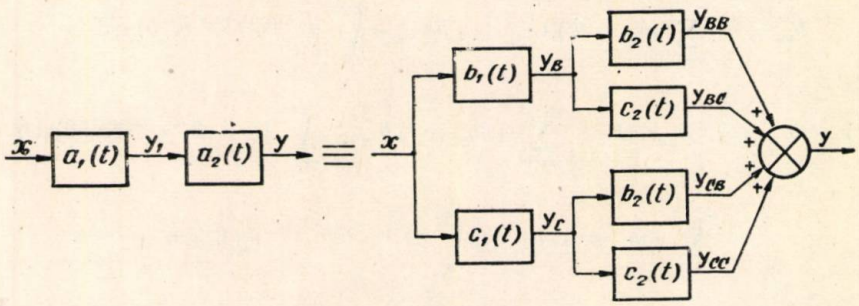


Fig. 6. — Sisteme de tip EP în conexiune serie.

Atașînd indicele 1 la mărimile ce caracterizează sistemul A_1 și indicele 2 la mărimile ce caracterizează sistemul A_2, pe baza relațiilor de convoluție, respectiv (1), (1′), (1‴) și (1″), pentru $t > 0$, avem :

$$y_{BB}(t) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{m-i} \frac{b_{1k}\, b_{2,m-i-k}}{c_{m-i}^{k}}\, t^{m-i}, \qquad m = m_1 + m_2, \tag{62}$$

$$y_{BC}(t) = b_{10}c_2(t) + \sum_{i=0}^{m_1-1} (m_1 - i)\, b_{1m_1-i} \int_0^t (t - \theta)^{m_1-i-1}\, c_2(\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{63}$$

$$y_{CB}(t) = b_{20}c_1(t) + \sum_{i=0}^{m_2-1} (m_2 - i)\, b_{2,m_2-i} \int_0^t (t - \theta)^{m_2-i-1} c_1(\theta)\, d\theta, \quad (64)$$

$$y_{CC}(t) = \sum_{k=0}^{n_1} [c_1(\theta_{1k}+) - c_1(\theta_{1k}-)]c_2(t-\theta_{1k}) + \sum_{k=1}^{n_1} \int_{\theta_{1,k-1}}^{\theta_{1k}} c_2(t-\theta)\, c_1'(\theta)\, d\theta, \quad (65)$$

iar pentru $t = 0$:

$$y(t) = a_2(0)a_1(0+). \quad (66)$$

Din aceste relaţii se obţin următoarele expresii pentru componenta polinomială $b(t)$ şi componenta „exponenţială" $c(t)$, care alcătuiesc funcţia indicială $a(t)$ a sistemului rezultant A :

$$b(t) = \sum_{i=0}^{m} b^0_{m-i}\, t^{m-i} + \sum_{i=1}^{m_1} b'_{m_1-i}\, t^{m_1-i} + \sum_{i=1}^{m_2} b''_{m_2-i}\, t^{m_2-i},$$

unde :

$$b^0_{m-i} = \sum_{k=0}^{m-i} \frac{b_{1k}\, b_{2,m-i-k}}{c^k_{m-i}},$$

$$b'_{m_1-1} = \sum_{k=0}^{i-1} (m_1 - k)\, C^{m_1-i}_{m_1-k-1}\, b_{1,m_1-k} \int_0^\infty (-\theta)^{i-k-1} c_2(\theta)\, d\theta,$$

$$b''_{m_2-i} = \sum_{k=0}^{i-1} m_2 - k)\, C^{m_2-i}_{m_2-k-1}\, b_{2,m_2-k} \int_0^\infty (-\theta)^{i-k-1} c_1(\theta)\, d\theta, \quad (67)$$

$$c(t) = b_{10}c_2(t) + b_{20}c_1(t) - \sum_{i=0}^{m_1-1} (m_1 - i)\, b_{1,m_1-i} \int_t^\infty (t - \theta)^{m_1-i-1} c_2(\theta)\, d\theta -$$

$$- \sum_{i=0}^{m_2-1} (m_2 - i)\, b_{2,m_2-i} \int_t^\infty (t - \theta)^{m_2-i-} c_1(\theta)\, d\theta +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_1} [c_1(\theta_{1k}+) - c_1(\theta_{1k}-)]c_2(t-\theta_{1k}) + \sum_{k=1}^{n_1} \int_{\theta_{1,k-1}}^{\theta_{1k}} c_2(t-\theta)\, c_1'(\theta)\, d\theta. \quad (68)$$

În scopul aflării funcţiei de frecvenţă a sistemului rezultant A, să presupunem că la intrarea sistemului se aplică un semnal sinusoidal $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Utilizînd reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale şi ţinînd seama de relaţia (14), în regim permanent, componentele sinusoidale ale semnalelor de ieşire din sistemele A_1 şi A_2 se scriu astfel :

$$Y_1(t) = F_1(j\omega)X(t),$$

$$Y(t) = F_2(j\omega)Y_1(t) = F_2(j\omega)F_1(j\omega)X(t),$$

rezultînd funcţiile de frecvenţă ale sistemului A :

$$F(j\omega) = F_1(j\omega)F_2(j\omega),$$

$$U(\omega) = U_1(\omega)U_2(\omega) - V_1(\omega)V_2(\omega),$$

$$V(\omega) = U_1(\omega)V_2(\omega) + V_1(\omega)U_2(\omega).$$

12. CONEXIUNEA CU REACŢIE

Să presupunem că sistemul A, format din sistemele A_1 şi A_2 printr-o conexiune cu reacţie (fig. 7) este de tip EP şi că la intrarea sistemului se aplică un semnal sinusoidal $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.

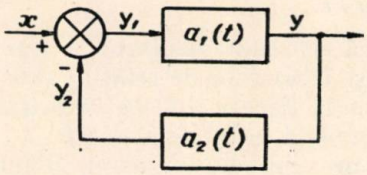


Fig. 7. — Sistemele în conexiune cu reacţie

Utilizînd reprezentarea în complex a mărimilor sinusoidale şi ţinînd seama de relaţia (14), în regim permanent, avem

$$Y(t) = F(j\omega)X(t),$$

şi de aici :

$$Y_2(t) = F_2(j\omega)Y(t) = F_2(j\omega)F(j\omega)X(t),$$

$$Y_1(t) = X(t) - Y_2(t) = [1 - F_2(j\omega)F(j\omega)]X(t),$$

$$Y(t) = F_1(j\omega)Y_1(t) = F_1(j\omega)[1 - F_2(j\omega)F(j\omega)]X(t).$$

Din cele două expresii ale componentei sinusoidale $Y(t)$ a semnalului de ieşire din sistemul A, rezultă

$$F(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{1 + F_1(j\omega)F_2(j\omega)},$$

$$U(\omega) =$$

$$= \frac{U_1(\omega)[1+U_1(\omega)U_2(\omega)-V_1(\omega)V_2(\omega)]+V_1(\omega)[U_1(\omega)V_2(\omega)+V_1(\omega)U_2(\omega)]}{[1+U_1(\omega)U_2(\omega)-V_1(\omega)V_2(\omega)]^2+[U_1(\omega)V_2(\omega)+V_1(\omega)U_2(\omega)]^2},$$

$$V(\omega) = \tag{69}$$

$$= \frac{-U_1(\omega)[U_1(\omega)V_2(\omega)+V_1(\omega)U_2(\omega)]+V_1(\omega)[1+U_1(\omega)U_2(\omega)-V_1(\omega)V_2(\omega)]}{[1+U_1(\omega)U_2(\omega)-V_1(\omega)V_2(\omega)]^2+[U_1(\omega)V_2(\omega)+V_1(\omega)U_2(\omega)]^2}.$$

Pentru ca sistemul rezultant A să fie de tip EP este necesar ca funcțiile reale de frecvență $U(\omega)$ și $V(\omega)$ date de relațiile (69) să satisfacă condițiile necesare și suficiente pentru ca fiecare dintre ele să poată caracteriza un sistem de tip EP, iar funcțiile indiciale ale acestor sisteme să aibă componentele „exponențiale" identice, adică

$$\int_0^\infty \frac{U_C(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega = \int_0^\infty \frac{V_C(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega.$$

Ar fi interesant de stabilit în ce condiții această teoremă asigură și suficiența; pînă în prezent, autorul nu a găsit un contraexemplu care s-o infirme.

OBSERVAȚII.

a) Dacă sistemul rezultant A este stabil, iar funcțiile reale de frecvență $U(\omega)$ și $V(\omega)$ date de relațiile (69) satisfac condițiile necesare și suficiente pentru ca fiecare din ele să poată caracteriza un sistem de tip EP, atunci sistemul A este de tip EP.

b) Să presupunem că sistemul format prin înserierea sistemelor A_1 și A_2 este descris de ecuații diferențiale cu întîrzieri concentrate [9]. În conformitate cu criteriul lui Nyquist, pentru ca sistemul rezultant A să fie stabil este necesar și suficient ca hodograful funcției $F_1(j\omega)\,F_2(j\omega)$ să nu intersecteze axa reală în intervalul $(-\infty, -1]$.

Primit la redacție la 31 mai 1978

BIBLIOGRAFIE

1. C. Penescu, *Sisteme*, București, Edit. tehnică, 1975.
2. G. M. Fihtenholt, *Curs de calcul diferențial și integral*, vol. III, București, Edit. tehnică, 1965.
3. J. Lightill, *Fourier Analysis and Generalized Funtions*, Cambridge University Press, 1960.
4. R. D. Stuart, *Introducere în analiza Fourier*, București, Edit. tehnică, 1971.
5. J. C. Jaeger, G. H. Newstead, *Introducere în teoria transformării Laplace*, București, Edit. tehnică, 1971.
6. Gh. Cartianu, I. Constantin, *Sinteza în domeniul frecvență*, București. Edit. Academiei, 1974.
7. N. Viner, *Integral Furie i necotorie ego prilojenia* (trad. din l. engleză), Moskva, Gos. izd. fizico matematicescoi literaturî, 1963.
8. A. Zigmung, *Trigonometricescoe readî* (Trad. din l. engleză), Moskva, Izd. Mir, 1965.
9. Vl. Rasvan, *Stabilitatea absolută a sistemelor automate cu întîrziere*, București, Edit. Academiei 1975.

STUDIUL CARACTERISTICILOR DE LUCRU ALE AMORTIZOARELOR HIDRAULICE

de T. SIRETEANU, C. TEODOSIU, O. GÜNDISCH, M. RĂUȚĂ și S. PĂRĂIAN

Institutul de fizica și tehnologia materialelor, București

În lucrare este prezentată o metodă de calcul bazată pe studiul teoretic și experimental al sistemului hidraulic al unui amortizor de tip bitubular cu scurgerea lichidului în sens unic. Un accent deosebit este pus pe descrierea tehnicii experimentale concepută și realizată în acest scop.

Amortizoarele hidraulice de tip bitubular cu scurgerea lichidului în sens unic, derivate din licența Armstrong, echipează autovehiculele produse în țară. În scopul asimilării superioare a acestei licențe și a adaptării ei pentru alte clase de autoturisme, s-a impus studiul funcționării hidraulice a tuturor subansamblelor amortizorului și a interdependenței lor funcționale. Scrierea ecuațiilor de continuitate a masei de lichid în regim dinamic necesită cunoașterea dependențelor debit-cădere de presiune $Q(\Delta p)$ ale supapelor și orificiilor care contribuie la realizarea caracteristicii de lucru. În general [1]—[3], această dependență este scrisă pe baza legilor hidrodinamicii, utilizînd modele simplificate ale configurației subansamblelor amortizorului. În lucrarea de față funcțiile $Q(\Delta p)$ au fost determinate experimental pe modele reale, permițînd dezvoltarea unei metode grafo-analitice de control prin calcul al caracteristicii de lucru forță-viteză $F—v$. Înregistrarea directă a diagramei $F—v$ a impus realizarea, pentru prima dată în țară, a unei instalații electronice complexe, cunoscute fiind dezavantajele metodelor utilizate pînă în prezent pentru obținerea acestei diagrame. Pentru vizualizarea fenomenului de cavitație și a influenței sale asupra caracteristicilor de lucru au fost executate amortizoare transparente capabile să funcționeze în regimuri de forță și temperatură similare celor reale.

§ 1. METODA DE CALCUL GRAFO-ANALITICĂ

Schema funcțională a amortizoarelor hidraulice de tip Armstrong este prezentată în figura 1.

Caracteristic amortizoarelor bitubulare cu scurgerea lichidului în sens unic este faptul că limitarea forțelor de amortizare se face atît la cursa de destindere, cît și la cea de compresie prin supapa de descărcare S_d,

ceea ce face ca circulația principală de lichid, după deschiderea acestei supape, să se desfășoare în același sens la ambele curse. Prin supapa din piston S_p și supapa inferioară S_i circulația lichidului are loc în ambele sensuri, ele controlînd funcționarea amortizorului pînă la deschiderea supapei S_d. În afară de circulația lichidului prin supape există o scurgere

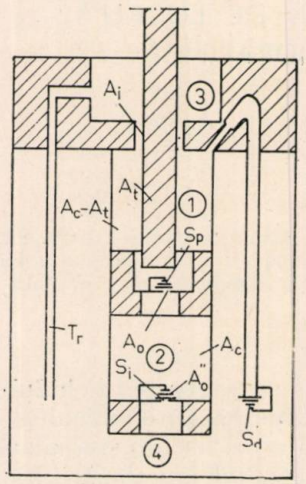


Fig. 1. — Schema amortizorului hidraulic: 1 — camera superioară a cilindrului de lucru; 2 — camera inferioară a cilindrului de lucru; 3 — camera ghidajului; 4 — cilindrul exterior; A_i — aria interstițiului dintre tijă și ghidaj; A_0' — aria orificiilor calibrate din piston; A_0'' — aria orificiilor calibrate din supapa inferioară; A_t — aria secțiunii tijei; A_c — aria secțiunii cilindrului de lucru; S_p — supapa din piston; S_i — supapa inferioară; S_d — supapa de descărcare; T_r — tub de recuperare.

de lichid prin interstițiul tijă-ghidaj, care depinde de toleranța ajustajului respectiv.

Notînd cu Q_{ij} debitul de lichid care trece din camera i în camera j a amortizorului și cu v viteza de deplasare a pistonului, obținem din condiția de continuitate a masei lichidului ecuațiile

$$\begin{aligned} Q_{12} + Q_{13} + Q_{14} &= v(A_c - A_t), \\ Q_{12} + Q_{42} &= vA_c \end{aligned} \tag{1.1}$$

pentru cursa de destindere și

$$\begin{aligned} Q_{21} - Q_{13} - Q_{14} &= v(A_c - A_t), \\ Q_{21} + Q_{24} &= vA_c \end{aligned} \tag{1.2}$$

pentru cursa de compresie.

Debitele Q_{ij} depind de diferențele de presiune $\Delta p_{ij} = p_i - p_j$ existente între camerele i și j, de forțele F_s din arcurile supapelor, de suprafețele A_0 și A_i ale orificiilor calibrate și de configurația geometrică a diferitelor elemente constructive:

$$Q_{ij} = Q_{ij}(\Delta p_{ij},\ A_0,\ A_i,\ F_s). \tag{1.3}$$

Introducînd expresiile (1.3) în relațiile (1.1) și (1.2) se obțin două sisteme de cîte două ecuații neliniare pentru necunoscutele Δp_{tj}. Prin tubul de recuperare T_r presiunile din camerele 3 și 4 se egalizează. Măsurînd presiunea din camera 4 în condiții normale de funcționare a rezultat că p_4 este practic constantă și egală cu presiunea atmosferică p_a. Deci

$$p_3 = p_4 = p_a. \tag{1.4}$$

Menționăm că la măsurarea presiunii p_4 s-au înregistrat creșteri importante ale acesteia (peste 5 atm) în situația în care cantitatea de lichid este prea mare sau temperatura în amortizor se ridică la valori foarte mari (peste 100°C).

În acest mod, numărul necunoscutelor se reduce pentru fiecare sistem la două și anume p_1 și p_2. Rezolvînd aceste sisteme, forțele dezvoltate de amortizor pentru un v dat au expresiile

$$F_d = R_d + p_1(A_c - A_t) - p_2A_c \tag{1.5}$$

pentru cursa de destindere și

$$F_c = R_c + p_2A_c - p_1(A_c - A_t) \tag{1.6}$$

pentru cursa de compresie, unde R_d și R_c reprezintă forțele de frecare uscată din amortizor la destindere, respectiv compresie, care se determină experimental.

Rezolvarea analitică a sistemelor de ecuații (1.1) și (1.2) ar impune determinarea expresiilor analitice (1.3). Întrucît aceasta nu este practic posibil decît pentru modele simplificate ale secțiunilor de trecere a lichidului, este de preferat utilizarea unei metode grafo-analitice, în care siste-

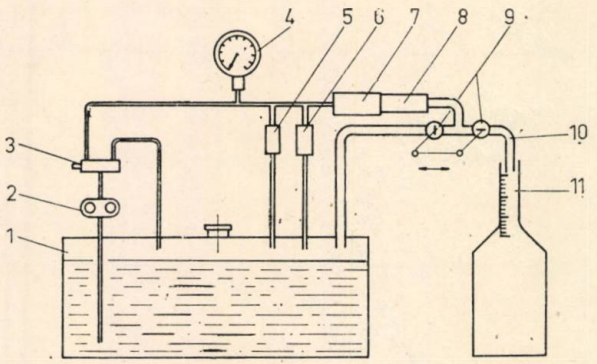


Fig. 2. — Schema băncului hidraulic de determinare a caracteristicii debit — presiune pentru supape și interstiții:
1 — rezervor; 2 — pompă; 3 — supapă electromagnetică; 4 — manometru; 5 — robinet de reglaj fin; 6 — robinet de reglaj grosier; 7 — dispozitiv de fixare a supapelor; 8 — tub transparent; 9 — robinet; 10 — pîrghie; 11 — cilindru gradat.

mele de ecuații de continuitate se rezolvă analitic, iar dependențele debit-cădere de presiune se folosesc sub formă grafică, determinate experimental.

În figura 2 este reprezentată schematic instalația hidraulică de determinare a caracteristicilor debit-cădere de presiune pentru supape și interstiții, realizată prin adaptarea unui banc hidraulic de tipul PRATT-HYDRAULICS P2004.

Pompa 2 refulează lichidul de amortizor din rezervorul 1 spre supapa electromagnetică 3. La acţionarea supapei electromagnetice lichidul este refulat prin conducta principală spre dispozitivul de fixare a supapelor 7. Pe conducta principală este montat manometrul 4, robinetul de reglaj fix 5 şi robinetul de reglaj grosier 6. După trecerea prin supape sau interstiţii, lichidul este vizualizat în tubul transparent 8 şi dirijat prin robinetele 9, acţionate simultan cu pîrghia 10, în cilindrul gradat 11 pentru măsurarea debitului. Se reglează debitul cu robinetele 5 şi 6 care permit un reglaj continuu de la zero la valoarea maximă debitată de pompă. Caracteristicile debit-cădere de presiune se ridică prin puncte.

În figurile 3—8 sînt date caracteristicile debit-presiune ale supapelor S_p, S_i, S_d şi interstiţiului tijă-ghidaj. Au fost considerate supape S_p şi S_i avînd suprafeţele orificiilor calibrate $A_0 = 0{,}5$ mm², 1 mm² şi 1,5 mm². În ceea ce priveşte arcurile acestora au fost încercate variante cu diferite rigidităţi k. În cazul supapei S_d s-au ridicat curbele debit-presiune pentru diferite prestrîngeri Δh ale arcului. Caracteristica debit-cădere de presiune a interstiţiului tijă-ghidaj a fost determinată pentru valoarea medie a toleranţei ajustajului.

Dependenţele debit-cădere de presiune obţinute arată clar că sistemele (1.1) şi (1.2) sînt neliniare. Pentru rezolvarea lor a fost utilizată o metodă grafo-analitică în elaborarea căreia s-a ţinut seama de modul de funcţionare a amortizorului.

La cursa de destindere, datorită faptului că deasupra pistonului se instalează o presiune p_1 mult mai mare decît p_2, aceasta din urmă poate fi neglijată în ecuaţia $(1.1)_1$. Pentru un şir dat de valori ale lui p_1 se determină debitele Q_{12}, Q_{14} şi Q_{13} din diagramele date în figurile 3, 7 şi 8 şi se

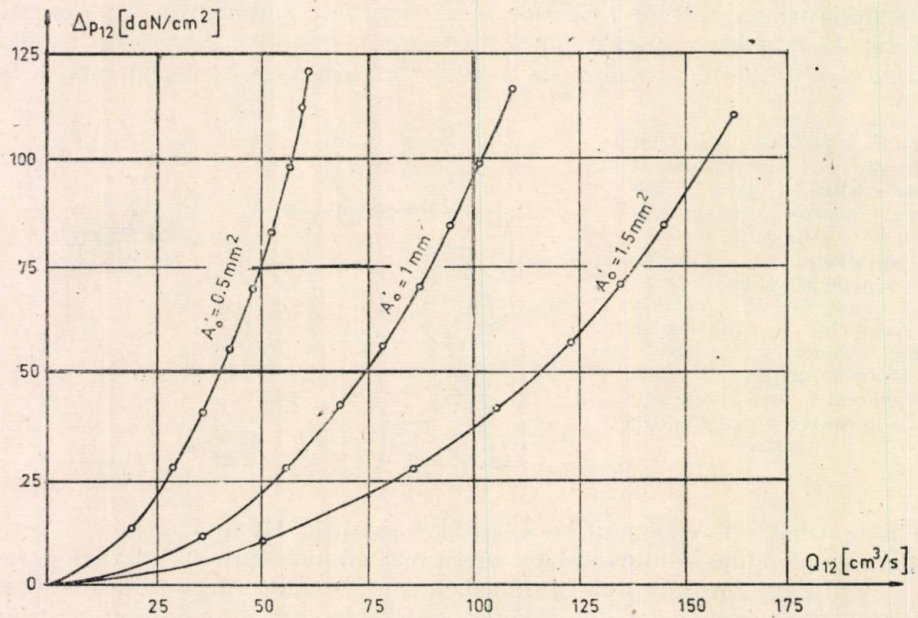


Fig. 3. — Caracteristica debit-cădere de presiune a supapei din piston la destindere.

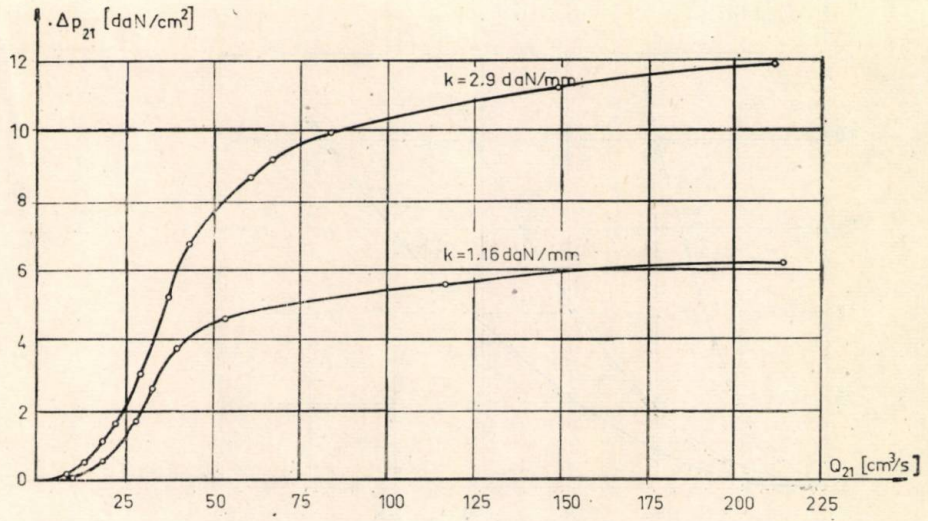


Fig. 4. — Caracteristica debit-cădere de presiune a supapei din piston la compresie.

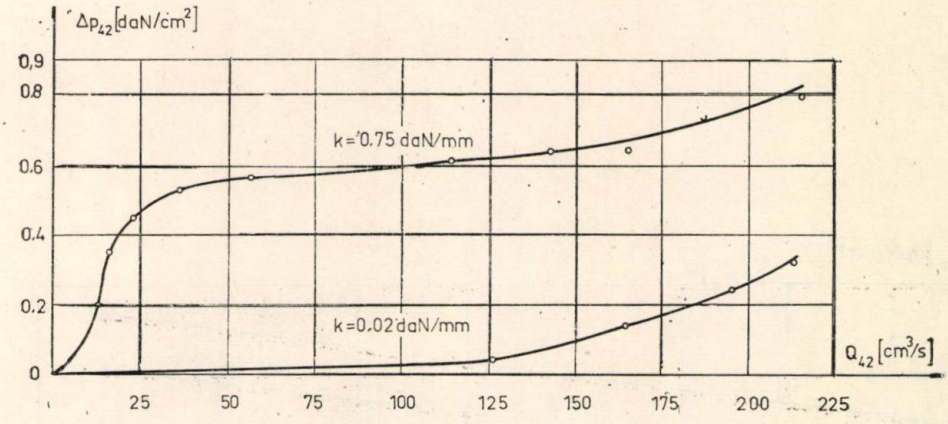


Fig. 5. — Caracteristica debit-cădere de presiune a supapei inferioare la destindere.

calculează valorile corespunzătoare ale vitezei v din ecuația $(1.1)_1$. Introducînd acum valorile lui Q_{12} și v în $(1.1)_2$ se determină Q_{42}, iar din diagrama din figura 5 rezultă presiunea p_2. Se poate calcula apoi diferența $F_d - R_d$ din relația (1.5) obținîndu-se astfel caracteristica de lucru $F_d(v)$ a amortizorului la destindere.

La cursa de compresie au fost adoptate două scheme de rezolvare diferite, corespunzătoare regimurilor de lucru dinaintea și după deschiderea supapei S_d. Pînă la deschiderea supapei S_d avem $Q_{14} = 0$. Neglijînd în prima aproximație scurgerile prin interstițiul tijă-ghidaj ($Q_{13} = 0$)

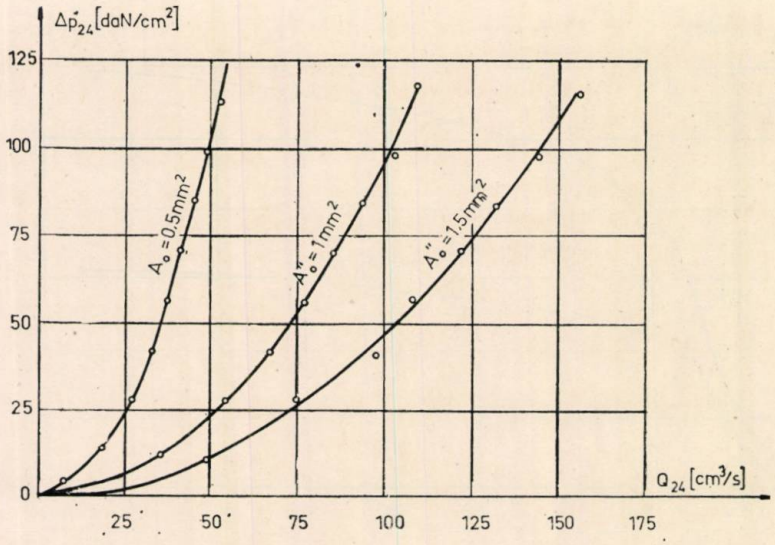


Fig. 6. — Caracteristica debit-cădere de presiune a supapei inferioare la compresie.

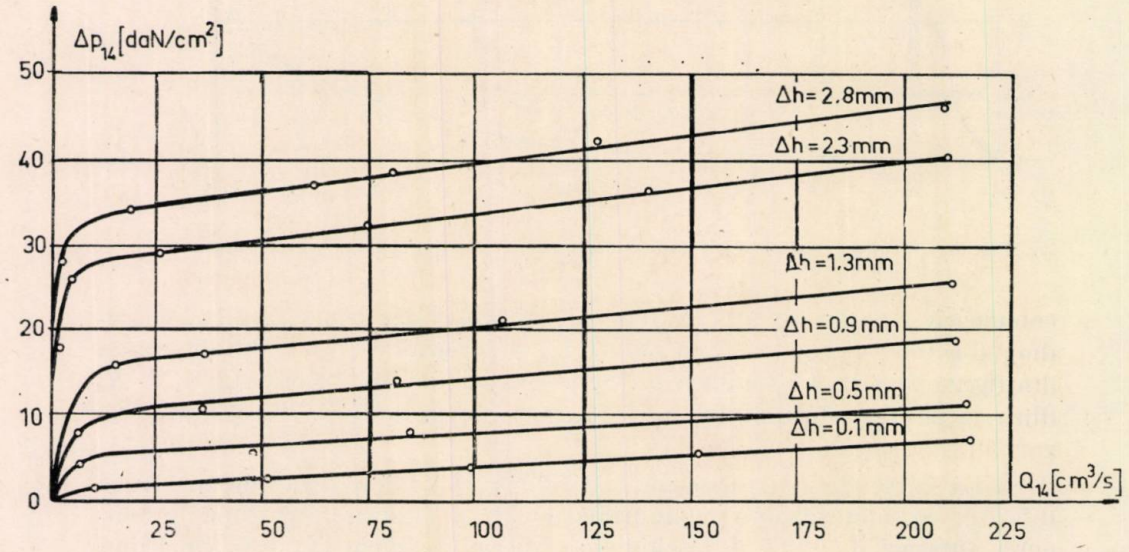


Fig. 7. — Caracteristica debit-cădere de presiune a supapei de descărcare.

și considerînd un v dat se calculează debitele Q_{21} și Q_{24} din ecuațiile (1.2) și se obțin valorile corespunzătoare ale presiunilor p_1 și p_2 din diagramele date în figurile 4 și 6. Din figura 8 rezultă acum debitul Q_{13} pentru valoarea lui p_1 astfel determinată. Se calculează noile valori ale debitelor Q_{21} și Q_{24} din ecuațiile (1.2) în care s-a introdus Q_{13} obținut mai sus, procesul iterativ continuînd pînă cînd valorile presiunilor p_1 și p_2 se stabilizează. Acest algoritm de calcul este convergent pentru valori ale lui p_1 mai mici decît presiunea necesară pentru deschiderea supapei S_d.

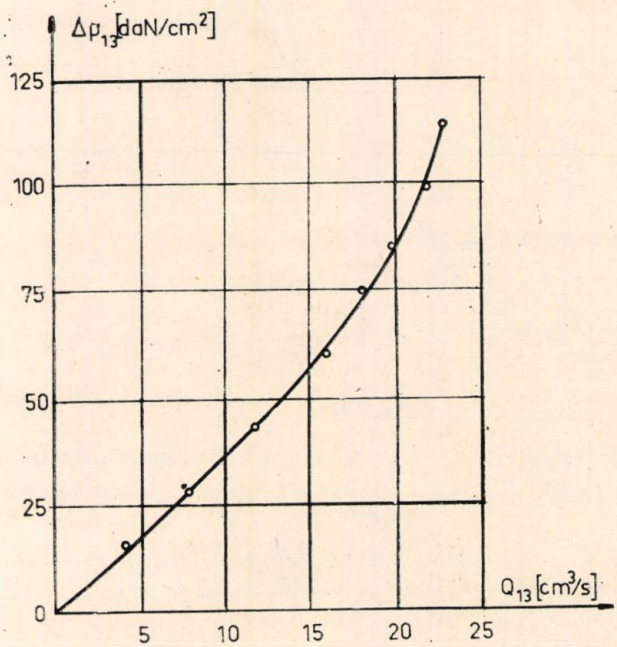


Fig. 8. — Caracteristica debit-cădere de presiune a interstițiului tijă-ghidaj.

După deschiderea supapei S_d se adoptă o schemă de calcul care se bazează pe faptul că în această situație variația diferenței de presiune Δp_{21} este foarte lentă în raport cu creșterea vitezei v. Pentru început se consideră ultima valoare a lui Δp_{21} calculată prin metoda de mai sus. Considerînd un șir de valori pentru presiunea p_2 se determină debitele Q_{24}, Q_{14} și Q_{13} din diagramele date în figurile 6, 7 și 8, iar din sistemul (1.2) rezultă valorile lui v și Q_{21}. Din figura 4 se obține Δp_{21}, procesul iterativ continuînd pînă cînd valoarea lui Δp_{21} se stabilizează. Convergența algoritmului este foarte rapidă, de cele mai multe ori fiind suficientă o singură iterație.

Pentru ambele scheme de calcul caracteristica de lucru $F_c(v) - R_c$ a amortizorului la compresie se determină din ecuația (1.6).

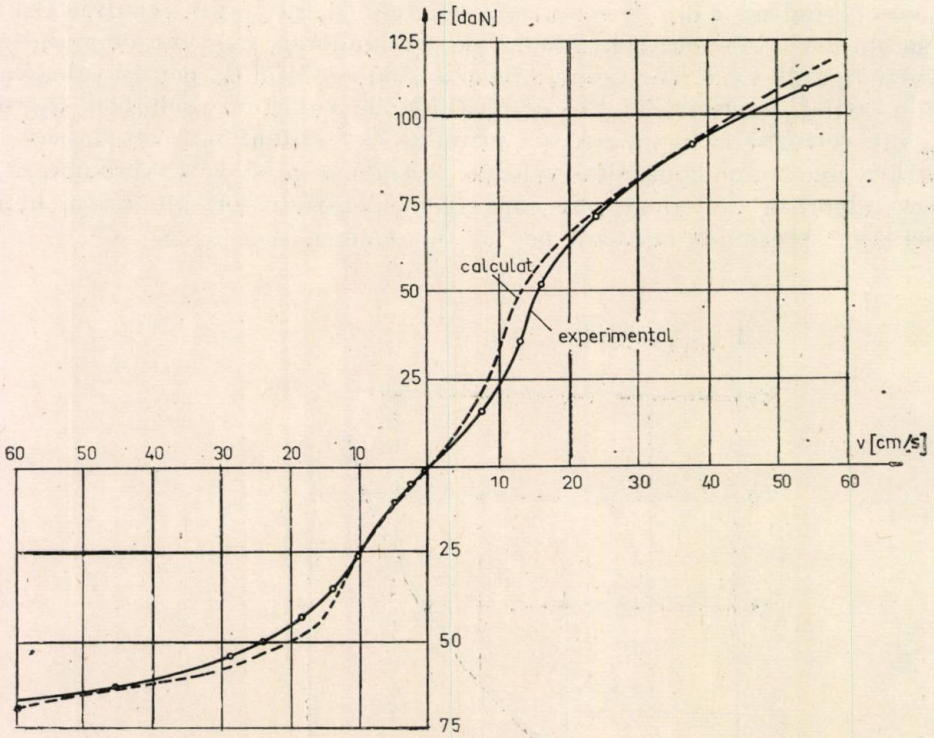


Fig. 9. Caracteristica forță-viteză a unui amortizor hidraulic cu $A_0' = 1$ mm², $A_0'' = 0{,}5$ mm², $\Delta h = 2{,}3$ mm, $k_p = 1{,}16$ daN/mm².

În figura 9 este dată diagrama de lucru $F(v) - R$ determinată prin metoda descrisă pentru parametrii $A_0' = 1$ mm², $A_0'' = 0{,}5$ mm², $\Delta h = 2{,}3$ mm, $k_p = 1{,}16$ daN/mm.

§ 2. INSTALAȚIE PENTRU STUDIUL EXPERIMENTAL AL CARACTERISTICILOR DE LUCRU

Pentru studiul experimental al caracteristicilor de lucru forță-viteză $F-v$ și forță-deplasare $F-d$ a fost folosită o instalație electronică complexă proiectată și realizată de Institutul de fizica și tehnologia materialelor, București, care permite vizualizarea simultană a acestora pe ecranul unui tub cinescop cu remanență mare și cu diagonala de 50 cm.

Schema bloc a instalației este dată în figura 10.

În figura 11 se prezintă montajul experimental constînd din standul de antrenare a amortizorului și instalația electronică pentru vizualizarea caracteristicilor de lucru care se înregistrează prin fotografiere.

S-a utilizat un stand pentru amortizoare de tip RIV care permite o reglare continuă a cursei (0—100 mm), frecvența de antrenare fiind aproximativ 1,08 Hz. Se obține astfel o viteză maximă de 0,33 m/s.

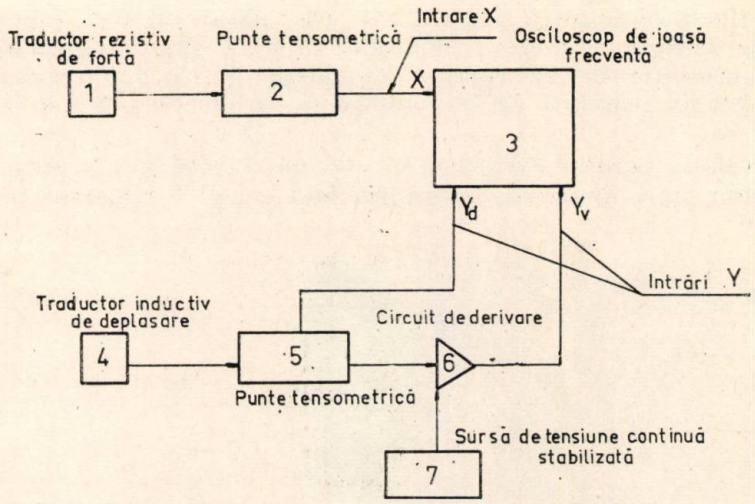


Fig. 10. — Schema bloc a instalației electronice pentru determinarea și vizualizarea simultană a caracteristicilor forță-viteză și forță-deplasare a amortizoarelor hidraulice.

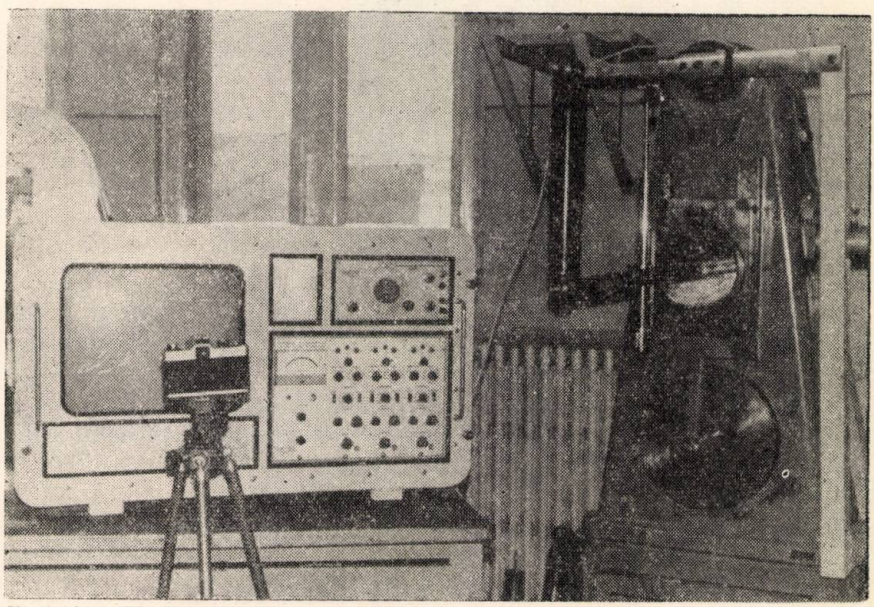


Fig. 11. — Montaj experimental pentru determinarea și vizualizarea caracteristicilor de lucru ale amortizoarelor hidraulice.

Deplasarea relativă a capetelor amortizorului este măsurată de un traductor diferențial inductiv cu domeniul de măsură $\pm$ 100 mm și o sensibilitate de 1,6 mV/mm. Pentru obținerea vitezei relative, semnalul de deplasare este introdus într-un circuit de derivare de joasă frecvență cu caracteristică liniară între 1 și 25 Hz.

Traductorul de forţă este realizat prin aplicarea a două mărci tensometrice pe bara de prindere a capătului superior al amortizorului.

În instalaţie sînt încorporate trei canale dintr-o punte tensometrică tip N2302 şi un generator de joasă frecvenţă tip EO501, toate de fabricaţie românească.

Instalaţia permite înregistrarea directă, rapidă şi cu precizie ridicată a unui mare număr de diagrame, fără a mai fi necesare prelucrări ulterioare.

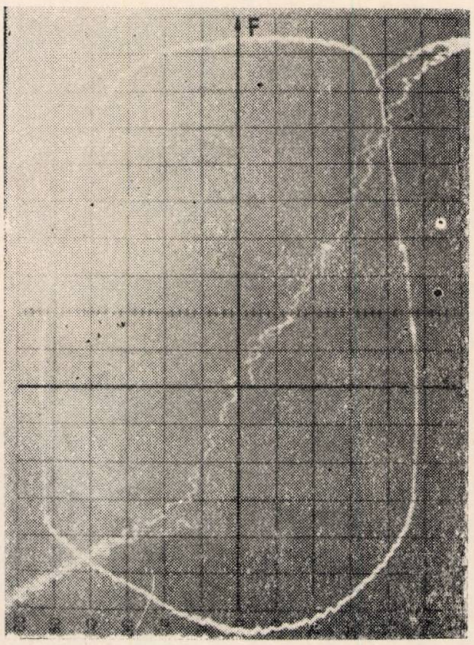


Fig. 12. — Diagramele forţă-viteză şi forţă-deplasare ale unui amortizor hidraulic cu $A'_0 = 1$ mm², $A'_0 = 0{,}5$ mm², $\Delta h = 2{,}3$ mm, $k_p = 1{,}16$ daN/mm².

De asemenea, este posibilă urmărirea variaţiei în timp a formei caracteristicilor de lucru, provocată de fenomene de cavitaţie sau de creşterea temperaturii din amortizor.

În figura 12 sînt prezentate caracteristicile de lucru $F-v$ şi $F-d$ înregistrate prin fotografiere pentru un amortizor de tipul celui calculat în §1. Diagrama experimentală din figura 9 a fost trasată pe baza celei din figura 12.

Pe diagramă, unei diviziuni îi corespund pe axa forţelor 10 daN, iar pe axa vitezelor 5 cm/s.

3. STUDIUL FENOMENULUI DE CAVITAŢIE

Cavitaţia apare atunci cînd presiunea statică scade sub presiunea atmosferică, provocînd creşterea treptată la dimensiuni vizibile a bulelor de aer microscopice prezente în lichidul din amortizor. În cazul în care presiunea scade în continuare sub presiunea de vaporizare a lichidului din amortizor, cavitaţia se amplifică prin apariţia bulelor de vapori. În sfîr-

șit, la presiuni ce se apropie de -1 daN/cm^2 față de presiunea atmosferică pot apărea discontinuități în masa de lichid.

La o creștere a presiunii hidrostatice ulterioară apariției cavitației, bulele de aer se aglomerează rămînînd stabile, pe cînd cele de vapori explodează și produc eroziunea pieselor cu care vin în contact.

În cazul amortizoarelor hidraulice, apariția cavitației este favorizată de următoarele circumstanțe :

a. La ieșirea din supape și orificii calibrate apar viteze foarte mari și ca urmare presiuni foarte mici.

b. Regimul de scurgere este în cea mai mare parte turbulent.

c. Există practic totdeauna bule de aer microscopice nedizolvate în lichidul din amortizor. În cazul amortizoarelor bitubulare această circumstanță este amplificată de contactul permanent al lichidului din amortizor cu aerul din cilindrul exterior.

d. Ca urmare a uzurii apar inevitabil particule solide (impurități), care favorizează nucleerea bulelor de aer.

La amortizoarele bitubulare cavitația se produce la cursa de destindere și se manifestă la cursa de compresie prin apariția unor întîrzieri în

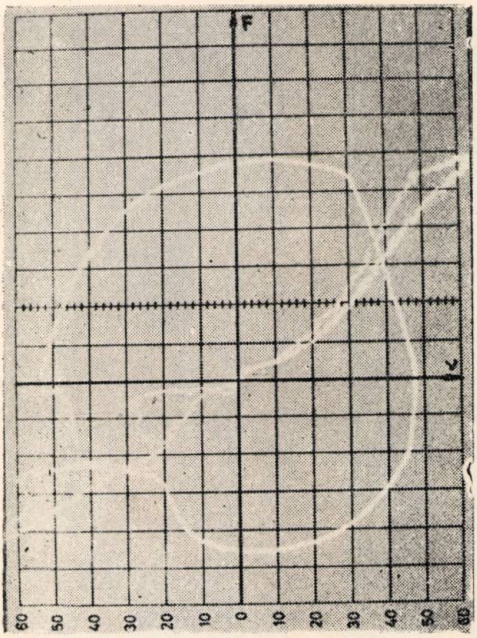


Fig. 13. — Diagramele forță-viteză și forță-deplasare ale unui amortizor hidraulic cu $A_0' = 0{,}5$ mm^2, $A_0'' = 0{,}5$ mm^2, $k_i = 0{,}75$ daN/mm (varianta inițială).

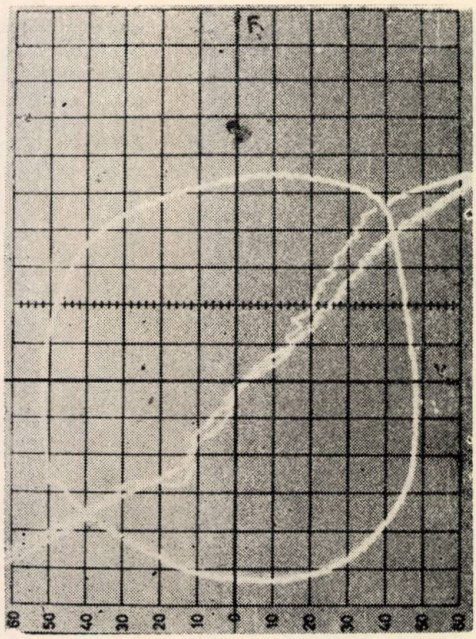


Fig. 14. — Diagramele forță-viteză și forță-deplasare ale unui amortizor hidraulic cu $A_0' = 0{,}5$ mm^2, $A_0'' = 0{,}5$ mm^2, $k_i = 0{,}02$ daN/mm (varianta modificată).

creșterea forței F_c cu atît mai pregnante cu cît viteza maximă de lucru este mai mare.

În figurile 13 și 14 sînt date caracteristicile de lucru $F-v$ și $F-d$ realizate de același amortizor în două variante constructive pentru supapa inferioară S_i și anume :

a. varianta iniţială, la care arcul supapei avea rigiditatea $k_i = 0{,}75$ daN/mm ;

b. varianta modificată, la care arcul supapei are rigiditatea $k_i = 0{,}02$ daN/mm.

Pe caracteristicile de lucru corespunzătoare variantei a se poate observa modul în care cavitaţia se manifestă la cursa de compresie prin apariţia a două zone de „întîrziere" a forţelor. Prima corespunde aglomerării bulelor de aer din lichid imediat după începerea cursei de compresie, iar a doua trecerii mai uşoare a bulelor de aer prin interstiţiul format la deschiderea supapei din piston. În continuare, distorsiunile dispar deoarece bulele de aer au fost eliminate din camera inferioară în camera superioară şi cilindrul exterior.

În varianta b nu se constată distorsiuni ale caracteristicilor de lucru datorate cavitaţiei.

Comportarea calitativ deosebită a caracteristicilor de lucru în cele două variante se explică prin faptul că, pentru aceeaşi viteză maximă atinsă în timpul funcţionării, fenomenul de cavitaţie apare şi se dezvoltă

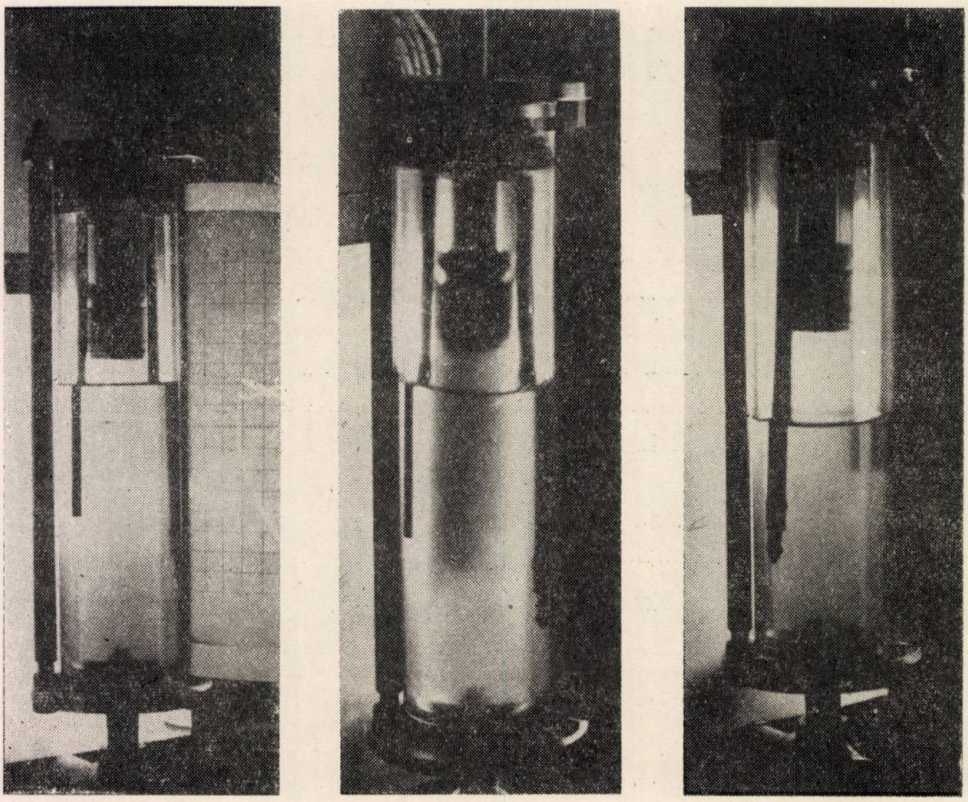


Fig. 15. — Vizualizarea funcţionării hidraulice pe un amortizor transparent : *a* — amortizor în repaus ; *b* — cursa de destindere a unui amortizor cu supapă inferioară cu arc rigid (varianta iniţială) ; *c* — cursa de destindere a aceluiaşi amortizor cu supapă inferioară cu arc slab (varianta modificată).

mai rapid în cazul supapei inferioare cu arc rigid decît în cel al supapei inferioare cu arc slab. Aceasta rezultă foarte clar și din compararea diagramelor 1 și 2 din figura 5. În varianta b presiunea p_2 este cu aproximativ 0,5 atm mai mare decît în varianta a, încă de la debite foarte mici. Încercarea amortizoarelor pe standuri (de ex. MILLETO sau HYDROPULS SCHENK) a arătat că în cazul adoptării variantei b manifestarea fenomenului de cavitație apare numai la atingerea unor viteze maxime de peste 0,7 m/s sau la temperaturi mari de lucru (peste 100°C).

Pentru vizualizarea apariției și dezvoltării fenomenului de cavitație au fost proiectate și executate amortizoare transparente avînd cilindrul de lucru și cel exterior din plexiglas, celelalte repere păstrîndu-se nemodificate.

În figurile 15 *a*, *b*, *c* este reprezentat amortizorul transparent în funcționare la destindere cu cele două variante constructive pentru supapa inferioară și în repaus. Deși viteza pe stand este aceeași în ambele cazuri ($v = 0{,}33$ m/s) se observă că în timp ce la amortizorul cu supapa inferioară cu arc rigid apare fenomenul de cavitație (pus în evidență de zona mai închisă la culoare din urma pistonului), la cel cu supapa inferioară cu arc slab acest fenomen nu apare.

CONCLUZII

Metoda grafo-analitică de calcul prezentată conduce la rezultate superioare celor obținute utilizînd modele simplificate ale diferitelor subansamble ale amortizorului.

Instalația electronică complexă de înregistrare directă a caracteristicilor de lucru $F-v$ și $F-d$ permite efectuarea rapidă și precisă a unui volum mare de experimentări pentru studiul amortizoarelor.

Analiza fenomenului de cavitație a condus la o îmbunătățire a funcționării amortizoarelor, constînd în lărgirea domeniului de viteze de lucru pentru care acest fenomen nu se manifestă. Limitarea cavitației pentru regimurile de funcționare normale conduce la o creștere a eficacității amortizoarelor și la reducerea zgomotelor funcționale.

Primită la redacție la 20 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. A. D. Derbaremdiker, *Rasciot drosseliruiuşcih sistem gidravliceskih amortizatorov*, Avtomobilnaia promîşlennosti, *2* (1960).
2. F. Dincă, C. Teodosiu, *Calculul amortizoarelor hidraulice telescopice*, St. cerc. mec. apl., **16**, *4* (1964).
3. I. Drăghici, *Contribuții la studiul teoretic și experimental al amortizoarelor hidraulice telescopice auto*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Brașov, 1958.
4. R. Eberan-Eberhorst, J. H. Willich, *Beitrag zur Theorie der Schwingungsdämpfers*, A.T.Z., **64**, *81—90* (1962).

AMORTIZOARE SECVENȚIALE PENTRU AUTOVEHICULE

de F. DINCĂ, O. GÜNDISCH, V. NICOLAE, T. SIRETEANU, I. ROȘU

Institutul de fizica și tehnologia materialelor — IFTM

Lucrarea prezintă unele aspecte ale reducerii nivelului de vibrații la autovehicule, prin introducerea în suspensie a unor amortizoare avînd principii de funcționare diferite de cele clasice. Este făcută o apreciere globală a eficienței noilor soluții preconizate și se dă un algoritm de calcul pentru determinarea funcției de transfer a unui sistem oscilant, a cărui disipare de energie este realizată cu unul dintre aceste tipuri de amortizoare.

Amortizoarele clasice disipă energie pe toată durata unei mișcări oscilatorii, în funcție de viteza relativă dintre masa suspendată și puncte. Caracteristicile lor disipative pot avea expresii analitice diferite la cursele de compresie și destindere (amortizoare cu caracteristică asimetrică), și în general are loc și o limitare a creșterii forțelor, cînd viteza de lucru depășește o anumită valoare.

Cercetări recente în direcția îmbunătățirii confortului și ținutei de drum a autovehiculelor, au condus la soluții constructive (aflate încă în stadiu de experiment) bazate pe principii de funcționare diferite de cele clasice. Astfel, J. M. Federspiel [1] propune amortizorul secvențial, iar A. G. Thompson [2] propune suspensii active, în care un actuator hidraulic disipă sau introduce energie în sistem, în funcție de răspunsul acestuia.

Cu toate că și amortizoarele clasice lucrează, în general, diferențiat pe diferite intervale ale mișcării oscilatorii, tipurile noi, menționate mai sus, se deosebesc principial de acestea prin anularea secvențială a disipării, sau chiar prin introducerea de energie în suspensie.

Reducerea nivelului de vibrații pe baza acestor principii de funcționare poate fi ilustrată intuitiv, pornind de la analiza unui sistem cu un singur grad de libertate, ca cel reprezentat în figura 1.

În figura 2 sînt reprezentate caracteristicile amplitudine-frecvență ale acestui sistem, corespunzătoare unor amortizoare clasice liniare cu reglaje diferite (3_1, 3_2) alături de cele obținute de J. M. Federspiel pe un model experimental cu amortizare secvențială (2) și de A. G. Thompson prin modelarea analogică a suspensiilor active (1).

Cu notaţiile din figura 1, ecuaţia de mişcare a sistemului considerat poate fi scrisă sub forma

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{x}_0, \tag{1}$$

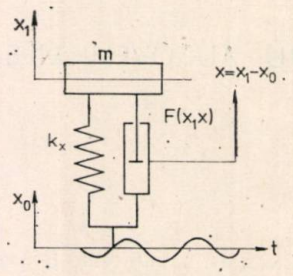


Fig. 1

unde

$$f(x, \dot{x}) = \frac{F(x, \dot{x})}{m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \tag{2}$$

Ţinînd seama de relaţia $x_1 = x + x_0$, din ecuaţia (1) rezultă că acceleraţia masei suspendate are expresia

$$|\ddot{x}_1| = |f(x, \dot{x}) + \omega^2 x|, \tag{3}$$

din care se poate trage concluzia că o suspensie este cu atît mai bună din punct de vedere al confortului cu cît $M[[f(x, \dot{x}) + \omega^2 x]^2]$ are o valoare mai mică, M fiind operatorul de medie.

Presupunînd că $x(t)$ este o funcţie armonică, în figura 3 au fost trasate alături de caracteristica elastică $\omega^2 x(a)$, următoarele caracteristici de disipare: (b) cea corespunzătoare principiului de funcţionare activă, (c) cea secvenţială în varianta Federspiel, secvenţială într-o variantă provenită direct din cea clasică (d), precum şi caracteristica disipativă a unui amortizor clasic liniar (e).

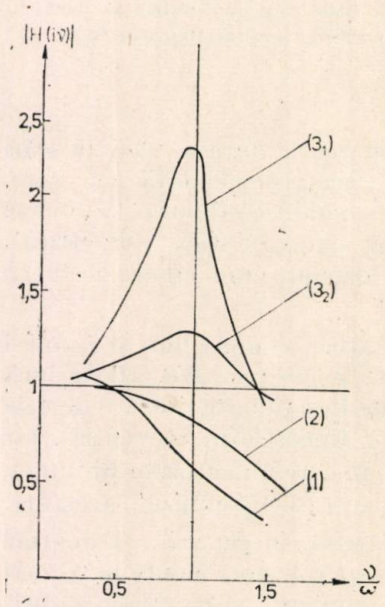


Fig. 2

Comparînd aceste diagrame se constată că

$$0 = M[\ddot{x}_1^2]_b < M[\ddot{x}_1^2]_c < M[\ddot{x}_1^2]_d < M[\ddot{x}_1^2]_e, \tag{4}$$

ceea ce explică eficienţa sporită a suspensiilor active, sau a celor echipate cu amortizoare secvenţiale, în raport cu soluţia clasică.

Menţionăm că figura 3 reprezintă o schemă aproximativă de funcţioare a suspensiilor respective în cursul unei perioade de oscilaţie, în care, ipoteza de armonicitate a lui $x(t)$, în condiţiile în care $f(x, \dot{x})$ este ca în diagramele b, c şi d, constituie o primă aproximaţie a desfăşurării fenomenului, atunci cînd sistemul este supus la o excitaţie armonică.

Realizarea practică cît şi modelarea teoretică a caracteristicilor disipative b şi c comportă dificultăţi foarte mari.

Soluția constructivă propusă de J. M. Federspiel realizează o forță de amortizare puternică la începutul secvențelor 2 și 4 care descrește continuu pe aceste secvențe (cînd $|\dot{x}|$ crește), anulîndu-se la începutul secvențelor 1 și 3 (pentru $|\dot{x}| = \max$) și rămînînd nulă pe toată durata (cînd $|\dot{x}|$ descrește). Cu alte cuvinte, sistemul nu are amortizare atîta timp cît

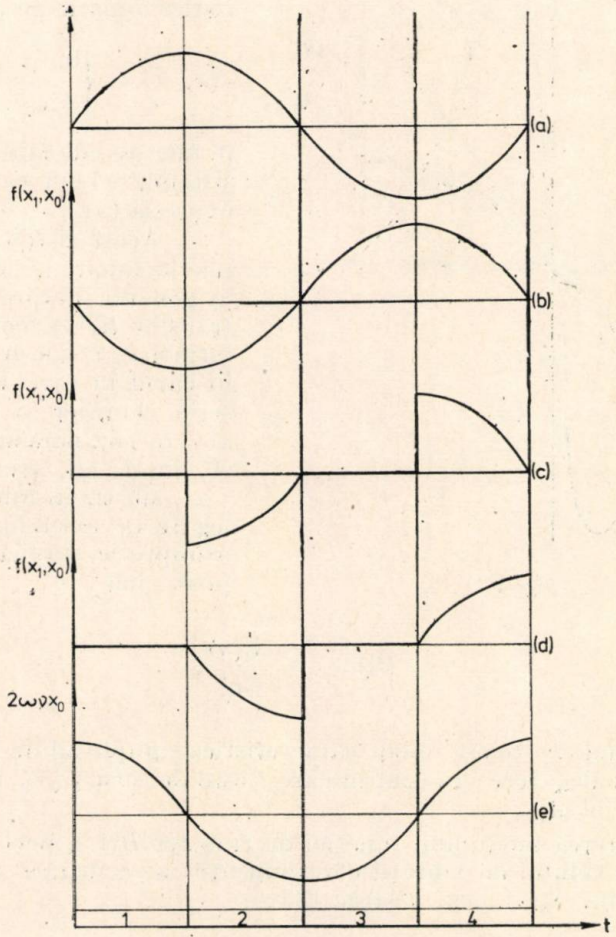


Fig. 3

se îndepărtează de poziția de echilibru, fiind puternic amortizat în momentul întoarcerii pentru ca apoi amortizarea să se atenueze pe măsură ce se apropie de această poziție. Se observă că această soluție diferă de cea clasică atît prin faptul că disiparea de energie se anulează pe anumite secvențe, cît și prin aceea că forțele de amortizare sînt maxime în vecinătatea vitezei relative nule, și descresc atunci cînd viteza relativă crește, ceea ce nu se realizează cu nici un tip de amortizor clasic. În figura 4 sînt reprezentate pentru comparație diagramele de lucru ale unui amortizor de tip Federspiel (1) și ale unui amortizor clasic (2).

Caracteristica disipativă (d) este o caracteristică secvenţială în sensul definiţiei adoptate, obţinută prin anularea forţei de amortizare dezvoltată de un amortizor clasic pe secvenţele 1 şi 3, (diagrama 3 din fig. 4). Întrucît această soluţie nu prezintă dificultăţi de realizare practică deosebite, iar forma diagramei (d) poate fi modelată prin caracteristica liniară pe porţiuni,

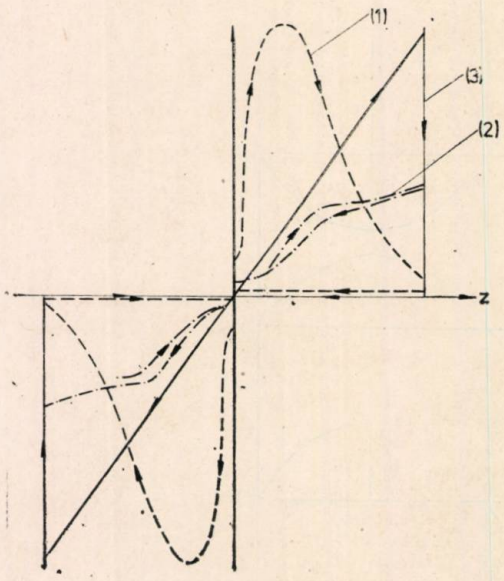


Fig. 4

$$f(x, \dot{x}) = \begin{cases} 0, & x\dot{x} \geqslant 0, \\ 2\zeta\omega\dot{x}, & x\dot{x} < 0, \end{cases} \tag{5}$$

în lucrarea de faţă se analizează sistemul (1) în care $f(x, \dot{x})$ are expresia (5).

Acest sistem fiind un sistem neliniar, nu se poate vorbi în general despre o funcţie de transfer $H(i\nu)$, corespunzătoare intrării $x_0(t)$ şi ieşirii $x_1(t)$. Totuşi, în cazul în care dezvoltarea în serie Fourier a soluţiei $x_1(t)$ are o componentă dominantă $A_1 \sin(\nu t + \varphi)$, atunci cînd $x_0 = A_0 \sin \nu t$, în anumite condiţii legate de existenţa unei soluţii asimptotic stabilă în mare, se poate lua

$$|H(i\nu)| = \frac{A_1(\nu)}{A_0}, \tag{6}$$

A_1/A_0 definind în acest mod caracteristica amplitudine-frecvenţă [5] (se ia $A_0 = 1$ deoarece în cazul în care f este de forma (5), răspunsul este proporţional cu A_0).

Cunoaşterea modulului funcţiei de transfer $H(i\nu)$, permite evaluarea intensităţii nivelului de vibraţii corespunzător unei intrări $x_0(t)$, cu densitatea spectrală $S_0(\nu)$ prin relaţia [3]:

$$M[x_1^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(i\nu)|^2 \, S_0(\nu) \, d\nu. \tag{7}$$

Această relaţie exprimă necesitatea obţinerii unui $|H(i\nu)|$ cît mai mic, pe toată banda de frecvenţe, în care $S_0(\nu)$ ia valori importante.

Pornind de la metoda experimentală utilizată de Federspiel pentru obţinerea diagramei (2) din figura 2, rezultă algoritmul care permite determinarea numerică a funcţiei $H(i\nu)$ pentru cazul (d) din figura 3. Completîndu-l corespunzător, el poate fi folosit şi pentru analiza altor sisteme cu caracteristici liniare pe porţiuni.

Luînd $x_0 = \sin \nu t$, și considerînd că sistemul pleacă din poziția de echilibru, la momentul $t = 0$, se iau condițiile inițiale

$$x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = \nu, \tag{8}$$

care, împreună cu ecuația de mișcare,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \nu^2 \sin \nu t, \tag{9}$$

determină soluția în secvența 1.

În secvența 2 ecuația de mișcare și condițiile inițiale sînt

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \nu^2 \sin \nu t,$$

$$x(t_1) = x_1, \ \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1, \tag{10}$$

unde t_1 este prima valoare a lui t pentru care produsul $x\dot{x} = 0$.

Soluția ecuației diferențiale (9) determinată de condițiile inițiale (8) sau cea a ecuației diferențiale (10) cu condițiile inițiale corespunzătoare se obține prin particularizări în soluția ecuației diferențiale (11)

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega\dot{x} + \omega^2 x = \nu^2 \sin \nu t, \tag{11}$$

cu condițiile inițiale

$$x(t_i) = u,$$

$$\dot{x}(t_i) = \nu v. \tag{12}$$

Pentru $0 \leqslant \zeta < 1$, soluția acestei ecuații este

$$x = A e^{-\zeta\omega(t-t_i)} \cos[\omega_1(t - t_i) - \varphi] + x_p(t), \tag{13}$$

unde

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sqrt{|u_1^2 + 2\zeta\omega_1 v_1 + v_1^2|}}{\sqrt{|1 - \zeta^2|}}, \\
u_1 &= u - \frac{\xi^2}{\sqrt{\Delta}} \sin(\nu t_i - \varphi), \\
v_1 &= v - \frac{\xi^2}{\sqrt{\Delta}} \sin(\nu t_i - \varphi), \\
\Delta &= (1 - \xi^2)^2 + 4\zeta^2\xi^2, \\
\varphi &= \arg(a_1, b_1), \ a_1 = u_1, \ b_1 = \frac{\zeta u_1 + v_1}{\sqrt{|1 - \zeta^2|}}, \\
\omega_1 &= \omega\sqrt{|1 - \zeta^2|}, \ \xi = \frac{\nu}{\omega}, \\
x_p(t) &= \frac{\xi^2}{\sqrt{\Delta}} \sin(\nu t - \varphi), \\
\varphi &= \arg\left(\frac{1 - \xi^2}{\sqrt{\Delta}}, \ \frac{2\zeta\xi}{\sqrt{\Delta}}\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Pentru $\zeta > 1$ şi $a_1^2 - b_1^2 > 0$, soluţia este

$$x(t) = A \operatorname{ch}[\omega_1(t - t_i) - \varphi] \exp[-\zeta\omega(t - t_i)] + x_p(t), \tag{15}$$

unde

$$A = (\operatorname{sign} a_1)\sqrt{a_1^2 - b_1^2} = (\operatorname{sign} a_1)\sqrt{-\frac{u_1^2 + 2\zeta u_1 v_1 + v_1^2}{\zeta^2 - 1}}, \tag{16}$$

$$\varphi = \ln \frac{a_1 - b_1}{A}.$$

Pentru $\zeta > 1$ şi $a_1^2 - b_1^2 < 0$, soluţia va fi

$$x(t) = A \operatorname{sh}[\omega_1(t - t_i) - \varphi] \exp[-\zeta\omega(t - t_i)] + x_p(t), \tag{17}$$

unde

$$A = (\operatorname{sign} b_1)\sqrt{b_1^2 - a_1^2} = (\operatorname{sign} b_1)\sqrt{\frac{u_1^2 + 2\zeta u_1 v_1 + v_1^2}{\zeta^2 - 1}}, \tag{18}$$

$$\varphi = \ln \frac{b_1 - a_1}{A}.$$

Presupunînd că :

— există o mişcare periodică de perioadă $T = \dfrac{2\pi}{\nu}$ asimptotic stabilă în mare $\bar{x}$, proporţională cu A_0 ;

— există în soluţie o armonică dominantă cu frecvenţa ν pentru care coeficientul $A_1(\nu)$ al dezvoltării soluţiei în serie Fourier este mai mare decît coeficienţii celorlalte armonici ; se poate obţine modulul funcţiei de transfer prin următorul algoritm :

1. se ia un interval $T_1 = nT$;

2. se face o discretizare a lui T_1 cu un pas $\tau = \dfrac{2\pi}{m\nu}$, luîndu-se m suficient de mare pentru a se obţine o analiză suficient de fină a fiecărei secvenţe ;

3. se precizează condiţiile iniţiale (8) ;

4. se analizează valorile lui x şi $\dot{x}$ pe această reţea, luînd pentru x forma (13) cu $\zeta = 0$;

5. se determină $t = t_1$ pentru care avem $x(t_1) = 0$ sau $\dot{x}(t_1) = 0$;

6. se testează inegalitatea $t_1 < T_1$; dacă aceasta se verifică, se trece la 7, dacă nu, se trece la analiza Fourier (11) ;

7. se calculează u şi v, respectiv u_1 şi v_1 ; dacă $\zeta > 1$ se calculează a_1 şi b_1 şi se identifică forma soluţiei ce urmează a fi folosită ;

8. se calculează x şi $\dot{x}$ cu formula corespunzătoare (13) (15) sau (17) ;

9. se determină t_2 pentru care $x(t_2) = 0$ sau $\dot{x}(t_2) = 0$;

10. se testează dacă $t_2 < T_1$, dacă da, se trece la 3, dacă nu, la analiza Fourier ;

11. se face analiza Fourier, se caută coeficientul $A_1(\nu)$ al armonicii dominante, și se pune $|H(i\nu)| = A_1(\nu)$.

Analizînd cu ajutorul acestui algoritm mișcarea sistemului din figura 1 cu $\omega = 10$ rad/s, s-a constatat :

a) Pentru un ζ dat, există un ξ pentru care amortizorul încetează de a mai lucra în patru secvențe în cadrul sistemului.

b) Pentru un ξ dat, există un ζ pentru care amortizorul încetează de asemenea să mai lucreze în patru secvențe în cadrul sistemului.

Situațiile anterioare apar datorită schimbării liniei de zero, într-un mod asemănător cu cel întîlnit la amortizoarele asimetrice. În figura 5 sînt prezentate cinci situații în care amortizorul rămîne secvențial, iar în figura 6 două situații în care încetează de a mai rămîne secvențial.

c) În toate cazurile analizate ($\zeta = 0{,}25$; $0{,}5$; $1{,}5$; 2), $\xi \in (0 ; 20)$, există o armonică dominantă, care are frecvența perturbației. Cu ajutorul acestora s-au construit funcțiile de transfer din figura 7.

În figura 7 sînt ilustrate de asemenea cele afirmate la punctele a) și b).

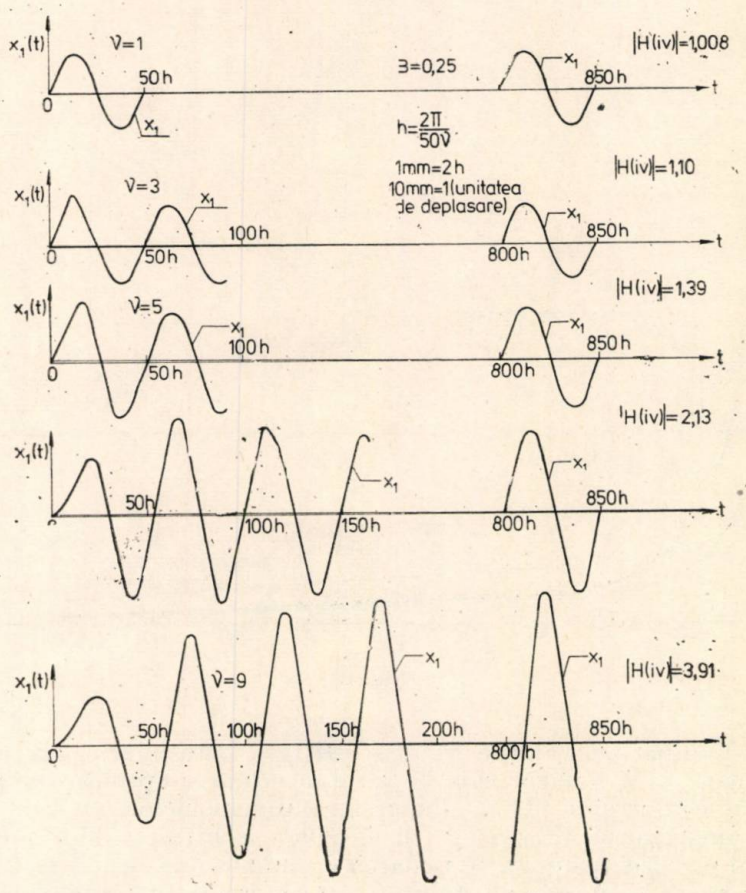


Fig. 5

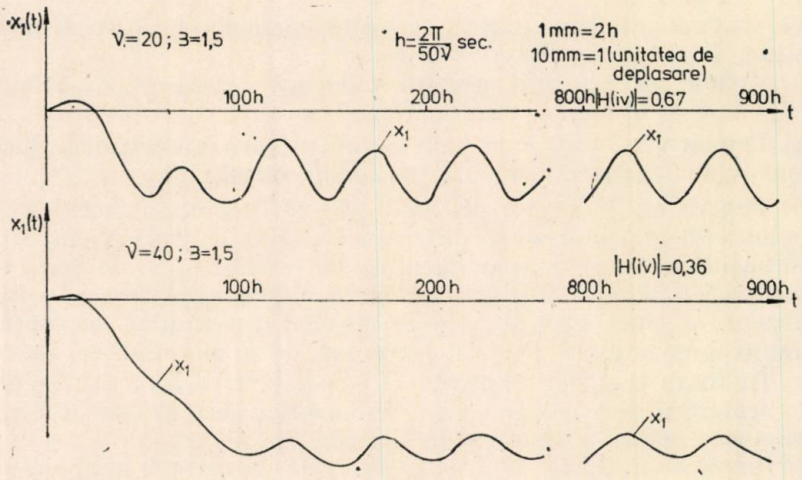


Fig. 6.

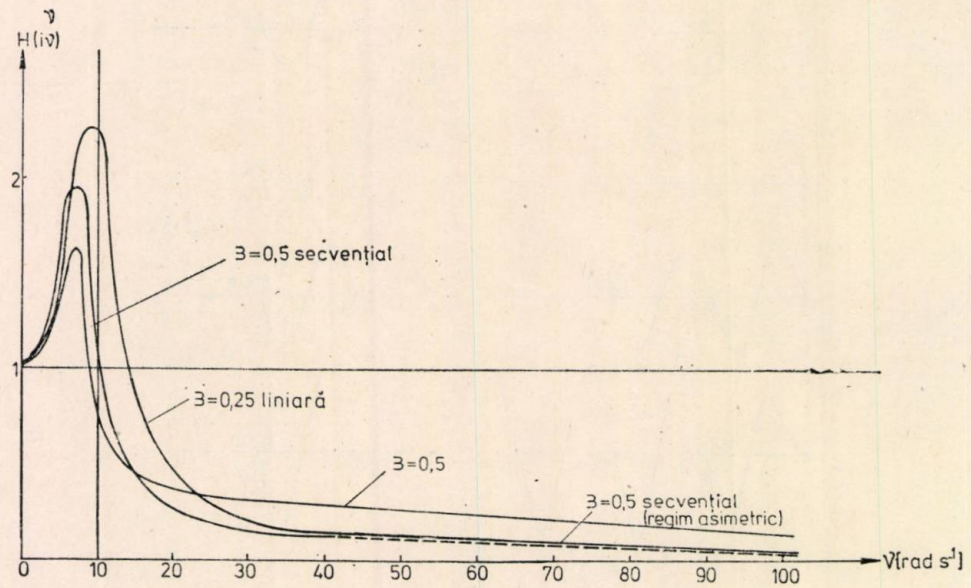


Fig. 7.

d) Comparînd valorile funcţiei $|H(i\nu)|$, corespunzătoare amortizorului liniar, cu $\zeta = 0{,}25$, care reprezintă situaţia optimă din punct de vedere al confortului [4] în dinamica autovehiculelor, cu cele obţinute pentru amortizorul secvenţial cu $\zeta = 0{,}5$, echivalent din punctul de vedere al energiei disipate, se remarcă o diminuare a lui $|H(i\nu)|$ în banda de frecvenţe $7 \div 30$ rad $\cdot$ s^{-1}. În afara acestei benzi diferenţele sînt nesemnificative.

Limita superioară a lui ζ utilizat pentru autovehicule fiind aproximativ 0,5 [4], în figura 5 s-a trasat și $|H(i\nu)|$ pentru amortizorul liniar cu $\zeta > 0{,}5$.

Cele prezentate confirmă afirmația rezultată din analiza figurilor 3 și 4 referitoare la eficiența amortizoarelor secvențiale. Totuși, aceste rezultate sînt nesatisfăcătoare, datorită fenomenului de îngropare, care, în afara schimbării gărzii la sol, într-un mod necontrolat, prin schimbarea liniei de zero amortizorul poate ajunge în situația de a lucra unilateral (numai cu destindere). Eliminarea acestui fenomen și găsirea unor soluții constructive simple, constituie primele probleme ce trebuie rezolvate, pentru trecerea în practică a soluțiilor de acest tip.

Primită la redacție la 9 august 1978

BIBLIOGRAFIE

1. J. Federspiel, *Ingineurs de l'automobile, 5*, 133 (1976).
2. A. G. Thompson, *Design of active suspensions*, The Institution of Mechanical Engineers, Proceedings, **185** 36/71 (1970—1971).
3. F. Dincă, C. Teodosiu, *Nonlinear and Random Vibrations*, Edit. Academiei R. S. România, Academic Press Inc., București, New York, London, 1973.
4. F. Dincă, T. Sireteanu, *Vibrații aleatoare în dinamica autovehiculelor*, St. cerc. mec. apl., *4*, **28** (1969).
5. F. Dincă, O. Gündisch, V. Nicolae, O. Berechet, T. Sireteanu, I. Roșu, *Efectele tipurilor de neliniaritate asupra regimurilor de vibrații ale sistemelor dinamice aleatoare* (lucrare finanțată de C.S.E.N.)

INFLUENȚA GROSIMII ASUPRA CÎMPURILOR MĂRIMILOR FIZICE ALE BARELOR ȘI PLĂCILOR GROASE

de G. KÜMBETLIAN

Institutul de marină „Mircea cel Bătrîn", Constanța

În cele ce urmează se prezintă concluziile cercetării privind influența grosimii asupra cîmpurilor de forțe tăietoare și momente încovoietoare din barele și plăcile groase solicitate la încovoiere cilindrică sub acțiunea sarcinilor biarmonice, pe baza unui model elaborat de autor și în concordanță cu rezultatele experimentale obținute în acest caz.

Pentru trasarea diagramelor de forțe tăietoare și momente încovoietoare ale plăcilor sau barelor, acestea se schematizează, reducîndu-se la suprafața mediană și, respectiv, axa barei. În calculul forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare nu se ține cont de grosimea relativă a mediului considerat, ceea ce duce la rezultate confirmate prin măsurări, pentru grosimi relative cel mult egale cu 1/20. Pentru grosimi relative mai mari, metoda clasică (tehnică) duce la obținerea unor rezultate care diferă mult de cele obținute prin măsurări.

Pentru a pune de acord teoria cu constatările practicii, autorul a elaborat un model general pentru calculul plăcilor (și barelor) groase [3], care duce la soluții generale în tensiuni și respectiv momentele încovoietoare și forțe tăietoare, pentru un mediu bidimensional sub sarcini biarmonice, care cuprind încărcările cele mai complexe întîlnite în practică.

Astfel, cu notațiile uzuale cunoscute din literatura de specialitate, pentru expresiile tensiunilor maxime și, respectiv, momentelor încovoietoare și forțelor tăietoare care interesează în acest caz, au fost stabilite formele :

$$\sigma_{xx_{\max}} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{h}{2}(w_{,xx}+\nu w_{,yy})+\frac{4+\nu}{48}h^3\Delta w_{,xx}\right\}-$$

$$-\frac{\nu(2+\nu)}{4(1-\nu)}p-\frac{73-56\nu+13\nu^2}{320(1-\nu)^2}h^2p_{,xx}-$$

$$-\frac{\nu(41-12\nu+\nu^2)}{320(1-\nu)^2}h^2p_{,yy}-$$

$$-\frac{3342-4121\,\nu+2528\,\nu^2-699\,\nu^3}{53\,760(1-\nu)^2}h^4\Delta p_{,xx}. \qquad (1)$$

$$M_{xx} = -D\left(w_{,xx} + \nu w_{,yy} + \frac{8+\nu}{40} h^2 \Delta w_{,xx}\right) - \frac{\nu(4+\nu)}{40(1-\nu)} h^2 p -$$

$$- \frac{583 - 208\,\nu + 3\nu^2}{13\,440(1-\nu)} h^4 p_{,xx} - \frac{\nu(311 - 104\,\nu + 3\,\nu^2)}{13\,440(1-\nu)^2} h^4 \Delta p -$$

$$- \frac{11\,570 - 14\,769\,\nu + 9120\,\nu^2 - 2\,519\,\nu^3}{967\,680(1-\nu)^2} h^6 \Delta p_{,xx}, \tag{2}$$

$$Q_{zx} \equiv T_{zx} = -D\Delta w_{,x} - \frac{8 - 3\nu}{40(1-\nu)} h^2 p_{,x} -$$

$$- \frac{1\,516 - 2\,010\,\nu + 1\,264\,\nu^2 - 350\,\nu^3}{26\,880(1-\nu)^2} h^4 \Delta p_{,x}. \tag{3}$$

În cazul încovoierii după o singură direcție, sarcina biarmonică poate fi exprimată prin funcția polinominală:

$$p = P + Qx + R\frac{x^2}{2} + S\frac{x^3}{3!} \tag{4}$$

căreia îi corespunde o funcție a deplasării, de forma

$$Dw = Z + Vx + U\frac{x^2}{2} + T\frac{x^3}{3!} + P\frac{x^4}{4!} +$$

$$+ Q\frac{x^5}{5!} + R\frac{x^6}{6!} + S\frac{x^7}{7!}, \tag{5}$$

în care Z, V, U și T sînt constante de integrare ce pot fi determinate din condițiile la limită pentru fiecare caz particular de placă în parte, iar P, Q, R și S, reprezintă sarcini.

Corespunzător acestui caz, expresiile pentru tensiuni, momente și forțe din relațiile (1)—(3), devin:

$$\sigma_{xx_{\max}} = -\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{h}{2} w_{,xx} + \frac{4+\nu}{48} h^3 \Delta w_{,xx}\right\} - \frac{\nu(2+\nu)}{4(1-\nu)} p -$$

$$- \frac{73 - 56\,\nu + 13\,\nu^2}{320(1-\nu)^2} h^2 p_{,xx} \tag{6}$$

sau, desfăcînd paranteza mare, introducînd modulul de rezistență al plăcii,

$$W_y = \frac{h^2}{6}, \tag{7}$$

şi rigiditatea la încovoiere a plăcii,

$$D = EI/(1 - \nu^2); \quad E = 2\mu(1 + \nu); \quad I = h^3/12, \tag{8}$$

şi efectuînd calculele,

$$\sigma_{xx_{\max}} = -\frac{1}{W_y} Dw_{,xx} - \frac{4 - \nu}{4(1 - \nu)} p - \frac{73 - 56\,\nu + 13\,\nu^2}{320(1 - \nu)^2} h^2 p_{,xx}, \tag{9}$$

$$M_{xx} = -D\left(w_{,xx} + \frac{8 + \nu}{40} h^2 \Delta w_{,xx}\right) - \frac{\nu(4 + \nu)}{40(1 - \nu)} h^2 p -$$

$$- \frac{583 - 480\,\nu + 104\,\nu^2 + 3\,\nu^3}{13\,440(1 - \nu)^2} h^4 p_{,xx} \tag{10}$$

sau, desfăcînd prima paranteză şi efectuînd calculele :

$$M_{xx} = -Dw_{,xx} - \frac{8 - 3\nu}{40(1 - \nu)} h^2 p - \frac{583 - 480\,\nu + 104\,\nu^2 + 3\,\nu^3}{13\,440(1 - \nu)^2} h^4 p_{,xx}, \tag{11}$$

iar forţa tăietoare $Q_{zx} \equiv T_{zx}$ se calculează cu relaţia (3).

Relaţiile (3)—(11) permit calculul şi trasarea diagramelor de forţe tăietoare şi momente încovoietoare pentru o mare varietate de plăci [5], [6].

În urma acestor calcule s-a constatat că în cazul plăcilor a căror grindă echivalentă este static determinată (rezemată la capete sau în consolă), cîmpurile de forţe tăietoare şi momente încovoietoare coincid cu cele corespunzătoare grinzii echivalente, în timp ce în cazul plăcilor a căror grindă echivalentă este static nedeterminată (de tipul celor din tabelul 1), cîmpurile forţelor tăietoare şi momentelor încovoietoare sînt diferite de cele ale plăcii „subţiri" în toate situaţiile de calcul, fiind puternic influenţate de grosimea relativă şi caracteristicile elastice (coeficientul de contracţie transversală ν), prin intermediul factorului :

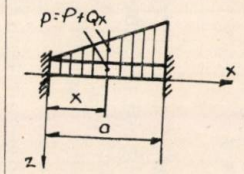
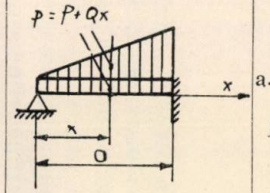
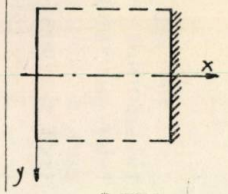
$$k^2 = \frac{8 - 3\,\nu}{1 - \nu}\left(\frac{h}{a}\right)^2. \tag{12}$$

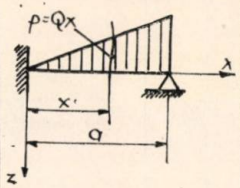
Pe baza soluţiilor determinate s-au calculat forţele tăietoare în dreptul laturilor cu constrîngeri, secţiunile de moment maxim şi valorile momentelor încovoietoare maxime pe interval şi în dreptul laturilor cu constrîngeri. Funcţiile corespunzătoare acestora sînt variabile cu grosimea relativă şi coeficientul de contracţie transversală.

Variaţiile factorilor adimensionali ai acestor funcţii s-au reprezentat pentru diferite tipuri de plăci, în diagramele din tabelul 2.

Tabelul 1

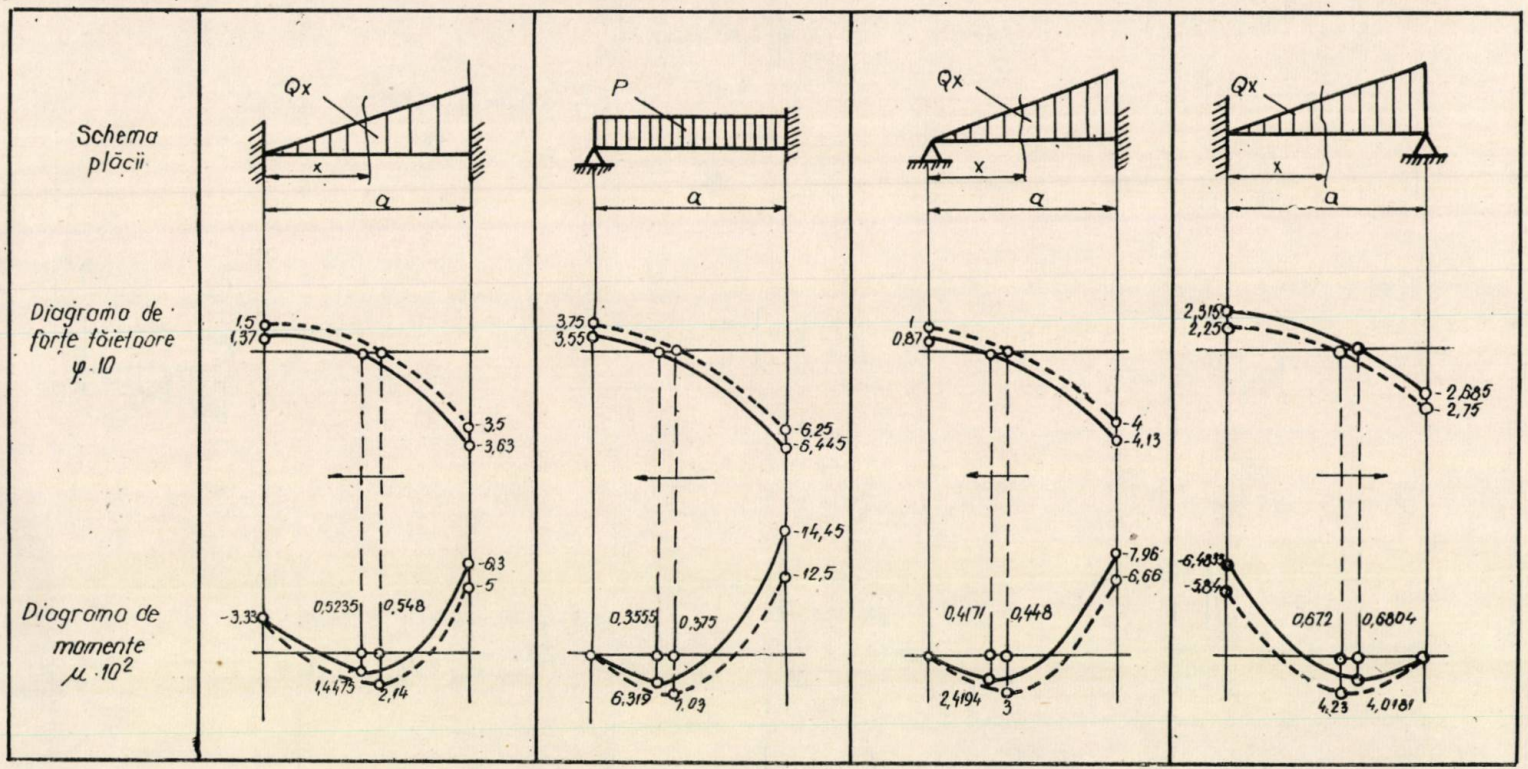
Înconvoierea unidimensională a plăcilor cu grindă echivalentă static nedeterminată și eroarea teoriei clasice pentru $\nu=1/2$ **și** $h/a=1/5$

Nr. crt.	Schema plăcii	Cîmpul deplasărilor	Cîmpul forțelor tăietoare $T_P=\varphi_P Pa$ și $T_Q=\varphi_Q Qa^2$		Cîmpul de momente $M_P=\mu_P Pa^2$ și $M_Q=\mu_Q Qa^3$	
1		$p=P+Qx$ $Dw=\frac{P}{24}(x^4-2ax^3+a^2x^2)+$ $+\frac{Q}{120}(x^5-3a^2x^3+2a^3x^2)$	$\varphi_Q=-\frac{1}{40}\left[20\left(\frac{x}{a}\right)^2-(6-K^2)\right]$		$\mu_Q=-\frac{1}{120}\left[20\left(\frac{x}{a}\right)^3-3(6-x^2)\frac{x}{a}+4\right]$	
			$\varphi_{Q_0}=\frac{6-K^2}{40}$	8,67%	$\mu_{Q_0}=-\frac{1}{30}$	–
			$(x/a)_{\varphi=0}=\sqrt{\frac{6-K^2}{20}}$	4,47%	$\mu_{Q_{max}}=-\frac{1}{120}\left[4-\sqrt{\frac{(6-K^2)^3}{5}}\right]$	32,3%
			$\varphi_{Qa}=-\frac{14-K^2}{40}$	3,72%	$\mu_{Qa}=-\frac{2+K^2}{40}$	26%
2	 	a. $p=P;\ Q=0$ $Dw_P=\frac{P}{240}\left[10x^4-\frac{3}{2}(10-\right.$ $-K^2)ax^3-3K^2a^2x^2+$ $\left.+\frac{1}{2}(3K^2+10)\,a^3x\right]$	$\varphi_P=-\frac{1}{80}\left[80\frac{x}{a}-3(10-K)^2\right]$		$\mu_P=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-\frac{3}{40}(10-K^2)\frac{x}{a}\right]$	
			$\varphi_{P_0}=\frac{3(10-K^2)}{80}$	5,2%	$\mu_{P_0}=0$	–
			$(x/a)_{\varphi=0}=\frac{3(10-K^2)}{80}$	5,2%	$\mu_{P_{max}}=\frac{9(10-K^2)^2}{12\,800}$	10,2%
			$\varphi_{Pa}=-\frac{50+3K^2}{80}$	3,12%	$\mu_{Pa}=-\frac{10+3K^2}{80}$	15,6%

3		b. $p = Qx$; $P = 0$ $Dw_Q = \frac{Q}{120}(x^5 - 2a^2x^3 + a^4x)$	$\varphi_Q = -\frac{1}{40}\left[20\left(\frac{x}{a}\right)^2 - (4 - K^2)\right]$		$\mu_Q = -\frac{1}{120}\left[20\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3(4 - K^2)\frac{x}{a}\right]$	
			$\varphi_{Q_0} = \frac{4 - K^2}{40}$	13%	$\mu_{Q_0} = 0$	–
			$(x/a)_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{4 - K^2}{20}}$	6,9%	$\mu_{Q_{max}} = \frac{1}{120}\sqrt{\frac{(4 - K^2)^3}{5}}$	19,36%
			$\varphi_{Qa} = -\frac{16 + K^2}{40}$	3,25%	$\mu_{Qa} = -\frac{8 + 3K^2}{120}$	19,5%
		$p = Qx$ $Dw = \frac{Q}{480}[4x^5 - 3(6 + K^2)a^2x^3 + (14 + 3K^2)a^3x^2]$	$\varphi = -\frac{1}{80}\left[40\left(\frac{x}{a}\right)^2 - (18 + K^2)\right]$		$\mu = -\frac{1}{240}\left[40\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3(18 + K^2)\cdot\frac{x}{a} + (14 + 3K^2)\right]$	
			$\varphi_0 = \frac{18 + K^2}{80}$	2,89%	$\mu_0 = -\frac{14 + 3K^2}{240}$	11%
			$(x/a)_{\varphi=0} = \sqrt{\frac{18 + K^2}{40}}$	1,25%	$\mu_{max} = -\frac{1}{240}\left[14 + 3K^2 - \sqrt{\frac{(18+K^2)^3}{10}}\right]$	5%
			$\varphi_0 = -\frac{22 - K^2}{80}$	2,36%	$\mu_a = 0$	–

Tabelul 2

Diagramele de forţe tăietoare şi momente încovoietoare în teoria exactă *(cu linie continuă, pentru* $\nu = 1/2$ **şi** $h/a = 1/5$*) şi în teoria clasică (cu linie întreruptă).*



Din interpretarea acestora rezultă că în teoria exactă a plăcii groase momentele maxime pozitive pe interval scad pe măsura creşterii grosimii relative şi a coeficientului de contracţie transversală, în timp ce momentele maxime negative din dreptul laturilor încastrate cresc în valoare absolută, odată cu grosimea relativă şi coeficientul de contracţie transversală, la una şi aceeaşi placă. Cele mai pronunţate creşteri le prezintă momentele pe laturile încastrate. Această comportare poate fi pusă pe seama efectelor de margine, a căror influenţă asupra cîmpurilor mărimilor fizice devine importantă, cînd se ţine cont de grosimea relativă a mediului. Comparînd între ele plăci cu diferite grade de mobilitate a conturului, se constată creşteri mai importante în cazul plăcilor al căror grad de nedeterminare datorită constrîngerilor de pe laturi este mai pronunţat.

Din interpretarea diagramelor de forţe tăietoare şi momente încovoietoare reprezentate în tabelul 2 pentru diferite tipuri de plăci, se constată în primul rînd o translaţie a diagramelor de forţe tăietoare în teoria exactă faţă de cele din teoria tehnică. Translaţia are loc înspre valorile forţelor tăietoare corespunzătoare laturilor cu constrîngeri mai pronunţate (încastrate), iar în cazul plăcilor cu laturi de acelaşi tip (încastrate) translaţia are loc spre valorile forţelor tăietoare corespunzătoare laturilor cu încărcări mai mari.

Fenomenul se reflectă şi asupra diagramelor de momente încovoietoare. Acestea suferă rotaţii în jurul punctelor corespunzătoare laturilor rezemate în dreptul cărora momentele sînt nule sau în jurul laturilor încastrate cu sarcină nulă în dreptul cărora momentele încovoietoare în teoria exactă rămîn la aceleaşi valori cu cele din teoria tehnică a plăcilor considerate subţiri. Din aceste observaţii se poate desprinde concluzia că ceea ce influenţează în mod deosebit mărimile fizice ale plăcilor groase este cuplul „constrîngere—sarcină", adică atît natura mobilităţii conturului, cît şi natura şi mărimea sarcinii care solicită placa. Pe seama aceluiaşi efect poate fi pusă şi tendinţa de deplasare a secţiunilor de moment maxim înspre laturile cu un grad de constrîngere redus (rezemate) sau înspre cele cu sarcină minimă sau nulă, în cazul plăcilor cu laturi opuse de aceeaşi natură (încastrate).

Primită la redacţie la 22 mai 1978

BIBLIOGRAFIE

1. M. Mişicu, Rev. Roum. Sci. Techn. Mec. Appl., **18**, *4*, 663—682 (1973).
2. — Rev. Roum. Mec. Appl., **18**, *6*, 1159—1174 (1974).
3. G. Kümbetlian, Rev. Roum. Mec. Appl., **23**, *2*, 249—262 (1978).
4. — Rev. Roum. Mec. Appl., **21**, *3*, 447—462 (1976).
5. — St. cerc. mec. apl., **25**, *3*, 363—386 (1976).
6. — Bulet. Inst. Marină Cţa., **1**, *1*; 40—52, 82—98 (1975).
7. — Bulet. Inst. Marină Cţa. **3**, *2*, 171—178 (1977).

O PROPUNERE DE CODIFICARE A TEORIILOR DIN MECANICA CONSTRUCȚIILOR[1]

de MIRCEA V. SOARE

Institutul de construcții București

Pornind de la constatarea că nu există o clasificare sistematică a teoriilor din mecanica construcțiilor, se propune o codificare bazată pe patru factori principali și anume: modul de exprimare a echilibrului pe structură, comportarea materialului, mărimea deformațiilor și modul de considerare a expresiei curburii. În încheiere se exemplifică codificarea unor probleme de mecanica construcțiilor.

1. INTRODUCERE

Diferitele capitole ale mecanicii construcțiilor, ca disciplină inginerească avînd drept obiect, în sensul cel mai larg, studierea stării de tensiune și de deformații în elementele de construcții și în structuri, au la bază un număr de ipoteze simplificatoare privind legea constitutivă a materialului, mărimea deformațiilor în comparație cu dimensiunile generale ale corpului etc.

Admițînd că legea lui Hooke, enunțată acum trei secole (1678), reprezintă actul de naștere al mecanicii construcțiilor, sîntem în măsură să recunoaștem că importantele contribuții ale diferiților cercetători au dus, în decursul deceniilor, la constituirea acestei discipline bine organizate, cu unele diferențe în succesiunea diferitelor capitole, în demonstrații sau amploare, proprii personalității fiecărui autor sau specialități.

Sîntem însă în situația de a observa că progresele matematicii, ale tehnicii de calcul, datele experimentale pe modele la scară redusă sau naturală au condus la rafinarea ipotezelor de bază în multe situații. Astfel, de exemplu, referindu-ne la legea lui Hooke care exprimă comportarea liniar elastică a solidelor deformabile, tendințele moderne de a explora rezervele de siguranță au dus la dezvoltarea calculului în domeniul plastic și la căutarea unor legi care acoperă tot domeniul de comportare a materialului.

Am putea da multe exemple pentru a ilustra cum cîte o ipoteză de bază (cu caracter simplificator) este luată sau nu în considerare la rezolvarea unei anumite probleme.

Preocupîndu-ne de o sintetizare a diferitelor ipoteze și teorii în mecanica construcțiilor, am constatat doar existența unor tendințe de

[1] Text revăzut al comunicării prezentate la Sesiunea științifică jubiliară cu prilejul împlinirii a 30 de ani de existență a Institutului politehnic Cluj-Napoca, la 28 octombrie 1978.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 1, 1979, P. 107–124

clasificare, schematice și fără caracter de generalitate, prezentînd, la diferiți autori, formulări diferite.

Vom cita dintre aceste formulări : liniaritate, respectiv neliniaritate mecanică, geometrică și fizică, probleme de rezistență și de stabilitate (elastică), teorii de ordinul întîi, doi și, mai rar, trei.

Toate aceste aspecte nesistematizate și uneori contradictorii ne-au condus la *propunerea unei codificări a diferitelor teorii din mecanica construcțiilor* care să permită cunoașterea precisă a ipotezelor care stau la baza rezolvării unei anumite probleme și, implicit, a gradului de *evoluție* a teoriei respective.

În paragraful al doilea al prezentei lucrări ne-am propus examinarea succintă a clasificărilor existente ; în paragraful al treilea și al patrulea sînt sintetizați factorii principali care stau la baza formulării unei probleme de mecanica construcțiilor și este enunțată propunerea de codificare.

În paragraful al cincilea sînt date succint exemple pentru cîteva cazuri, iar în ultimul paragraf este făcută o discuție și sînt trase concluzii.

2. CLASIFICĂRI EXISTENTE

O primă clasificare a teoriilor din mecanica construcțiilor se referă, în mod obișnuit *tacit*, la liniaritatea, respectiv neliniaritatea relațiilor care guvernează o anumită problemă. Ea poate privi modul de exprimare a condițiilor de echilibru, comportarea materialului sub sarcini și ordinul de mărime al deformațiilor.

Astfel vom distinge :

— *liniaritate mecanică* (statică), atunci cînd ecuațiile de echilibru sînt exprimate pe starea nedeformată a corpului considerat ;

— *neliniaritate mecanică* (statică), atunci cînd ecuațiile de echilibru sînt exprimate pe starea deformată a sistemului ;

— *liniaritate fizică*, atunci cînd legătura biunivocă între eforturile interioare și deformații este exprimată matematic printr-o relație liniară de forma $\sigma = E\varepsilon$ sau $\tau = G\gamma$;

— *neliniaritate fizică*, atunci cînd legătura dintre eforturile interioare și deformații este exprimată matematic printr-o relație de forma $\varepsilon = f(\sigma)$ sau $\sigma = g(\varepsilon)$ (cîteva exemplificări sînt date în paragraful 3) ;

— *liniaritate geometrică*, atunci cînd, exprimînd deformațiile specifice ca dezvoltări în serie de puteri ale componentelor deplasării, se reține doar termenii liniari, de exemplu $\varepsilon_x = \partial u/\partial x$;

— *neliniaritate geometrică*, atunci cînd, exprimînd deformațiile specifice ca dezvoltări în serie de puteri ale componentelor deplasării, se reține și termeni de ordin superior, de exemplu

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]; \tag{2.1}$$

problema teoriilor de diferite ordine este mai controversată.

După E. Chwalla [8], cînd se neglijează influența deformațiilor elastice asupra condițiilor de echilibru și acestea din urmă sînt exprimate pentru structura nedeformată, modul simplificat de calcul este denumit *teorie de ordinul întîi*.

După același autor, modul de calcul mai exact în care se ia în considerare deformația elastică a structurii asupra condițiilor de echilibru constituie *teoria de ordinul al doilea*. Dacă teoria de ordinul întîi reprezintă doar o primă treaptă a aproximației soluției complet exacte, nici teoria de ordinul al doilea nu reprezintă o teorie exactă, deoarece ea ia în considerare influența deformațiilor, legate însă de ipoteza că aceste deformații rămîn *mici* în comparație cu dimensiunile structurii. Dacă am admite deformații de mărime arbitrară, atunci calculul ar trebui să fie încă mai exact, dar prin aceasta ar deveni considerabil mai complex (*teoria de ordinul al treilea* !).

O altă formulare întîlnim la V. Gioncu [13], după care

— teoria de ordinul întîi (sau liniară) este caracterizată prin faptul că se neglijează influența deformațiilor asupra stării de tensiune ;

— în teoria de ordinul al doilea (sau teoria liniarizată a stabilității) deformațiile sînt considerate infinit mici și produsele derivatelor secunde ale săgeții pot fi neglijate ;

— teoria de ordinul al treilea este o teorie neliniară a stabilității (vezi [13] p. 331—2).

O formulare diferită întîlnim la S. Falk [11], după care cele trei teorii sînt caracterizate prin următoarele :

— teoria de ordinul întîi : echilibru și reducerea tensiunilor pe elementul nedeformat ;

— teoria de ordinul al doilea : echilibru și reducerea tensiunilor pe elementul deformat, dar nerotit ;

— teoria de ordinul al treilea : echilibru și reducerea tensiunilor pe elementul deformat și rotit.

Același autor constată că, în formularea sa, toate trei teoriile sînt *neliniare*, de la început. Prin anumite simplificări, ele pot însă fi liniarizate (vezi S. Falk [10] și J. Lensing [18]).

Pe drept cuvînt putem afirma împreună cu S. Falk că, în această privință domnește în literatura de specialitate o dezordine nemaipomenită.

Ajungem acum și la problemele de stabilitate și legătura lor cu calculele de diferite ordine.

După E. Chwalla [8] există o mare categorie de probleme la care aplicarea teoriei de ordinul al doilea reprezintă o necesitate interioară și, de aceea, ea este totdeauna constitutiv necesară. Acestea sînt problemele de stabilitate.

La definirea stabilității întîlnim următoarele : „Teoria stabilității studiază, pentru o structură și o încărcare dată, acea treaptă de încărcare critică pentru care este atinsă limita de stabilitate și, de aceea, echilibrul între forțele exterioare și eforturile interioare își pierde proprietatea de a fi stabil. Vorbim despre flambaj simplu (Biegeknickung) a unei bare sau structuri din bare cînd secțiunile barelor izolate, la limita de stabilitate (la trecerea neforțată de la prima la a doua formă de echilibru vecină) se deplasează doar paralel, dar nu se rotesc, cînd deci elementele izolate capătă doar săgeți, fără torsiuni" (op. cit. [8] p. 49).

În continuare se definește flambajul prin torsiune (Drillknickung) flambajul prin încovoiere-torsiune (Biegedrillknickung) și, ca un caz particular al precedentului, flambajul lateral (Kippung) la care secțiunea se rotește în jurul centrului de lunecare, respectiv se deplasează și se

rotește în jurul aceluiași centru. Vedem aici o apropiere a definițiilor lui S. Falk pentru teoriile de ordinul al doilea, respectiv al treilea.

O formulare nuanțată întîlnim la Al. Gheorghiu [12], care subliniază „deosebirea esențială dintre calculul de stabilitate și calculul de ordinul al doilea :

(a) În *calculul de stabilitate* mărimea sarcinilor nu este cunoscută, urmînd să se determine valoarea P_{cr} a acestora, pentru care intervine fenomenul de pierdere a stabilității, în accepția de fenomen de flambaj.

(b) În *calculul de ordinul al doilea* sarcinile transversale și axiale sînt cunoscute, urmînd să se determine mărimile eforturilor și ale deplasărilor ce apar cînd raportarea forțelor exterioare se face la poziția deformată.

Pierderea de stabilitate a structurii apare ca o situație limită în calculul de ordinul al doilea" (op. cit. [12], p. 513).

La o afirmație asemănătoare ajung Brush și Almroth : „Calculul la flambaj este în esență o parte a mecanicii neliniare, mai degrabă decît a celei liniare" [6].

Vom adăuga și faptul că în calculul de ordinul al doilea se include și cazul cînd forța axială este de întindere.

În încheierea acestei sumare incursiuni în literatura de specialitate vom observa doar faptul că, în definițiile existente, nu sînt luați în considerare toți factorii principali ; este ceea ce ne propunem să examinăm în paragraful următor.

3. FACTORII PRINCIPALI ÎN FORMULAREA PROBLEMELOR DE MECANICA CONSTRUCȚIILOR

O examinare atentă arată că există patru factori principali care stau la baza formulării problemelor de mecanica construcțiilor și anume :

A. modul de exprimare a condițiilor de echilibru,

B. comportarea materialului,

C. mărimea deformațiilor,

D. expresia curburii fibrei medii deformate, respectiv curburilor suprafeței mediane deformate.

În cele ce urmează vom examina diferitele aspecte ale acestor factori.

A. *Exprimarea condițiilor de echilibru static* poate fi făcută în raport cu

1. poziția inițială (nedeformată) a structurii,

2. poziția finală (deformată) a structurii.

Cele două variante corespund liniarității, respectiv neliniarității mecanice (statice), amintite la paragraful 2.

Așa cum subliniază E. Chwalla problemele de stabilitate trebuie să fie tratate în mod necesar prin exprimarea ecuațiilor de echilibru static în raport cu poziția deformată a structurii.

Din punct de vedere matematic cele două modalități de exprimare a condițiilor de echilibru static conduc la aspecte diferite și anume în primul caz corespund probleme cu condiții la limită, în timp ce, în cazul al doilea, avem a face cu probleme de valori proprii. Această precizare implică însă și ipoteza comportării liniare a materialului și ipoteza deformațiilor infinitezimale.

B. *Comportarea materialului* poate fi
1. liniară,
2. neliniară.

Comportarea liniară corespunde liniarității fizice amintite la paragraful 2 și este reprezentată de legea lui Hooke.

Comportarea neliniară, corespunzînd neliniarității fizice,

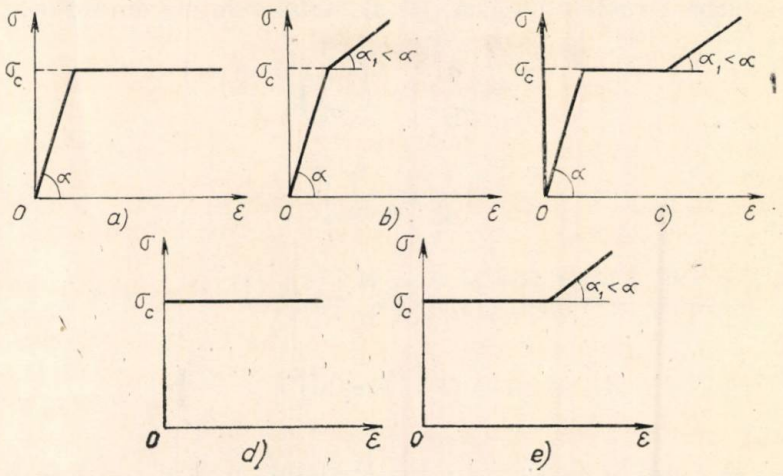


Fig. 1. — Curba caracteristică schematizată: *a*) comportarea ideal elasto-plastică; *b*) comportare elasto-plastică cu zonă de consolidare; *c*) comportare elasto-plastică cu palier de curgere și zonă de consolidare; *d*) comportare ideal-plastică; *e*) comportare ideal-plastică cu zonă de consolidare.

prezintă o gamă foarte largă de soluții, după legea constitutivă adoptată pentru material.

Există un număr de propuneri în literatura de specialitate pentru schematizarea curbei reprezentative a legii constitutive a materialului care exprimă:

— comportarea ideal elasto-plastică (fig. 1*a*); curba corespunzătoare este denumită și curba lui Prandtl;

— comportare elasto-plastică cu zonă de consolidare (fig. 1*b*);

— comportare elasto-plastică cu palier de curgere și zonă de consolidare (fig. 1*c*);

— comportare ideal-plastică (fig. 1*d*);

— comportare ideal-plastică cu zonă de consolidare (fig. 1*e*).

Dintre propunerile pentru folosirea unei singure expresii analitice pentru tot domeniul de variație, menționăm:

— curba potențială

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E} \qquad (\text{cu } n \gtrless 1);$$

— curba din vechile prescripții germane pentru construcții metalice [3]

$$\sigma = \sigma_p + (\sigma_c - \sigma_p) \operatorname{th} \frac{E\varepsilon - \sigma_p}{\sigma_c - \sigma_p}, \tag{3.1}$$

în care σ_p reprezintă limita de proporționalitate, σ_c — limita de curgere;

— curba Ramberg-Osgood (1943), scrisă sub una din formele

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + k\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^n, \tag{3.2a}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n, \tag{3.2b}$$

denumită și curba celor trei parametri [20], [24];

— formula lui Ylinen (1956) [3], [29]

$$E\varepsilon = c\sigma - (1 - c)\sigma_c \ln\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_c}\right),$$

în care $c \neq 1$ este o constantă a materialului; pentru $c = 1$ se regăsește legea lui Hooke;

— formula lui J. E. Goldberg și R. M. Richard (1963) [14]

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}{\left(1 + \left|\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right|^n\right)^{1/n}}$$

în care σ_0 este tensiunea maximă, ε_0 — alungirea specifică corespunzătoare, n — parametru definind relația neliniară între σ și ε.

C. *Mărimea deformațiilor* poate fi

1. infinitesimală,
2. finită.

Deformațiile infinitesimale (denumite și micile deformații) exprimă că deplasările diferitelor secțiuni pot fi asimilate unor infiniți mici, în comparație cu dimensiunile geometrice ale structurii. Această ipoteză permite neglijarea deformațiilor specifice în raport cu unitatea (de exemplu $1 + \varepsilon \approx 1$), așa cum se procedează la stabilirea expresiei lunecării specifice în teoria elasticității plane,

$$\gamma_{xy} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{1 + \varepsilon_x} + \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{1 + \varepsilon_y} \approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};$$

această neglijare permite liniarizarea aspectului geometric și corespunde liniarității geometrice menționate la paragraful 2.

D e f o r m a ț i i l e f i n i t e pot fi, la rîndul lor, mici sau arbitrare, în comparație cu dimensiunile generale ale structurii. Obișnuit, ele sînt considerate mici, așa cum sînt exprimate, de exemplu, de relația (2.1) și corespund neliniarității geometrice.

D. *Expresia curburii* este legată în primul rînd de modul de distribuire a tensiunilor în secțiunile transversale ale barelor (respectiv pe grosimea plăcii), cît și pe modalitatea de exprimare a acesteia.

Din acest punct de vedere vom distinge pentru expresia curburii

0. nu intervine,
1. aproximativă,
2. exactă.

Situațiile cînd la studierea unui element sau structuri nu intervine curbura fibrei medii deformate (respectiv curburile suprafeței mediane deformate) sînt rare ; ele pot fi întîlnite, de exemplu, la sistemele suspendate sau la unele sisteme critice de felul celui tratat la paragraful 5.

Expresia exactă a curburii unei curbe plane de ecuație $w = w(x)$ este binecunoscută

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Dacă se neglijează pătratul lui $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ în raport cu unitatea, adică se consideră

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2 \approx 1,$$

rezultă expresia aproximativă a curburii

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2},$$

larg utilizată în rezistența materialelor și teoria plăcilor plane și curbe subțiri.

De remarcat că ordinul de mărime al erorii este diferit de acela făcut la cazul C cînd se consideră deformațiile infinitesimale.

Expresia aproximativă a curburii permite liniarizarea problemelor, deci se încadrează în liniaritatea geometrică ; totodată ea intervine atît în liniaritatea, cît și în neliniaritatea mecanică (statică).

Acceptînd tacit ipoteza secțiunilor plane a lui J. Bernoulli pentru sistemele de bare, respectiv ipoteza normalei drepte a lui Love-Kirchhoff pentru plăcile plane și curbe subțiri, recunoaștem că ultimul caz limitează cercetările noastre, în sensul excluderii problemelor de teoria elasticității (cum ar fi problema contactului local al corpurilor elastice, după Hertz).

4. O PROPUNERE DE CODIFICARE

Se observă că cei patru factori examinați anterior comportă cîte trei variante, cu excepția primului care comportă doar două variante. Dintre acestea, prima arată că factorul respectiv nu intervine, a doua reprezintă o aproximare mai slabă, iar a treia o aproximare mai bună sau chiar formularea matematică exactă.

Desigur că enumerarea precedentă ar putea fi încă rafinată prin adăugarea unor cazuri noi cum ar fi, de exemplu, luarea în considerare a deformațiilor axiale, concomitent cu deformațiile din încovoiere; din motive de simplitate a formulării ne vom limita însă la factorii notați **A, B, C, D.** Notînd cu 1 și 2, respectiv 0,1,2 subcazurile posibile, rezultă că orice problemă de mecanica construcțiilor poate fi *codificată* printr-un cod **ABCD** în care termenul **A** poate lua valorile $i = 1$ și 2, iar fiecare din termenii **B, C, D** poate lua valorile $i = 0, 1, 2$.

Această codificare este sintetizată în tabela 1.

Tabela 1

Factor / i =	Exprimarea echilibrului pe structura	Comportarea materialului	Mărimea deformațiilor	Expresia curburii
	A	**B**	**C**	**D**
0	—	nu intervine	nu intervine	nu intervine
1	nedeformată	liniară	infinitesimală	aproximativă
2	deformată	neliniară	finită	exactă

Din combinarea teoretică a tuturor cazurilor cuprinse în tabela 1 rezultă următoarele 54 cazuri posibile:

1000	**1100**	**1200**	**2000**	**2100**	**2200**
1001	**1101**	**1201**	**2001**	**2101**	**2201**
1002	**1102**	**1202**	**2002**	**2102**	**2202**
1010	**1110**	**1210**	**2010**	**2110**	**2210**
1011	**1111**	**1211**	**2011**	**2111**	**2211**
1012	**1112**	**1212**	**2012**	**2112**	**2212**
1020	**1120**	**1220**	**2020**	**2120**	**2220**
1021	**1121**	**1221**	**2021**	**2121**	**2221**
1022	**1122**	**1222**	**2022**	**2122**	**2222**

Se observă că **A** poate lua doar valorile 1 și 2, exprimarea condițiilor de echilibru fiind totdeauna necesară.

Cazul $\mathbf{B} = 0$ intervine în cazuri izolate, de exemplu în cazul sistemelor static determinate, cînd ne interesează doar starea de tensiune.

Cazul $\mathbf{C} = 0$ se întîlnește la structuri care lucrează în principal la încovoiere, la care deformațiile extensionale și de lunecare sînt neglijabile

și la sisteme static determinate la care ne interesează doar starea de tensiune.

Cazul $\mathbf{D} = 0$ caracterizează sisteme lucrînd numai la întindere.

Celelalte categorii de probleme reprezintă aspectele cele mai interesante ale discuției.

Fără a putea stabili o ordine a teoriilor, corespunzătoare valorilor pe care le poate lua codul **ABCD**, este evident că prima (**1000**) este *cea mai simplă*, în timp ce ultima (**2222**) este *cea mai evoluată*.

Mai trebuie observat că nu există rezolvări cunoscute în mecanica construcțiilor pentru toate cazurile codificate, cu alte cuvinte mai există spații albe corespunzător cărora fie că nu există încă rezolvări, fie că, pur și simplu, pentru acestea nu există un interes teoretic sau practic.

În privința cazului $\mathbf{A} = 2$ (comportarea neliniară a materialului) există numeroase posibilități, după legea constitutivă adoptată pentru material.

În paragraful următor ne-am propus să exemplificăm succint cele mai importante coduri, uneori punînd rezultatele sub forme încă neîntîlnite în literatura de specialitate.

Discuția celorlalte cazuri și corespondența cu clasificările existente sînt prezentate în paragraful final.

5. EXEMPLE DE PROBLEME CONFORM CODIFICĂRII PROPUSE

Vom începe prin a considera cazurile **ABCO** ($\mathbf{D} = 0$).

Fie sistemul articulat de bare reprezentat în figura 2*a*; este un exemplu clasic de sistem static nedeterminat de bare supuse la întindere. Atîta vreme cît materialul se comportă perfect elastic, eforturile în bare sînt date de relațiile [17], [25]:

$$X_1 = X_3 = \frac{P\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha}, \qquad X_2 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}.$$

Se recunoaște ușor că sîntem în cazul de codificare **1110**.

Dacă se admite însă o solicitare dincolo de limita de elasticitate a materialului și se consideră curba lui Prandtl (fig. 1*a*), variația eforturilor

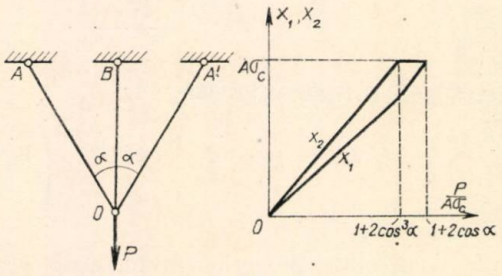


Fig. 2. — Sistem articulat de bare: *a*) conformarea sistemului; *b*) variația eforturilor X_1 și X_2.

$X_1 = X_3$ și X_2 în funcție de forța P este redată în figura 2*b*. Corespunde cazul **1210**.

Fie, mai departe, sistemul critic reprezentat în figura 3*a* și studiat de Timoshenko și Young [27] ca un exemplu în care nu mai este valabil

principiul suprapunerii efectelor. În ipoteza deformațiilor infinitesimale, el corespunde codului **2110**.

Să reluăm problema considerînd deformațiile finite (cod **2120**).

Fie θ unghiul de înclinare a celor două bare,în raport cu poziția inițială, în stare deformată și T eforturile în bare.

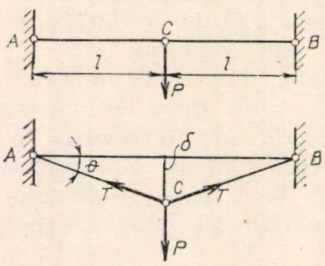


Fig. 3. — Deformațiile finite ale unui sistem critic.

Admițînd că articulația centrală C s-a deplasat cu cantitatea δ, va corespunde o rotire a celor două bare θ, astfel încît

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\delta}{l}.$$

În această situație, eforturile în bare devin :

$$T = \frac{P}{2\sin\theta} = \frac{P}{2}\,\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{P}{2}\,\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta}. \tag{5.1}$$

Ținînd seama că, prin alungire, lungimea fiecărei bare devine $l' = \sqrt{l^2+\delta^2}$, alungirea specifică se scrie :

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{l^2+\delta^2}-l}{l} = \frac{T}{EA}. \tag{5.2}$$

Din eliminarea lui T între relațiile (5.1) și (5.2) se obține

$$\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}-l}{l} = \frac{P}{2EA}\,\frac{\sqrt{l^2+\delta^2}}{\delta},$$

sau, sub formă explicită,

$$P = 2EA\,\frac{\delta}{l}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{\delta^2}{l^2}}}\right). \tag{5.3a}$$

Dezvoltînd radicalul în serie de puteri și reținînd doar primii doi termeni, se regăsește soluția menționată anterior

$$P = EA\left(\frac{\delta}{l}\right)^3, \text{ respectiv } \delta = l\sqrt[3]{\frac{P}{EA}}. \tag{5.3b}$$

Problema poate fi extinsă fără dificultate la cazul unei alte legi constitutive, de exemplu folosind formula Ramberg-Osgood (3.2b). Introducînd notațiile adimensionale

$$\xi = \frac{\delta}{l}, \qquad \beta = \frac{P}{EA},$$

relația $f(P, \delta)$ se scrie :

$$\sqrt{1+\xi^2} - 1 = \frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi} + \left(\frac{E}{B}\frac{\beta}{2}\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\xi}\right)^n.$$

Pentru $n \to \infty$ se recade peste soluția corespunzătoare curbei lui Prandtl. În ambele cazuri avem codul **2220**.

★

Codul **1111.** Este cunoscută ecuația diferențială aproximativă a fibrei medii deformate, în cazul încovoierii simple :

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M}{EI}. \tag{5.4}$$

Dacă considerăm cazul reprezentat în figura 4*a*, grinda va lucra la încovoiere pură, iar ecuația săgeților rezultă sub forma simplă

$$w = \frac{M_0}{2EI}\, x(l - x);$$

fibra medie deformată este o parabolă, iar săgeata maximă (la mijlocul deschiderii) este

$$w_0 = \frac{M_0 l^2}{8EI}. \tag{5.5}$$

Pentru cazul de încărcare din figura 4*b*, grinda va lucra la încovoiere simplă ($M = -P(l - x)$), iar ecuația săgeților rezultă sub forma

$$w = \frac{Px^2}{2EI}\left(l - \frac{x}{3}\right),$$

cu valoarea maximă (la capătul liber $x = l$) :

$$w_0 = \frac{Pl^3}{3EI}. \tag{5.6}$$

Codul **1112**. Vom relua exemplele precedente, diferența constînd în considerarea expresiei matematice exacte a curburii. Ecuația diferențială exactă a fibrei medii deformate, în cazul încovoierii simple, se scrie :

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{M}{EI}. \tag{5.7}$$

Pentru cazul reprezentat în figura 4*a* se poate da o soluție geo-

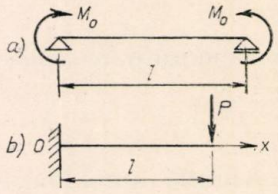


Fig. 4. — Grinzi supuse la încovoiere : *a*) grinda supusă la încovoiere pură ; *b*) consola încărcată la capătul liber.

metrică simplă ; fibra medie deformată este un arc de cerc de rază $\rho = EI/M_0$, iar săgeata maximă se scrie [25] :

$$w_{max} = \rho\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{l}{2\rho}\right)^2}\right].$$

Înlocuind pe ρ cu valoarea dată precedent și dezvoltînd radicalul în serie de puteri (deoarece $l/2\rho \ll 1$), rezultă

$$w_{max} = w_0\left(1+4\frac{w_0^2}{l^2}+32\frac{w_0^4}{l^4}+\ldots\right). \tag{5.8}$$

în care w_0, este dat de (5.5).

Din (5.8) reiese că valoarea obținută prin soluția clasică corespunde primului termen din dezvoltarea în serie de puteri a soluției exacte. Față de ordinul de mărime al raportului w_0/l, aproximarea este cu totul justificată.

Referindu-ne la cazul din figura 4*b*, ecuația diferențială a problemei se scrie :

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{P}{EI}(l-x). \tag{5.9}$$

Notînd $p = \frac{dw}{dx}$, $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2w}{dx^2}$, ecuația poate fi integrată odată:

$$p = \frac{\frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1}{\sqrt{1 - \left[\frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1\right]^2}};$$

ținînd seama de condiția la limită $p = \frac{dw}{dx} = 0$ pentru $x = 0$, de unde $C_1 = 0$, rezultă

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{EI}\right)^2\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)^2}}.$$

Prin integrare directă avem

$$w = \int \frac{\frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{P}{EI}\right)^2\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)^2}}\, dx + C_2. \tag{5.10}$$

Prin substituția $\xi = \frac{P}{EI}\left(lx - \frac{x^2}{2}\right)$, integrala din (5.10) este redusă la integrala eliptică [16]

$$w = C_2 - \frac{EI}{Pl}\int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{2EI}{Pl^2}\xi}}.$$

Se vede deci că, chiar în cazuri dintre cele mai simple, obținerea soluției exacte (din punctul de vedere al curburii) este foarte greoaie. O soluție aproximativă poate fi obținută dacă se dezvoltă în serie de puteri radicalul din (5.10) și apoi se integrează termen cu termen. Pentru săgeata maximă se obține

$$w_{max} = w_0\left(1 + \frac{27}{35}\frac{w_0^2}{l^2} + \dots\right),$$

în care w_0 este dat de (5.6).

Corecția adusă de considerarea expresiei exacte a curburii fibrei medii deformate este și aici complet neglijabilă.

Codul **2111**. Fie o bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt, acționată de forțe de compresiune P. Se știe că dacă forța P atinge o anumită valoare critică, echilibrul nu mai rămîne stabil, fiind posibile forme de echilibru curbilinii, în vecinătatea formei inițiale, rectilinii.

Ecuația diferențială a flambajului se scrie, în teoria simplificată a lui Euler :

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI} w = 0. \tag{5.11}$$

Observînd că ecuația este liniară și omogenă, vor exista soluții nebanale doar pentru anumite valori ale parametrului $\beta = \sqrt{P/EI}$, numite valori proprii. Valoarea minimă reprezintă sarcina critică euleriană

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}.$$

Este de remarcat că fibra medie deformată este precizată pînă la un factor de proporționalitate (în limitele deformațiilor infinitesimale

$$w = w_0 \sin \frac{\pi x}{2l},$$

datorită faptului că găsirea soluției ecuației (5.11) reprezintă o problemă de valori proprii.

Aspectul matematic se schimbă dacă există o acțiune transversală, de exemplu aplicarea forțelor P cu o excentricitate e.

Săgeata maximă rezultă sub forma

$$\frac{w_{max}}{e} = \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} - 1,$$

relația precedentă fiind cunoscută sub numele de formula secantei [28].

Codul **2112**. Dacă în locul expresiei aproximative a curburii se consideră expresia exactă, ecuația (5.11) se scrie :

$$\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{P}{EI} w = 0.$$

Mai departe se alege ca variabilă independentă arcul s și ca variabilă dependentă panta tangentei θ ; dacă se face schimbarea de variabilă

$dw/ds = \sin\theta$ și se neglijează scurtarea barei datorită compresiunii se ajunge la ecuația diferențială

$$EI\frac{d^2\theta}{ds^2} + P\sin\theta = 0.$$

Sarcina critică este determinată cu ajutorul integralei eliptice complete de prima speță [28]. O soluție analoagă se obține dacă sînt luate în considerare și deformațiile axiale [23].

Codul **2121.** Comportarea postcritică a plăcilor plane, ca și încovoierea cu deformații mari pot fi studiate cu ajutorul ecuațiilor lui Kármán :

$$K\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = Z + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{5.12a}$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E\delta\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \tag{5.12b}$$

Neliniaritatea problemei provine din considerarea relațiilor geometrice de tipul (2.1), fie

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

precum și din exprimarea echilibrului pe starea deformată a plăcii.

Soluțiile sînt obținute pe cale variațională analitică (vezi de exemplu [22], [30]) sau numerică [26].

Dacă componenta încărcării normală pe placă este diferită de zero ($Z \neq 0$), avem o problemă de încovoiere cu deformații mari. Dacă $Z = 0$ și placa este solicitată în planul ei median, avem voalarea cu deformații mari și comportarea postcritică poate fi evaluată cantitativ.

Problema clasică (liniarizată) a voalării rezultă reținînd doar ecuația (5.12a), luînd $Z = 0$ și considerînd valori constante (cele de pe contur) pentru

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = N_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}.$$

Codul **1211**. Calculul grinzilor supuse la încovoiere pură poate fi făcut pentru orice lege constitutivă a materialului (în general grafic,

prin încercări [4]); problema se simplifică considerabil dacă se admite curba lui Prandtl din figura 1*a*.

Codul **2211**. Problema flambajului barelor de oţel în domeniul elastoplastic a fost studiată în vechile prescripţii austriece (ÖNORM B 4300 din 1953) şi germane (DIN 4114 Blatt 1 u. 2) plecînd de la relaţia (3.1) din care se deduce modulul tangent [3]:

$$E_t = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\varepsilon} = E\left[1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_c - \sigma_p}\right)^2\right].$$

6. DISCUŢIA CODIFICĂRII. CONCLUZII

Referindu-ne la codificarea propusă şi lăsînd deoparte cazul **D** = 0, am exemplificat, în paragraful precedent, şapte din cele 36 cazuri posibile. Se poate ridica întrebarea firească ce se întîmplă cu celelalte cazuri.

Se observă că toate implică cel puţin o neliniaritate, adică o problemă greu de soluţionat din punct de vedere matematic.

Neliniaritatea materialului (**B** = 2) începe să fie studiată din ce în ce mai mult atît pentru structuri din beton armat (ductilitatea construcţiei) pentru a exploata cît mai bine rezervele de siguranţă la acţiunea seismică, cît şi pentru diferite tipuri de aliaje.

În privinţa neliniarităţii geometrice şi statice, datorită complexităţii aspectului matematic, nu apare justificată luarea în considerare a uneia şi neglijarea celeilalte. De aceea codurile **1122**, **1212**, **1221**, **1222** nu ni se par interesante, fără a exclude aplicarea lor în viitor.

Este cert că răspîndirea largă a calculatoarelor electronice va ridica teoriile din mecanica construcţiilor pe o nouă treaptă de dezvoltare.

Revenind la clasificările existente, redăm mai jos corespondenţa dintre acestea şi codificarea propusă:

— liniaritate mecanică	**1BCD**	**(A = 1)**
— neliniaritate mecanică	**2BCD**	**(A = 2)**
— liniaritate fizică	**A1CD**	**(B = 1)**
— neliniaritate fizică	**A2CD**	**(B = 2)**
— liniaritate geometrică	**AB1D**	**(C = 1)**
— neliniaritate geometrică	**AB2D**	**(C = 2)**
— teoria de ordinul întîi	**1111**	
— teoria de ordinul al doilea	**2111**	
— probleme de stabilitate	**2111**	
— teoria de ordinul al treilea	**2121**	

Examinarea corespondenţei precedente ne permite tragerea cîtorva concluzii.

1° Codificarea propusă acoperă toate clasificările existente, fiind mai generală şi dînd indicaţii directe asupra factorilor de bază la stabilirea unei teorii.

2° Ea indică lacunele existente şi căile de urmat în stabilirea unei teorii mai rafinate.

3° Ea indică în mod precis legătura intimă dintre o problemă de stabilitate şi teoria de ordinul al doilea, prima apărînd ca un caz particular al celei de-a doua.

4° Codificarea propusă situează problemele de stabilitate (elastică) în adevărata lumină „istorică"; ele pot fi explicate prin aspectul matematic de probleme de valori proprii, care permit prevenirea unor valori critice, însă nu dau posibilitatea studierii comportării postcritice.

De subliniat, în final, că un cod nu corespunde unei anumite probleme, ci caracterizează o categorie de probleme avînd la bază aceleași ipoteze **ABCD**.

★

În încheiere autorul dorește să mulțumească cordial următorilor colegi: dr. ing. I. Appeltauer, conf. dr. ing. V. Bănuț, prof. dr. ing. I. Beleș, conf. dr. ing. I. Gh. Bucă, prof. ing. A. Caracostea, prof. dr. ing. F. Cobesz, prof. dr. ing. V. Ille, conf. dr. ing. V. Petcu și prof. dr. doc. P. P. Teodorescu pentru sugestiile și aprecierile făcute pe parcursul elaborării prezentei lucrări.

Primită la redacție la 21 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. I. Appeltauer, *Curs de Rezistența materialelor pentru constructori. 1. Elemente fundamentale*, Inst. politehnic „Traian Vuia" Timișoara, 1973.
2. G. M. Bârsan, *Dinamica și stabilitatea construcțiilor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
3. A. A. Beleș, M. V. Soare, *Probleme de instabilitate elastică în construcțiile metalice, Considerații asupra stabilirii coeficienților de flambaj*. Standardizarea, **10**, *1*, 1958, 7—20; **10**, *2*, 1958, 61—74.
4. A. A. Beleș, R. P. Voinea, *Rezistența materialelor. II, pentru ingineri constructori*, Edit. tehnică, București, 1958, p. 307.
5. A. Bernard, F. Frey, J. Janss, Ch. Massonnet, *Recherches sur le comportement au flambement de barres en aluminium*. Mémoires de l'Association Internationale des Ponts et Charpentes, vol. 33—I, Zürich, 1973, 1—32.
6. D. O. Brush, B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1975.
7. H. J. Bubenheim, *Beitrag zur Ermittlung des Schnittkraftverlaufs in räumlichen Stabwerken unter Berücksichtigung nichtlinear-elastischer Werkstoffgesetze*, Beton- und Stahlbetonbau, **69**, *5*, 109—117 (1974).
8. E. Chwalla, *Einführung in die Baustatik*. Neudruck der zweiten, verbesserten und ergänzten Auflage, Stahlbau-Verlags-GMBH., Köln (Rhein), 1954.
9. W. Cornelius, *Stabilitätsproblem-Festigkeitsproblem*, Die Bautechnik, **26**, *9*, 257—261 (1949).
10. S. Falk, *Die linearisierte Theorie dritter Ordnung des geraden elastischen Balkens*, Z.A.M.M., *55*, 79—81 (1975).
11. S. Falk, *Comunicare privată*, 1978.
12. Al. Gheorghiu, *Statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor* Ed. a II-a, Edit. didactică și pedagogică, București, 1974.
13. V. Gioncu, *Plăci curbe subțiri de beton armat*. Edit. Academiei, București, 1974, p. 331—2.
14. J. E. Goldberg, R. M. Richard, *Analysis of Nonlinear Structures*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, **89**, No. ST 4, 333—351 (1963).
15. A. Hawranek, O. Steinhardt, *Theorie und Berechnung der Stahlbrücken*. Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1958.
16. W. Hort, A. Thoma, *Die Differentialgleichungen der Technik und Physik* (7te Aufl.), Jahann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig, 1956.
17. V. Ille, *Rezistența materialelor*, vol. 2, Inst. politehnic Cluj-Napoca, 1977.
18. J. Lensing, *Die verallgemeinerte linearisierte Theorie dritter Ordnung des geraden elastischen Balkens*, Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Juli 1976.

19. CH. MASSONNET, *Résistance des Matériaux*. 2è édition, Sciences et Lettres-Liège, vol. 1, 1967, vol. 2, 1974.
20. CH. MASSONNET, *Comportement à la ruine des plaques raidies comprimées. Théorie et expérience*, Comptes rendus du quatrième congrès canadien de mécanique appliquée, Montréal, 28 mai-1er juin 1973, p. G 51—G 74.
21. P. MAZILU, *Rezistența materialelor* (note de curs), Inst. construcții București, 1974.
22. H. MÜLLER, *Differentialgleichungen orthotroper Platten im geometrisch und beschränkt physikalisch nichtlinearen Bereich*, Z.A.M.M., **44**, *12*, 539—557 (1967).
23. A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik*, Dritte neubearbeitete Auflage, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1975.
24. E. P. POPOV, *Introduction to mechanics of solids*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1968.
25. M. V. SOARE, *Rezistența materialelor. Curs și aplicații*, vol. 1 și 2, Inst. construcții București, 1978.
26. M. V. SOARE, *Voalarea plăcilor plane tratată ca problemă de deformații mari*, St. cerc. mec. apl., **37**, *4*, 547—562 (1978).
27. ST. P. TIMOSHENKO, D. H. YOUNG, *Theory of Structures*, 2nd Ed, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965, p. 221—3.
28. ST. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Teoria stabilității elastice* (trad. din l. engleză), Edit. tehnică, București, 1967.
29. A. YLINEN, *A Method of Determining the Buckling Stress and the Required Cross-Sectional Area for Centrally Loaded Straight Columns in Elastic and Inelastic Range*, Publications of the International Association for Bridge and Structural Engineering, 16th vol., Zürich, 1956, p. 529—550.
30. A. S. WOLMIR, *Biegsame Platten und Schalen* (Deutsche Bearbeitung A. Duda), VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.

MODELE ANALITICO-CINETICE PENTRU EVALUAREA EMISIILOR POLUANTE DE LA TURBOMOTOARELE DE AVIAȚIE; TEHNICI DE LIMITARE

de C. ȚURCANU și AL. NICA

Institutul național de motoare termice

Mecanismele de formare a emisiilor nocive, specifice turbomotoarelor de aviație, precum și influența diverșilor parametri funcționali și constructivi, au fost expuse în lucrări anterioare, [1], [2], [3]. În cele ce urmează se prezintă unele aspecte noi, privind: a) dezvoltarea metodelor de calcul destinate estimării nivelului emisiilor poluante sub diverse stări de echilibru, pentru o mai bună înțelegere a interacțiunilor dintre factorii implicați în aceste procese; b) măsurile practice ce se desprind din aceste studii și eficiența lor în construcțiile efective; c) utilizarea unor noi tehnici în cercetările experimentale privind formarea emisiilor poluante.

1. MODELE ANALITICE PENTRU EVALUAREA EMISIILOR POLUANTE ALE TURBOMOTOARELOR

Se consideră configurația aerotermodinamică, aspectele fizice de bază ale procesului de ardere și cinetica oxidării, pentru două situații distincte: estimarea cantității de hidrocarburi nearse și a emisiei de oxid de carbon pe deoparte, iar pe de altă parte a nivelului de oxizi de azot. Mecanismele acestor procese fiind distincte, este necesară elaborarea unor modele de calcul specifice.

1.1. MODELUL GAZODINAMIC AL CURGERII GAZELOR DE ARDERE ÎN COMBUSTOR

Schema gazodinamică este prezentată în figura 1; limitele zonei de recirculație inclusiv zona (1), definesc poziția și mărimea regiunii cu variație nulă a debitului, un tub de curent monodimensional reprezentînd debitul recirculat. Distribuțiile fluxului de aer spre zona de combustie sau orificiile de răcire sînt considerate drept date de intrare. Limitele tubului de curent se definesc prin raze interne și externe considerate variabile independente în programul de calcul; peretele camerei de aer constituie limita externă. Diversele variante constructive ale camerei de ardere sînt descrise prin rețele adecvate de tuburi de curent monodimensionale, co-inelare și simetrice în raport cu axa geometrică a combustoru-

lui. Zonele de recirculație pot fi simetrice față de axa combustorului, sau față de mai multe axe, dispuse la rîndul lor simetric față de axa acestuia.

Curgerea este considerată staționară, uniaxială, iar frecările față de pereți, rezistențele induse de aceștia, forțele gravitaționale și schimburile de căldură cu exteriorul se neglijează. În aceste condiții, ecuațiile de

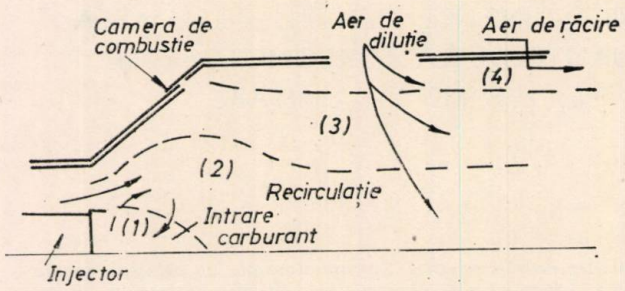


Fig. 1. — Schema modelului de curgere a gazelor.

continuitate, moment și energie, pentru al n-lea tub de curent cu, limitele r_n și r_{n-1}, se scriu, respectiv,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_n u_n A_n) = \left|\frac{\mathrm{d}w_c}{\mathrm{d}x}\right|_n, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_n u_n^2 A_n) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_n A_n) + 2\pi\, p_{n+1} r_n \frac{\mathrm{d}r_n}{\mathrm{d}x} -$$

$$- 2\pi\, p_{n-1} r_{n-1} \frac{\mathrm{d}r_{n-1}}{\mathrm{d}x} + \left|\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x}\right|_{n-1}(u_{n-1} - u_n) + \left|\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x}\right|_{n,\,n+1}(u_{n+1} - u_n) \tag{2}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_n u_n A_n c_{p_n} T_{0n}) = \rho_n u_n A_n \dot{Q}_n + \left|\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x}\right|_{n-1,\,n} \times$$

$$\times (c_{p_{n-1}},\, T_{0n-1} - c_{p_n} T_{0n}) + \left|\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x}\right|_{n,\,n+1}(c_{p_{n+1}},\, T_{0n+1} - c_{p_n} T_{0n}), \tag{3}$$

în care $\rho = \dfrac{p}{RT}$ este ecuația de stare, c_p — căldura specifică la presiune constantă, T și T_0 — temperatura statică, respectiv totală, A — aria secțiunii, v — componenta axială a vitezei, p — presiunea statică, w_c — aportul masic estern, w_t — schimbul masic turbulent între tuburile de curent adiacente, u — componenta axială a vitezei și $\dot{Q}$ — viteza de cedare a căldurii prin ardere.

În elaborarea programului de calcul, ecuația energiei este înlocuită prin relații reprezentînd conservarea de specii pentru carburant și produsele

arderii, ce definesc entalpia procesului de ardere. În cazul unei curgeri neturbionare, presiunea statică are o distribuție radială uniformă, iar ecuațiile suplimentare pentru momentul unghiular și echilibrul radial se scriu pentru tubul de curent n, ca (v fiind componenta radială a vitezei):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho_n u_n A_n v_n \frac{r_n + r_{n-1}}{2}\right] = \left|\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x}\right|_{n-1,\,n}\left(v_{n-1}\frac{r_{n-1} + r_{n-2}}{2} - \right.$$

$$\left. - v_n \frac{r_n + r_{n-1}}{2}\right) + \left|\frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x}\right|_{n,\,n+1}\left(v_{n+1}\frac{r_{n+1} + r_n}{2} - v_n \frac{r_n - r_{n-1}}{2}\right) \quad (4)$$

și

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_n - p_{n-1}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\rho_n v_n^2 \frac{r_n^2}{r_n^2 - r_{n-1}^2} \ln \frac{r_n}{r_{n-1}} - \frac{1}{2}\right]. \quad (5)$$

Cu ajutorul unui debit masic w_r, reprezentînd intrările ($w_r > 0$) sau ieșirile ($w_r < 0$) din zona de recirculație, se pot stabili schimburile de masă, moment și energie, între această zonă și tuburile de curent exterioare; ecuațiile de continuitate, moment și energie se scriu în acest caz pntru zona (1) din figura 1, după cum urmează:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_1 u_1 A_1) = \frac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}, \quad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_1 u_1^2 A_1) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_1 A_1) + 2\pi p_2 R_1 \frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}x} +$$

$$+ \begin{cases} u_1 \dfrac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}, & w_r < 0, \\ \displaystyle\sum_{n=2} \alpha_n u_n \frac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}, & w_r > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\rho_1 u_1 A_1 c_{p_1} T_{0_1}) = \rho_1 u_1 A_1 \dot{Q}_1 + \begin{cases} c_{p_1} T_{0_1} \dfrac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}, & w_r < 0, \\ \displaystyle\sum_{n=2} \alpha_n c_{p_n} T_{0n} \frac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}, & w_r > 0, \end{cases} \quad (8)$$

în care $\alpha_n \dfrac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}$ definește schimbul fracțional revenind tubului de curent n.

Termenii în $\dfrac{\mathrm{d}w_r}{\mathrm{d}x}$ din relațiile (6) — (8) trebuie aplicați în relațiile (1) — (3) afectați de factorul α_n, astfel ca debitul masic total să fie păstrat; s-a constatat că o repartiție uniformă a debitului față de tuburile de curent considerate (cu excepția aceluia reprezentînd răcirea pereților) este acceptabilă.

Exprimarea frontierei zonei de recirculație printr-o funcție $r_n = f(x)$ permite utilizarea unei metode de iterație pentru stabilirea lungimii sale cu respectarea ansamblului de condiții la limită impuse; mărimea zonei de recirculație cît și debitul recirculat, pot figura în programul de calcul drept variabile independente.

Amestecul turbulent dintre tuburile de curent adiacente poate fi exprimat sub forma unui schimb masic între tuburi, w_t, după cum s-a specificat; modificările de moment rezultate din schimburile masice se pot corela cu ajutorul expresiei lui Reynolds pentru tensiunile de forfecare acționînd pe frontiera dintre tuburile de curent.

Tensiunea de forfecare Reynolds poate fi exprimată în funcție de coeficientul de viscozitate turbinonar μ_t:

$$\tau = \mu_t \frac{\partial u}{\partial r_n} \cong \mu_t \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{r_n^* - t_{n-1}^*}, \tag{9}$$

r^* fiind raza internă a tubului de curent corespunzătoare aproximației „semi-jetului"; μ_t poate fi redat în funcție de parametrii locali ai curgerii:

$$\mu_t = \rho k b \, | u_{\max} - u_{\min} |, \tag{10}$$

k fiind o constantă empirică ce se stabilește cu ajutorul condițiilor de amestec pentru jeturile turbulente bidimensionale, iar b este un parametru legat de lățimea zonei de amestec, [4].

Cu ajutorul unei selecționări convenabile a modelului de viscozitate turbionară, schimbul masic între tuburile de curent adiacente se poate pune sub forma:

$$\left| \frac{\mathrm{d}w_t}{\mathrm{d}x} \right|_{n-1,\,n} = \frac{2\pi\, r_{n-1}}{40} [\rho_n (u_n^2 + v_n^2)^{1/2} - \rho_{n-1} (u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2)^2]. \tag{11}$$

Aportul masic de aer extern w_c în tubul de curent poate fi exprimat cu ajutorul unui model pentru penetrarea și amestecul jetului. Admițînd astfel că în combustor pătrunde transversal un jet de aer din exterior cu moment neglijabil, acesta va fi deviat în direcția jetului principal deja existent și accelerat pînă atinge valoarea locală a vitezei jetului principal. Relația empirică ce corelează traiectoria axului central al jetului transversal cu parametrii de curgere ai jetului principal, este de forma [5]:

$$y = 0{,}37\, d_c \left(\frac{u_c}{u_P} \right)^{0{,}65} \left(\frac{\rho_c}{\rho_P} \right)^{0{,}47} \sin \beta_0 \left(\frac{\Delta x}{d_c} \right)^{0{,}32}, \tag{12}$$

prin y notîndu-se distanța de penetrare a jetului transversal, d_c — diametrul orificiului de admisie a jetului transversal, Δx — distanța axială

necesară unei penetrări complete ($\Delta x \cong 10\, d_c$) și β_0 — unghiul de intrare a jetului transversal; indicele c se referă la parametrii legați de jetul transversal, iar P la jetul principal. Presiunile se consideră egalizate după punctul de penetrare completă, iar aportul de aer proaspăt se consideră ca evoluînd liniar de-a lungul distanței de amestec.

Prin considerentele de mai sus, s-au schițat caracteristicile gazotermodinamice ale procesului de ardere, obținîndu-se astfel un model pe care se pot grefa aspectele proprii cinetice și entalpice ale procesului. Viteza de ardere a carburantului lichid este determinată respectiv de vitezele de vaporizare și amestec a vaporilor cu aerul, într-un proces de ardere difuzivă. Se presupune că picăturile de carburant sînt distribuite uniform într-un tub de curent, că interacțiunile dintre ele sînt neglijabile și că prezintă (în cadrul aceluiași tub) o singură valoare a diametrului mediu Sauter (DMS).

Viteza de vaporizare a unei picături de carburant se calculează cu expresia de mai jos, datorată lui Wood și colab., [6]:

$$\dot{m}_f = \frac{2\pi\, d_p \lambda_g}{c_{p_g}} \ln\left[\frac{1 + QyO_2}{Li} - \frac{c_{p_g}}{L}(T_l - T_g)\right](1 + 0{,}276\, \mathscr{R}e^{1/2}\mathscr{P}r^{1/3}), \quad (13)$$

în care $\dot{m}_f$ este fracțiunea masică de vaporizare a picăturii de carburant, d_p — diametrul acesteia, Q — puterea calorică a carburantului, L — căldura sa de vaporizare, λ — conductibilitatea termică, i — raportul stoichiometric în greutate dintre oxigen și carburant; indicele g se referă la parametrii locali ai gazului, iar l la aceia ai carburantului lichid.

Relația (13) a fost dedusă în următoarele ipoteze: simetrie sferică, regim staționar, independența fenomenelor de transport față de temperatură și compoziție, efecte de radiație neglijabile. Temperatura la suprafața lichidului, T_l, corespunde punctului de distilare 50% ASTM, [3], în concordanță cu concluziile obținute în urma încercării carburanților polihidrocarbonați, [6].

Numărul Reynolds se consideră drept $\mathscr{R}e = \frac{d_p \rho_g}{\mu_g}(u_g - u_d)$ și numărul Prandtl, $\mathscr{P}r = \frac{c_{p_g}\mu_g}{\lambda}$ pun în evidență convecția [7].

Pentru picăturile de carburant trebuie luate în considerație rezistențele aerodinamice pe care le înving, vitezele lor fiind distincte față de aceea a masei de gaz în tubul de curent. Această corecție se realizează prin includerea unui termen reprezentînd rezistența aerodinamică în ecuația de moment a picăturii. Ecuația diferențială ce rezultă pentru viteza picăturii de carburant este de forma

$$\frac{du_d}{dt} = f\left(C_D, \frac{\rho_g}{\rho_l}, |u_g - u_d|\right), \quad (14)$$

coeficientul de rezistență aerodinamică C_D calculîndu-se cu ajutorul uneia dintre relațiile de mai jos, în funcție de parametrii curgerii [8]:

$$\begin{aligned} C_D &= 27\ \mathcal{R}e^{-0,84} \quad ; \quad 0 < \mathcal{R}e \leqslant 80, \\ C_D &= 0,271\ \mathcal{R}e^{0,217} \quad ; \quad 80 < \mathcal{R}e \leqslant 10^4, \\ C_D &= 2,0 \qquad\qquad ; \quad 10^4 < \mathcal{R}e. \end{aligned} \tag{15}$$

Mărimea și viteza inițială a particulelor de carburant sînt determinate de caracteristicile sistemului de injecție, în timp ce distribuția inițială a masei carburantului în tuburile de curent este una dintre datele de intrare; în zona de recirculație, tot carburantul se consideră vaporizat.

În acord cu modelul de ardere a picăturilor de carburant reprezentat prin relația (13), carburantul odată vaporizat se presupune că reacționează în proporție stoichimetrică cu aerul din tubul de curent. Vaporii sau aerul în exces sînt lăsați deoparte, pentru a se putea estima temperatura procesului de combustie și concentrarea speciilor. În cazul unui preamestec de carburant și aer, procesul de combustie are loc la proporțiile stabilite prin faza de injecție.

1.2. MODELUL CINETIC PENTRU FORMAREA EMISIILOR POLUANTE

1.2.1. Hidrocarburi nearse și oxid de carbon

Gradul de perfecțiune a procesului de combustie determină procentul de hidrocarburi nearse și de oxid de carbon în gazele de ardere, în timp ce temperatura locală care poate atinge 2000°K și excesul de aer stabilesc procentul de oxizi de azot. Reacțiile aferente procesului de ardere a hidrocarburilor sînt într-un număr extrem de mare și doar o parte dintre ele au fost analizate pînă în prezent sub aspectul cineticii lor; în tabela 1 se prezintă reacțiile considerate în cadrul tratărilor realizate pînă în prezent [9], [10]. Analiza acestor date permite să se distingă trei stadii:

— reacțiile (1) — (3) produc hidrocarburi ușoare, nearse și parțial oxidate;

— restul reacțiilor care reprezintă stadiul al doilea al procesului de combustie, exprimă principalele procese exotermice ce conduc la mari cantități de H_2O și CO;

— reacția (19) exprimă stadiul final al procesului de combustie, adică transformarea CO în CO_2.

Carburantul $JP-5$ i s-a atribuit formula C_8H_{16}, deși acesta nu este pur olefinic, dar proprietățile termodinamice sînt foarte apropiate, [3].

Mecanismul cinetic prezentat în tabela 1 reprezintă destul de exact procesul de combustie a carburantului, însă este greu ca sistemul de ecuații ce-l reprezintă să fie rezolvat simultan cu acelea prezentate anterior și constituind modelul gazodinamic al tubului de curent. Această operațiune necesită parcurgerea a numeroase etape foarte mici, ceea ce ar ungi calculele în mod nerațional, astfel că s-a considerat mult mai eficientă utilizarea unui model cinetic de echilibru simplificat, dar capabil

să exprime aspectele esențiale caracteristice întregului sistem și determinante în producerea emisiilor poluante.

Totuși, în condițiile arderii unui preamestec bine determinat de carburant și aer, ansamblul de ecuații din tabela 1 poate fi rezolvat în mod convenabil, rezultatele pentru amestecul stoichiometric la o presiune

Tabela 1

Nr. crt.	Reacția	Constanta cinetică a reacției ($cm^3/mol \cdot s$)
R_1	$C_8H_{16} + O_2 = 2\ C_4H_8O$	$k_1 = 7{,}5 \times 10^6\ T^{1,5}\ e^{-7900/T}$
R_2	$C_4H_8O + O_2 = H\dot{O}_2 + CO + + C\dot{H}_3 + C_2H_4$	$k_2 = 10^{11}T^{1,5}\ e^{-10000/T}$
R_3	$C_8H_{16} + O\dot{H} = H_2CO + C\dot{H}_3 + + 3C_2H_4$	$k_3 = 3 \times 10^{10}\ T\ e^{-4500/T}$
R_4	$C\dot{H}_3 + [O] = H_2CO + \dot{H}$	$k_4 = 2 \times 10^{13}$
R_5	$C\dot{H}_3 + O_2 = H_2CO + O\dot{H}$	$k_5 = 10^{12}$
R_6	$H_2CO + O\dot{H} = H_2O + CO + \dot{H}$	$k_6 = 10^{14}\ e^{-4000/T}$
R_7	$C_2H_4 + O_2 = 2H_2CO$	$k_7 = 3 \times 10^2 T^{2,5}$
R_8	$C_2H_4 + O\dot{H} = C\dot{H}_3 + H_2CO$	$k_8 = 5 \times 10^{13}\ e^{-3000/T}$
R_9	$C\dot{H}_3 + H_2 = CH_4 + \dot{H}$	$k_9 = 6 \times 10^{11}\ e^{-5500/T}$
R_{10}	$C_2H_4 \rightarrow C_2H_2 + H_2$	$k_{10} = 7 \times 10^8\ e^{-23500/T}$
R_{11}	$C_2H_2 + O\dot{H} \rightarrow C\dot{H}_3 + CO$	$k_{11} = 10^{13}\ e^{-3500/T}$
R_{12}	$2\dot{H} + M = H_2 + M$	$k_{12} = 2 \times 10^{18}\ T^{-1}$
R_{13}	$2[O] + M = O_2 + M$	$k_{13} = 10^{17}\ T^{-1}$
R_{14}	$O\dot{H} + \dot{H} + M = H_2O + M$	$k_{14} = 7 \times 10^{19}\ T^{-1}$
R_{15}	$\dot{H} + O_2 = O\dot{H} + [O]$	$k_{15} = 2{,}24 \times 10^{14}\ e^{-3400/T}$
R_{16}	$[O] + H_2 = O\dot{H} + \dot{H}$	$k_{16} = 1{,}74 \times 10^{13}\ e^{-4700/T}$
R_{17}	$\dot{H} + H_2O = H_2 + O\dot{H}$	$k_{17} = 8{,}41 \times 10^{13}\ e^{-9000/T}$
R_{18}	$[O] + H_2O = 2\ O\dot{H}$	$k_{18} = 5{,}75 \times 10^{13}\ e^{-9000/T}$
R_{19}	$CO + O\dot{H} = CO_2 + \dot{H}$	$k_{19} = 5{,}6 \times 10^{11}\ e^{-540/T}$
R_{20}	$H\dot{O}_2 + M = \dot{H} + O_2 + M$	$k_{20} = 2{,}4 \times 10^{15}\ e^{-23950/T}$
R_{21}	$H_2O + \dot{H} = 2\ O\dot{H}$	$k_{21} = 6 \times 10^{13}$

de 2 kgf/cm^2 și o temperatură inițială de 1000°K fiind prezentate în figura 2 [10]; se remarcă o schimbare bruscă în concentrația speciilor odată cu creșterea temperaturii, urmată de zone ce tind spre echilibru, interesante din punctul de vedere al modelării fenomenelor de producere a emisiilor poluante, deoarece se apropie ca durată de timpul de rezidență al gazelor

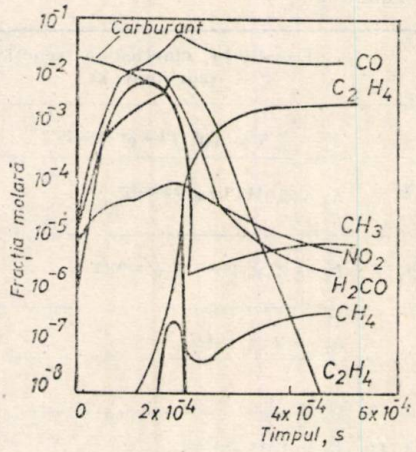


Fig. 2. — Variația concentrației speciilor cu timpul.

în tubul de curent. În consecință, un model redus al cineticii chimice de combustie, care să ia în considerație întîrzierea la aprindere (ce poate prezenta valori semnificative pentru carburantul în stare brută) și perioada de „postcombustie" comparabilă cu timpul de rezidență, va permite modelarea suficient de realistă a proceselor de formare a poluanților.

Acest model cinetic simplificat (reprezentînd un simbolism generalizat) este ilustrat prin tabela 2 și figura 3, din examinarea cărora se constată că permite determinarea conversiunii amestecurilor inițiale carburant-aer în produse cu echilibru parțial, atît direct (R_1, R_2), cît și prin intermediul hidrocarburilor nearse ($R_3 \ldots R_5$) CO_2 fiind considerat o specie acceptabilă în starea de echilibru parțial; reacția R_6 controlează conversiunea ulterioară spre produsele de echilibru complet.

Temperatura de combustie și concentrarea speciilor se determină prin interpolare între stările de echilibru parțial și total, bazate pe echili-

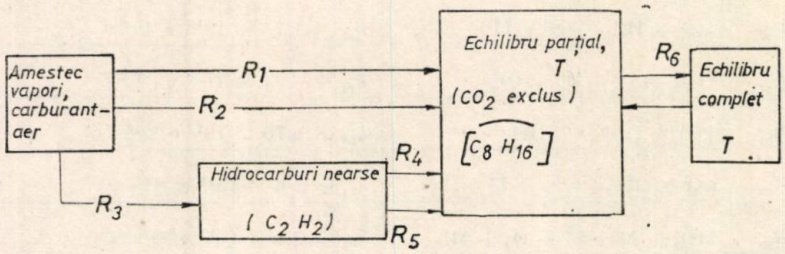


Fig. 3. — Schema modelului cinetic redus pentru procesul de combustie.

Tabela 2

Nr. crt.	Reacția	Constanta cinetică a reacției (cm^3/mol. s)
R_1	$C_8H_{16\ vap} + O_2 \rightarrow \widehat{C_8H_{16}}$	$k_{R_1} = 7{,}5 \times 10^6 T^{1,5} e^{-7900/T}$
R_2	$C_8H_{16\ vap} + \dot{OH} \rightarrow \widehat{C_8H_{16}}$	$k_{R_2} = 3 \times 10^{10} T\, e^{-4500/T}$
R_3	$C_8H_{16\ vap} + \dot{H} \rightarrow 4\, C_2H_2$	$k_{R_3} = 1{,}3 \times 10^{13} e^{-4000/T}$
R_4	$C_2H_2 + O_2 \rightarrow \frac{1}{4} \widehat{C_8H_{16}}$	$k_{R_4} = 10^1 e^{-6500/T}$
R_5	$C_2H_2 + \dot{OH} \rightarrow \frac{1}{4} \widehat{C_8H_{16}}$	$k_{R_5} = 2 \times 10^{12} e^{-3500/T}$
R_6	$CO + OH \rightleftarrows CO_2 + \dot{H}$	$k_{R_6} = 5{,}6 \times 10^{11} e^{-540/T}$

brul CO_2. Hidrocarburile ușoare, nearse, exemplificate prin C_2H_2 (Reacția R_3) se găsesc în cantități semnificative după ce aproximativ jumătate din carburantul inițial a fost consumat, încît ponderea lor în cadrul reacțiilor este importantă.

1.2.2. Oxizii de azot

Dintre numeroasele scheme ale reacțiilor propuse pentru modelarea producerii de oxizi de azot, s-a luat în considerație modelul definit în tabela 3 [11], [12].

Tabela 3

Nr. crt.	Reacția	Constanta cinetică a reacției (cm^3/mol · s)
N_1	$1/2\ N_2 + NO \rightleftarrows N_2 + [O]$	$1{,}2046 \times 10^{13} T°$
N_2	$1/2\ N_2 + O_2 \rightleftarrows NO + [O]$	$1{,}2046 \times 10^{13} T°$
N_3	$1/2\ N_2 + \dot{OH} \rightleftarrows NO + \dot{H}$	$4{,}2161 \times 10^{13} T°$
N_4	$\dot{H} + N_2O \rightleftarrows N_2 + \dot{OH}$	$3{,}0115 \times 10^{13} T°$
N_5	$[O] + N_2O \rightleftarrows N_2 + O_2$	$3{,}6138 \times 10^{13} T°$
N_6	$[O] + N_2O \rightleftarrows 2\ NO$	$4{,}8184 \times 10^{13} T°$

Dintre reacțiile prezentate în tabela 3, primele două sînt de departe cele mai importante (constituind așa-numitul lanț Zeldovich); reacția N_3 devine semnificativă în anumite condiții, respectiv cînd părți din carburant ard în prezența unor cantități insuficiente de aer, iar ultimele trei nu au niciodată o contribuție importantă în formarea oxizilor de azot, însă pentru exactitatea calculelor în programul elaborat s-a inclus întregul set de reacții.

Pentru aplicarea acestui model de formare a oxizilor de azot în cazul combustorilor motoarelor cu turbină de gaze este necesară stabilirea nivelului concentrațiilor la toate speciile active din tabel, pentru toate stările termodinamice specifice acestor combustori. În condițiile

de presiune și temperaturi specifice funcționării la altitudine joasă și putere maximă (cînd emisiile poluante prezintă cel mai mare coeficient de agresivitate) reacțiile de oxidare a hidrocarburilor (vezi tabela 2) sînt mult mai rapide decît reacțiile de formare a oxizilor de azot. În vederea unei evaluări corecte a formării speciilor, se fac următoarele ipoteze :

a) Concentrațiile de N_2, O_2, OH, H și H_2 din combustor corespund valorilor de echilibru pentru temperaturi și presiuni ridicate, adică tocmai condițiilor favorabile producerii oxizilor de azot ;

b) Concentrațiile de N și N_2O sînt determinate pentru un regim staționar și nu de echilibru, în funcție de NO, avînd timpi de relaxare mai reduși decît acesta din urmă.

Reacțiile $N_1 - N_6$ combinate ca și acelea date de tabelele 1 sau 2 cu ecuațiile definitorii pentru modelul de curgere a gazelor prin combustor în condițiile specificate, permit estimarea nivelului de oxizi de azot, ca și în cazul hidrocarburilor nearse.

Numărul și poziția tuburilor de curent, precum și datele de intrare ale programului de calcul, depind de parametrii geometrici și funcționali ai combustorului considerat. Ecuațiile aerodinamice ale mișcării se scriu pentru fiecare tub sub formă diferențială, și, împreună cu acelea reprezentînd frontierele zonei de recirculație, constituie un sistem de ecuații diferențiale posibil de rezolvat simultan pentru variabilele funcții de x ; se utilizează procedeul de integrare numerică Runge-Kutta, considerîndu-se intervalul $x + \Delta x$, apoi $x + 2\Delta x$ etc.

Procese ca : vaporizarea carburantului, reacțiile chimice dintre carburant și aer, aportul de aer din exterior și schimbul turbulent între tuburi sînt evaluate sub forma de subrutine separate față de sistemul de ecuații al tubului de curent. Fiecare etapă de calcul folosește ca date inițiale pe acelea finale ale etapei precedente, astfel că intervalele trebuie să fie suficient de mici. Se obțin în felul acesta proprietățile de curgere și concentrația de specii în procesul de combustie ca funcții de poziția axială a jetului de gaze în tubul de curent.

1.3. COMPARAȚIE ÎNTRE REZULTATELE CALCULATE ȘI CELE EXPERIMENTALE

Metodele de calcul prezentate mai sus au fost dublate de cercetări experimentale realizate în diverse condiții de funcționare ale motorului (punîndu-se accentul pe regimurile cele mai favorabile producerii de emisii poluante). Cu acest prilej, s-a testat și eficiența a diverse tehnologii de reducere a nivelului emisiilor poluante, de exemplu reglarea pentru toate regimurile de lucru ale motorului, a raportului carburant/aer, atomizarea carburantului cu ajutorul aerului sub presiune etc. O eficiență deosebită au prezentat-o tehnicile prin care se obține un reglaj atît a cantității de carburant, cît și de aer, în vederea menținerii raportului carburant/aer optim de-a lungul întregului traseu parcurs de gaze, menținîndu-se proporții foarte reduse de CO, hidrocarburi nearse și fum, [10].

S-a constatat totodată că este posibil să se dezvolte mijloace de reducere a cantității de oxizi de azot și prin controlul proceselor de ardere, plecîndu-se de la observația făcută anterior, în sensul că aceștia au timpi de reacție mai reduși decît aceia caracteristici arderii hidrocarburilor ;

reducerea timpului de rezidență a gazelor în combustor oferă astfel o soluție acestei probleme [13], [14].

În figurile 4 și 5 se prezintă rezultatele calculate și experimentale pentru emisiile de CO, respectiv hidrocarburi nearse, pentru diverse raporturi carburant/aer, având drept parametru raportul de echivalență

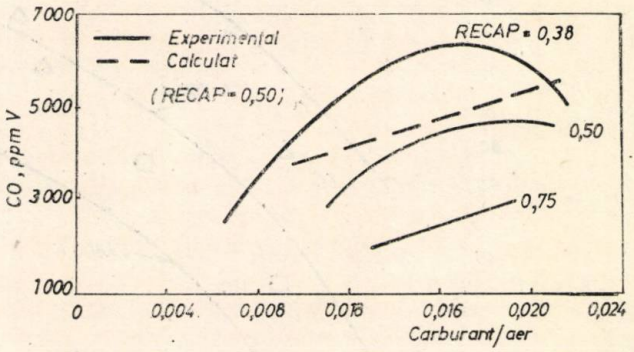


Fig. 4. — Emisia de CO pentru diverse raporturi carburant/aer și valori RECAP.

carburant/aer pentru zona primară de ardere (RECAP); aceasta se definește prin suprapunerea rapoartelor carburant/aer local și stoichiometric, pentru amestecul considerat. Carburantul utilizat în determinările experimentale a fost JP-5, iar camera de ardere comportă o construcție și

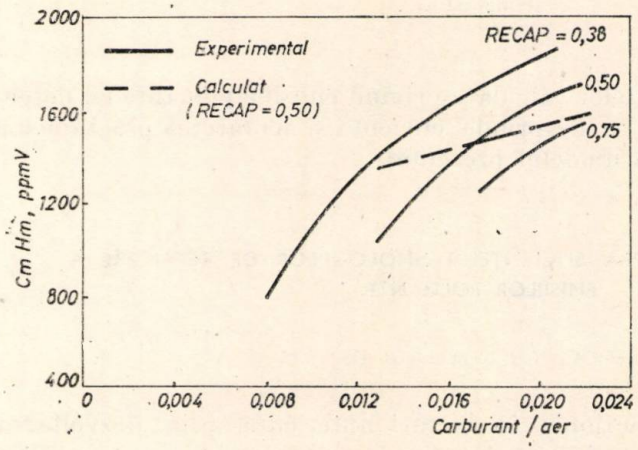


Fig. 5. — Emisia de hidrocarburi nearse pentru diverse raporturi carburant/aer și valori RECAP.

instrumentație adaptate acoperirii unei game foarte largi de condiții funcționale și reglaje, [10].

În figura 6 se prezintă rezultatele privind emisiile de NO_x pentru diverse temperaturi și proporții carburant/aer, raportul de compresie fiind 8,4 [12], [15].

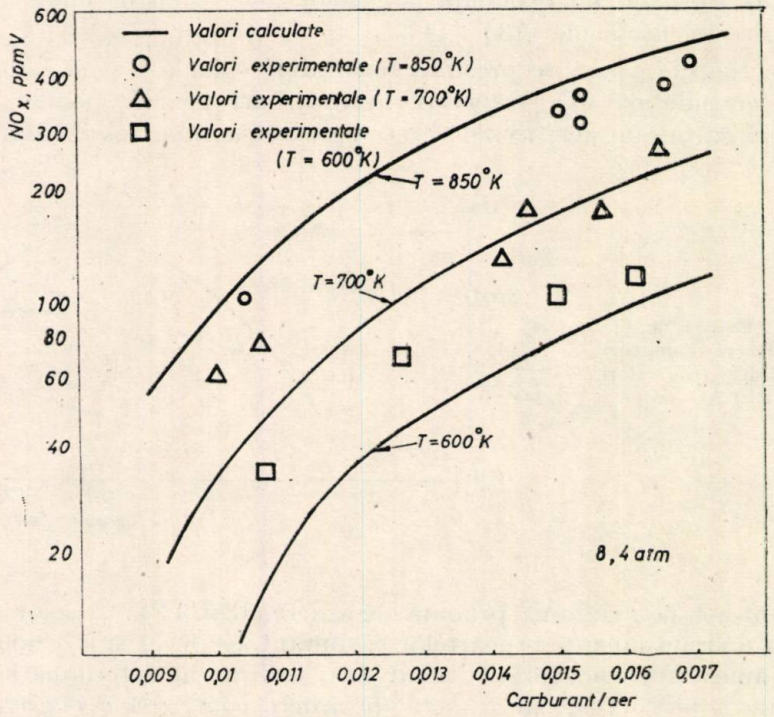


Fig. 6. — Emisia de NO_x pentru diverse raporturi carburant/aer și temperaturi.

Din compararea datelor calculate privind emisiile poluante cu determinările experimentale, se desprinde eficiența și acuratețea programelor de calcul elaborate după modelul prezentat.

2. CONSIDERAȚII ASUPRA EFICIENȚEI TEHNOLOGIILOR DE REDUCERE A EMISIILOR POLUANTE

2.1. REDUCEREA NIVELULUI DE FUM

După cum s-a menționat în lucrări anterioare, prin dezvoltarea combustorilor inelari de mare eficiență, s-a reușit reducerea emisiilor de fum la valori foarte coborîte, astfel că pentru orice regim de funcționare a turbomotoarelor moderne, gazele evacuate sînt practic invizibile.

Acesta este un rezultat direct al mărimii gradului de perfecțiune al arderii, prin corecta reglare a raportului carburant/aer, atomizarea carburantului etc.

2.2. REDUCEREA NIVELULUI DE OXID DE CARBON ȘI HIDROCARBURI NEARSE

Tehnologiile amintite anterior au o contribuție directă în reducerea nivelului emisiilor de CO și hidrocarburi nearse, funcții directe de gradul de perfecțiune al arderii, ceea ce are drept rezultat că toți factorii constructivi și funcționali susceptibil de a mări eficiența procesului de combustie determină implicit și o reducere a emisiilor poluante.

Astfel, mărirea raportului de compresie, a aportului de aer, îmbunătățirea condițiilor de amestec aer-carburant au drept rezultat reducerea substanțială a emisiilor de CO și hidrocarburi nearse. În figura 7 se ilus-

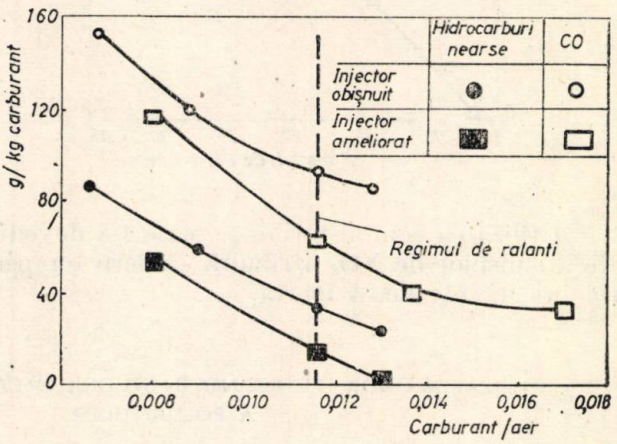


Fig. 7. — Reducerea nivelului de CO și hidrocarburi nearse prin îmbunătățirea condițiilor de ardere (turbomotorul funcționînd la regim redus, în condiții standard, cu kerosen).

strează aceste efecte, remarcîndu-se eficiența măririi raportului carburant/aer în condiții favorabile producerii de emisii poluante, turbomotorul funcționînd la regimuri reduse de putere și turație, precum și a îmbunătățirii sistemului de alimentare cu carburant.

2.3. REDUCEREA NIVELULUI DE OXIZI DE AZOT

În lucrări anterioare [1], [2], [3], [13] a fost expus procedeul bazat pe injecția cu apă, de o eficiență remarcabilă în reducerea nivelului emisiilor de NO_x, însă de utilizare limitată (de obicei pentru decolare) datorită complicațiilor constructive și greutății suplimentare pe care le implică.

În ultimul timp s-au făcut progrese notabile în vederea rezolvării acestei probleme prin măsuri constructive. Pe lîngă aspectele menționate în § 1.3, este de remarcat și eficiența manifestată de atomizarea picăturilor de carburant (kerosen) cu ajutorul aerului sub presiune (fig. 8), [14], ceea ce conduce la reducerea timpului de rezidență în combustor.

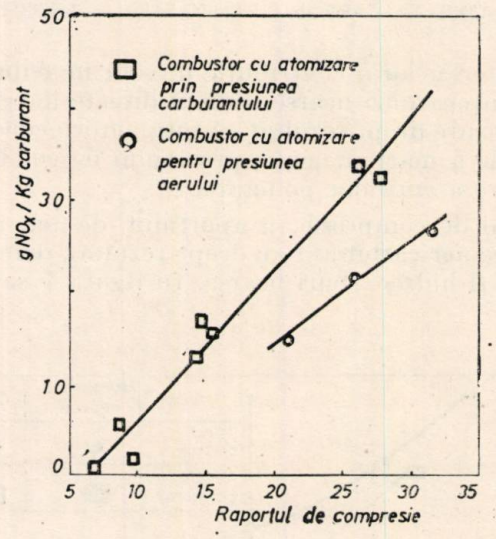


Fig. 8. — Reducerea nivelului de NO_x prin atomizarea carburantului (determinări la nivelul mării, în condiţii standard, carburantul fiind kerosen).

Utilizarea combustorilor în serie s-a dovedit un alt mijloc de reducere a emisiilor de NO_x atribuită scăderii temperaturii maxime a flăcării prin injecţia de masă inertă.

3. UTILIZAREA UNOR TEHNICI NOI ÎN STUDIUL MECANISMULUI DE FORMARE A POLUANŢILOR

Pe lîngă progresele realizate în domeniul automatizării şi computerizării analizoarelor de gaze bazate pe efecte spectrometrice sau cromatografice [17], [18], un interes deosebit îl prezintă folosirea unor tehnici noi; astfel, s-au realizat determinări deosebit de precise privind oxidarea grafitului pirolitic şi a funinginei, cu ajutorul tubului de şoc, pînă la temperaturi de 4000°K şi presiuni de 13 kgf/cm², [19].

Un caz aparte îl constituie turboreactoarele cu postcombustie care sînt de regulă folosite în aplicaţiile militare. Deşi folosită şi în alte momente ale zborului, postcombustia este folosită îndeosebi în perioada de decolare pentru scurtarea lungimii şi a timpului de decolare. Pe durata funcţionării postcombustiei, intensitatea poluării este evident mai ridicată, fiind favorizată de mărirea raportului carburant/aer, de creşterea fracţiunii arderii incomplete şi de creşterea volumului relativ al produselor de ardere în debitul total de gaze. Cazul poluării pe durata funcţionării postcombustiei este mai puţin prezentat în literatura de specialitate. Schema de studiu prezentată în această comunicare oferă un instrument corespunzător pentru cercetarea aspectelor de poluare şi în cazul acestui regim funcţional.

Primită la redacţie la 8 iunie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Ispas, C. Țurcanu, Al. Nica, P. Jivan, *Considerații asupra posibilităților de limitare a emisiilor poluante generate de aeronavele moderne*, Ses. Științifică Acad. Militară, București, 1974.
2. Șt. Ispas, C. Țurcanu, Al. Nica, SCMA, **34**, *1* (1975).
3. Șt. Ispas, L. Nica, Ioana Pârvulescu, *Sisteme de lubrificație, alimentare cu carburant și fluide hidraulice pentru construcțiile aerospațiale*, Edit. Academiei București, 1976.
4. L. Alpinieri, AIAA Journal, **2**, *9* (1964).
5. * * * *Computer Program for the Analysis of Annular Combustors*, North. Res. Eng. Corp., Rept. 1111—1, Cambridge, Mass., 1968.
6. B. J. Wood ș.a., AIAA Journal, **1**, *5* (1963).
7. F. A. Williams, *Combustion Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1965.
8. R. A. Dickerson, M. D. Schuman, Journal of Spacecraft, **2** (1965).
9. * * * *Thirtienth Symposium (International) on Combustion*, The Combustion Inst., 1971.
10. S. A. Mosier ș.a., Pratt-Whitney Sc. Rep., West-Palm Beach, 1974.
11. G. A. Lavoie, *A Model for Nitric Oxide Emissions from Aircraft Gas Turbine Engines*, AIAA Paper 71—123, 1971.
12. R. S. Fletcher ș.a., *The Control of Oxides of Nitrogen Emissions from Aircraft Gas Turbine Engines*, North. Res. Eng. Corp., Cambridge Mass., Rep. FAA—RD—71—111, 1972.
13. D. W. Bahr, *Technology for Reduction of Aircraft Turbine Engine Exhaust Emissions*, AIAA Rep. 72—1202, 1972.
14. D. W. Bahr, General Electric Sc. Rep., Cincinati, 1974.
15. L. Bogdan, H. T. McAdams, *Analysis of Aircraft Exhaust Emission Measurements*, CAL No. NA—5007—K—1, Cornell Aeron. Lab., Buffalo, 1971.
16. D. A. Sullivan, *A Simple Gas Turbine Combustor NO_x Correlation Including the Effect of Vitiated Air*, Gas Turbine Conf., Paper 76—GT—5, New Orleans, 1976.
17. * * * *Proceedings of the Symposium on Emissions from Continuous Combustion Systems*, New Orleans, 1972.
18. N. R. Dibelius, *A Review of Specifications for methods of Measuring Emissions of Air Pollutants and Effluent of Water Pollutants*, Gas Turbine Conf., Paper 76—GT—107, New Orleans, 1976.
19. C. Park și J. P. Appleton, Combustion and Flame, **19**, *3* (1973).

ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE ÎN H

de GHEORGHE ZĂTREANU, CONSTANTIN SILVESTRU

Institutul politehnic București

Se prezintă o teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele în H, cu mecanisme bielă-manivelă normale și cu arbori cotiți, identici sau simetrici în oglindă, aprinderile fiind uniform repartizate pe ansamblul cilindrilor aferenți aceluiași arbore cotit.
Se arată că forțele de inerție ale maselor cu mișcare de translație se echilibrează complet la orice motor: în funcție de tipul motorului, acest rezultat se obține fie organic, prin construcția arborilor cotiți, fie prin calarea lor corespunzătoare.
Se precizează echilibrajul asigurat prin repartiția uniformă a aprinderilor pe ansamblul motorului.

1. INTRODUCERE

La motoarele cu ardere internă cu număr mare de cilindri, dispunerea acestora în H, adică în patru linii cu doi arbori cotiți, conduce la o construcție compactă și cu solicitări mai mici ale arborilor cotiți decît la motorul în stea.

Principial, motorul în H poate fi considerat ca fiind format din două motoare cu cilindri opuși, planele determinate de axele cilindrilor fiecărui motor fiind perpendiculare pe planul determinat de axele arborilor cotiți.

Fiecare linie avînd același număr de cilindri, numărul cilindrilor întregului motor, i, este multiplu de patru.

Se consideră cazul mecanismelor bielă-manivelă normale, identice pentru toți cilindrii. Aprinderile sînt considerate uniform repartizate pentru toți cilindrii care acționează același arbore cotit.

Arborii cotiți pot fi identici sau simetrici în oglindă și se pot roti fie în același sens, fie în sensuri contrare. Se admite că se utilizează acele soluții de arbori cotiți care asigură cel mai avansat echilibraj al forțelor de inerție în fiecare linie de cilindri: manivelele fiecărui arbore cotit formează o figură simetrică față de axa lor de rotație, ocupînd direcții radiale distincte sau fiind două cîte două în fază. În consecință, forțele de inerție ale maselor cu mișcare de rotație se echilibrează reciproc, cu o singură excepție la motorul cu opt cilindri, dacă cele două manivele ale fiecărui arbore cotit sînt în fază. Echilibrarea forțelor menționate se poate realiza la acest motor cu mase atașate arborelui cotit.

Din motivele arătate, lucrarea de față se ocupă numai de echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 1, 1979, P. 141–153

2. ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE PE ANSAMBLUL LINIILOR DE CILINDRI CARE ACȚIONEAZĂ ACELAȘI ARBORE COTIT

Cele două linii de cilindri care acționează același arbore cotit formează un motor cu $\frac{i}{2}$ cilindri opuși, cu aprinderi uniform repartizate. Arborele cotit al acestui motor are $\frac{i}{4}$ manivele, fiecare manivelă fiind acționată de două biele, cîte una pentru fiecare linie de cilindri. Din punctul de vedere al echilibrajului forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, motorul cu $\frac{i}{2}$ cilindri opuși poate fi înlocuit de un motor echivalent avînd doi cilindri opuși deserviți de un arbore cotit cu o singură manivelă.

Pentru un cilindru al motorului echivalent, termenul de un ordin oarecare al forțelor menționate este egal cu rezultanta termenilor de același ordin pe ansamblul liniei substituite de cilindrul considerat. Astfel, în poziția în care manivela formează în sensul său de rotație unghiul α cu axa cilindrului superior (fig. 1), termenul de ordinul p aferent acestui cilindru este [1]

$$\mathcal{T}_p = \frac{i}{4} T_p \cos(p\alpha + \psi_p), \qquad (1)$$

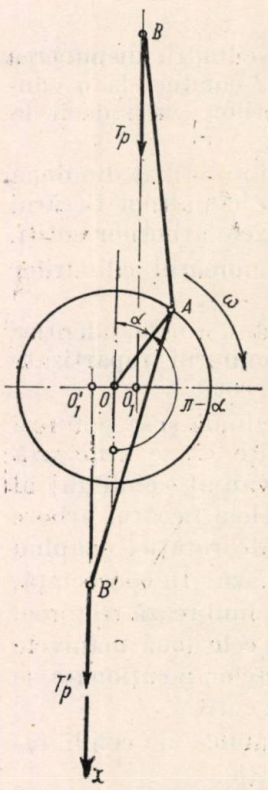


Fig. 1. — Termenii de ordinul p pentru motorul echivalent.

în expresia (1) T_p este amplitudinea termenului considerat în cazul echipajului mobil al unui singur cilindru, iar ψ_p este faza sa inițială, adică în momentul cînd $\alpha = 0$.

Pentru cilindrul inferior, unghiul care precizează poziția manivelei are valoarea $-(\pi-\alpha) = \alpha - \pi$. Alegînd sensul lui $\mathcal{T}_p$ ca sens pozitiv al forțelor, termenul de ordinul p aferent cilindrului inferior este

$$\mathcal{T}'_p = -\frac{i}{4} T_p \cos[p(\alpha - \pi) + \psi_p].$$

Însumînd forțele $\mathcal{T}_p$ și $\mathcal{T}'_p$ se obține rezultanta termenilor de ordinul p pentru motorul cu $\frac{i}{2}$ cilindri opuși, adică

$$\mathcal{R}_p = \mathcal{T}_p + \mathcal{T}'_p = \frac{i}{4} T_p\{\cos(p\alpha + \psi_p) - \cos[p(\alpha - \pi) + \psi_p]\}.$$

După transformări, relația precedentă devine

$$\mathcal{R}_p = -\frac{i}{2} T_p \sin\left[p\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \psi_p\right] \sin p \frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

iar cu notația

$$A_p = -\frac{i}{2} T_p \sin p \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

rezultă

$$\mathcal{R}_p = A_p \sin\left[p\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \psi_p\right].$$

Termenii de un ordin oarecare se echilibrează cînd se anulează amplitudinea rezultantei acestor termeni, deci cînd $|A_p| = 0$. Avînd în vedere relația (3), se obține condiția

$$\sin p \frac{\pi}{2} = 0$$

sau

$$p \frac{\pi}{2} = k\pi\,;\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Se constată că termenii care se echilibrează pe ansamblul celor două linii au ordinele

$$p = 2k\,;\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{4}$$

adică ordine pare.

Pentru termenii de ordin impar, atunci cînd ei există,

$$\sin p \frac{\pi}{2} = \sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$$

și

$$|A_p| = A_{p_{\max}} = \frac{i}{2} T_p, \tag{5}$$

ceea ce înseamnă că rezultantele acestor termeni sînt maxime.

Se deosebesc două cazuri, după ordinul termenilor care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri.

2.1. CAZUL CÎND MANIVELELE SÎNT UNIFORM DISTRIBUITE ÎN JURUL AXEI LOR DE ROTAȚIE

Ordinul termenilor care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri este [1]

$$p = k\frac{i}{4}\,;\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6}$$

Ceilalți termeni se echilibrează reciproc pe fiecare linie de cilindri în parte.

a) La motoarele în patru timpi punctele moarte interioare trebuie realizate simultan cîte două. Manivelele ocupînd direcții radiale distincte,

de fiecare dată cînd se realizează un punct mort într-una din linii, al doilea punct mort interior trebuie realizat în cealaltă linie. Rezultă necesitatea ca manivelele să fie plasate două cîte două în opoziție, ceea ce este posibil cînd numărul lor este par,

$$\frac{i}{4} = 2l;\ l = 1, 2, 3, \ldots,$$

deci cînd numărul de cilindri pentru întregul motor este multiplu de opt. În fiecare linie de cilindri, aprinderile pot fi uniform sau neuniform repartizate.

Întrucît la aceste motoare $\frac{i}{4}$ este un număr par, formula (6) dă numai valori pare, adică valori ce satisfac condiția (4). Astfel, motorul este complet echilibrat din punctul de vedere al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

b) La motoarele în doi timpi punctele moarte interioare se realizează unul cîte unul. Ca urmare, manivelele nu pot fi plasate două cîte două în opoziție și deci numărul lor trebuie să fie impar,

$$\frac{i}{4} = 2l - 1;\ l = 1, 2, 3, \ldots,$$

astfel încît numărul de cilindri este un multiplu impar de patru. Aprinderile vor fi uniform repartizate în fiecare linie de cilindri.

Deoarece $\frac{i}{4}$ este un număr impar, din (6) se obțin atît ordine pare, cît și ordine impare, în funcție de valorile multiplului k. Conform relațiilor (4) și (5), termenii de ordin par se echilibrează între cele două linii de cilindri, iar termenii de ordin impar produc rezultante maxime.

Dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, lipsesc termenii de ordin impar aferenți echipajului mobil al fiecărui cilindru, cu excepția termenului de ordinul întîi. Rezultanta acestui termen subzistă numai la motorul cu patru cilindri, pentru care se obține din (6) $p = 1$ cînd $k = 1$.

2.2. CAZUL CÎND MANIVELELE SÎNT PLASATE DOUĂ CÎTE DOUĂ ÎN FAZĂ, GRUPELE DE MANIVELE ÎN FAZĂ FIIND UNIFORM DISTRIBUITE ÎN JURUL AXEI LOR DE ROTAȚIE

Ordinul termenilor care au o rezultantă în fiecare linie de cilindri este [1]

$$p = k\frac{i}{8},\ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7}$$

La motoarele în doi timpi nu se poate utiliza această distribuție a manivelelor, deoarece realizarea punctelor moarte interioare unul cîte unul reclamă plasarea manivelelor pe direcții radiale distincte. Intră deci în discuție numai motoarele în patru timpi.

Deoarece punctele moarte interioare se realizează simultan cîte două, iar manivelele sînt plasate două cîte două în fază, de cîte ori se realizează un punct mort interior într-o linie de cilindri, al doilea punct mort interior

se obține în aceeași linie. Ca urmare, în opoziția grupei de manivele în fază, care asigură punctele moarte menționate, nu se poate plasa o altă grupă de manivele în fază deoarece aceasta ar realiza simultan alte două puncte moarte interioare în cealaltă linie de cilindri. Rezultă că numărul grupelor de manivele în fază trebuie să fie impar,

$$\frac{i}{8} = 2l - 1\,;\; l = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

deci numărul de cilindri ai întregului motor este un multiplu impar de opt. În fiecare linie de cilindri aprinderile sînt uniform repartizate.

Întrucît $\frac{i}{8}$ este un număr impar, valorile impare ale multiplului k din (7) conduc la ordine impare. Rezultantele termenilor corespunzători au amplitudinea maximă dată de relația (5). Dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, situația se întîlnește numai pentru termenul de ordinul întîi și numai în cazul $i = 8$, în care formula (7) devine $p = 1$ pentru $k = 1$. Pentru valorile pare ale numărului k, ordinele date de (7) sînt pare, termenii respectivi echilibrîndu-se reciproc între cele două linii de cilindri conform relației (4).

Plasarea manivelelor două cîte două în fază asigură un echilibraj mai slab al forțelor de inerție în comparație cu distribuția uniformă a manivelelor în jurul axei lor de rotație. În schimb, ea permite echilibrarea completă a momentelor externe ale forțelor de inerție, cînd arborii cotiți au plan central de simetrie.

Concluziile analizei precedente sînt sintetizate în tabelul 1.

3. ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE PE ANSAMBLUL MOTORULUI

Analiza care urmează se referă, evident, la acei termeni ai forțelor de inerție care dau rezultante pe ansamblul cilindrilor deserviți de același arbore cotit. Inspectînd tabelul 1 se observă că ordinele acestor termeni se calculează cu relația

$$p = (2k - 1)\frac{i}{2\tau}\,;\; k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{8}$$

unde τ este numărul de timpi ai ciclului motor. Se mai constată că în fiecare linie de cilindri a motoarelor respective aprinderile sînt uniform repartizate. Decalajul unghiular dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie este

$$\delta = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{4}} = \frac{4\tau\pi}{i} \tag{9}$$

Tabelul 1

Echilibrajul forţelor de inerţie pe ansamblul cilindrilor aferenţi unui arbore cotit

Distribuţia manivelelor în jurul axei lor de rotaţie	Ordinul termenilor care au rezultantă în fiecare linie de cilindri	Numărul de timpi ai ciclului motor	Repartiţia aprinderilor în fiecare linie de cilindri	Numărul total de cilindri	Ordinul termenilor care nu se echilibrează pe ansamblul cilindrilor aferenţi unui arbore cotit		
Uniformă	$k\frac{i}{4}$	4	Uniformă sau neuniformă	$8l$	—		
		2	Uniformă	$4(2l-1)$	Mecanisme dezaxate		$(2k-1)\frac{i}{4}$
					Mecanisme axate	$i=4$	1
						$i>4$	—
Două cîte două în fază, grupele de manivele în fază uniform distribuite	$k\frac{i}{8}$	4	Uniformă	$8(2l-1)$	Mecanisme dezaxate		$(2k-1)\frac{i}{8}$
					Mecanisme axate	$i=8$	1
						$i>8$	—

$k = 1, 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, 3 \ldots$

Se numerotează consecutiv cilindrii fiecărei linii, începînd de la una din extremităţile motorului, cu $1, 2, 3, \ldots, \frac{i}{4}$ pentru liniile superioare şi cu $1', 2', 3', \ldots, \left(\frac{i}{4}\right)'$ pentru liniile inferioare. În fiecare linie, aprinderile consecutive se numerotează cu I, II, III, ..., $\frac{i}{4}$, respectiv cu I', II', III', ..., $\left(\frac{i}{4}\right)'$ începînd cu aprinderile cilindrilor 1, respectiv 1'. Toate mărimile referitoare la liniile din stînga vor purta indicele s, iar cele referitoare la liniile din dreapta indicele d.

Se consideră momentul în care manivela cilindrului 1_s formează cu axa acestuia unghiul α_{1_s}. În acest moment rezultanta termenilor de ordinul p ai cilindrilor din stînga are, conform expresiei (2), mărimea

$$\mathfrak{R}_{p_s} = -\frac{i}{2} T_p \sin\left[p\left(\alpha_{1_s} - \frac{\pi}{2}\right) + \psi_p\right] \sin p\frac{\pi}{2}$$

sau

$$\mathcal{R}_{p_s} = -\frac{i}{2} T_p \sin p \frac{\pi}{2} \left[\sin (p\alpha_{1_s} + \psi_p) \cos p \frac{\pi}{2} - \right.$$

$$\left. - \cos (p\alpha_{1_s} + \psi_p) \sin p \frac{\pi}{2} \right].$$

Așa cum s-a arătat în secțiunea 2 numai termenii de ordin impar dau rezultante pe ansamblul cilindrilor deserviți de același arbore cotit. Pentru p impar, $\sin p \frac{\pi}{2} = \pm 1$ și $\cos p \frac{\pi}{2} = 0$, deci relația precedentă devine

$$\mathcal{R}_{p_s} = \frac{i}{2} T_p \cos (p\alpha_{1_s} + \psi_p). \tag{10}$$

Întrucît mecanismele bielă-manivelă sînt identice pentru toți cilindrii, iar arborii cotiți sînt identici sau simetrici în oglindă, rezultanta $\mathcal{R}_{p_d}$ pentru cilindrii din dreapta are aceeași amplitudine $\frac{i}{2} T_p$ ca și rezultanta $\mathcal{R}_{p_s}$. Cele două rezultante pot diferi numai prin fază, în funcție de succesiunea aprinderilor între linii.

Dacă aprinderile I_s și I_d sînt simultane, manivela cilindrului 1_d formează cu axa acestui cilindru în sensul ei de rotație unghiul $\alpha_{1_d} = \alpha_{1_s}$, iar

$$\mathcal{R}_{p_d} = \mathcal{R}_{p_s} = \frac{i}{2} T_p \cos (p\ \alpha_{1_s} + \psi_p).$$

Pentru declanșarea simultană a aprinderilor I_s și N_d, unde $N_d = I_d$, II_d, III_d, ..., $\left(\frac{i}{2}\right)_d$, arborele cotit din dreapta trebuie rotit în sensul său de rotație cu un unghi egal cu $(N_d - 1)\delta$, menținînd în poziție neschimbată arborele cotit din stînga.

Dacă între aprinderile I_s și N_d există un decalaj ζ, aprinderea I_s fiind urmată de aprinderea N_d, arborele cotit din dreapta trebuie rotit în sensul său de rotație față de arborele cotit din stînga cu unghiul $(N_d - 1)\delta - \zeta$. Expresia rezultantei termenilor de ordinul p aferenți cilindrilor din dreapta este în acest caz :

$$\mathcal{R}_{p_d} = \frac{i}{2} T_p \cos\{p[\alpha_{1_s} + (N_d - 1)\ \delta - \zeta] + \psi_p\}$$

sau

$$\mathcal{R}_{p_d} = \frac{i}{2} T_p \cos [p(\alpha_{1_s} - \zeta) + \chi + \psi_p], \tag{11}$$

unde

$$\chi = p(N_d - 1)\ \delta.$$

Ținînd seama de relațiile (8) și (9), se deduce

$$\chi = (2k - 1)(N_d - 1) \cdot 2\pi$$

și deci relația (11) se poate scrie

$$\mathcal{R}_{p_d} = \frac{i}{2} T_p \cos\left[p(\alpha_{1_s} - \zeta) + \psi_p\right], \tag{12}$$

ceea ce arată că faza rezultantei $\mathcal{R}_{p_d}$ nu depinde de aprinderea din dreapta care urmează la intervalul unghiular ζ aprinderii I_s.

Rezultanta termenilor de ordinul p pe ansamblul motorului este

$$\mathcal{F}_p = \mathcal{R}_{1_s} + \mathcal{R}_{p_d},$$

sau, avînd în vedere expresiile (10) și (12),

$$\mathcal{F}_p = \frac{i}{2} T_p\{\cos(p\alpha_{p_s} + \psi_p) + \cos[p(\alpha_{1_s} - \zeta) + \psi_p]\}.$$

După transformări, rezultă

$$\mathcal{F}_p = iT_p \cos p\frac{\zeta}{2} \cos\left[p\left(\alpha_{1_s} - \frac{\zeta}{2}\right) + \psi_p\right] \tag{13}$$

și folosind notația

$$F_p = iT_p \cos p\frac{\zeta}{2}, \tag{14}$$

relația (13) devine

$$\mathcal{F}_p = F_p \cos\left[p\left(\alpha_{1_s} - \frac{\zeta}{2}\right) + \psi_p\right].$$

Mărimea rezultantei termenilor de ordinul p pe ansamblul motorului depinde de valoarea decalajului ζ, care este cuprins în intervalul $[0, \delta]$, adică

$$0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{4\tau\pi}{i}. \tag{15}$$

Pentru $\zeta = 0$ cînd se produc simultan aprinderile I_s și N_d, această rezultantă este

$$\mathcal{F}_p = iT_p \cos(p\alpha_{1_s} + \psi_p) = 2\mathcal{R}_{p_s}.$$

Aceeași valoare se obține pentru $\zeta = \delta = \frac{4\tau\pi}{i}$, cînd au loc simultan aprinderile I_s și $N_d - 1$. Deoarece aprinderile sînt uniform repartizate pe ansamblul cilindrilor deserviți de același arbore cotit, aprinderile simultane I_s și N_d sau I_s și $N_d - 1$ adică aprinderi în cilindri ai liniilor s și d, alternează cu aprinderi simultane în cilindri ai liniilor s' și d' (fig. 2).

3.1. Condiția ca termenii de ordinul p să se echilibreze pe ansamblul motorului este $F_p = 0$, adică

$$\cos p \frac{\zeta}{2} = 0$$

sau

$$\zeta = \frac{2m-1}{p}\pi, \qquad (16)$$

unde factorul $m \geqslant 1$ poate lua numai anumite valori întregi. Pentru a stabili aceste valori, din (15) și (16) se deduce

$$1 \leqslant m \leqslant \frac{2\tau p}{i} + \frac{1}{2}.$$

Conform relației (8), termenul $\frac{2\tau p}{i}$ este un număr întreg, astfel încît condiția precedentă poate fi scrisă

$$m = 1, 2, 3, \ldots, \frac{2\tau p}{i}. \qquad (17)$$

Valorile decalajului ζ care asigură echilibrajul căutat se obțin deci din (16), unde m poate lua numai valorile din (17).

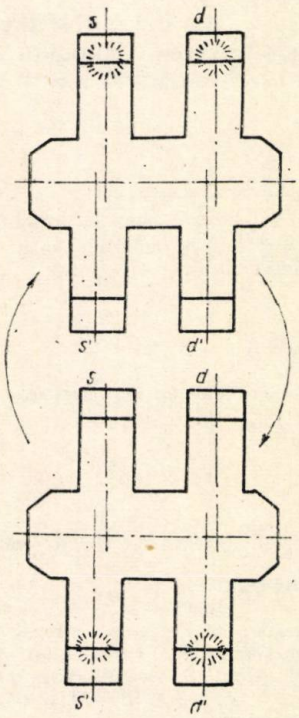


Fig. 2. — Succesiunea aprinderilor la motorul în H cînd se produc simultan aprinderi de aceeași parte a arborilor cotiți.

3.2. Echilibrarea termenilor de un anumit ordin pe ansamblul motorului antrenează și echilibrarea altor termeni. Se presupune că s-au echilibrat termenii de ordinul p_0 prin adoptarea decalajului

$$\zeta = \frac{2m_0 - 1}{p_0}\pi,$$

calculat cu (16) pentru m_0 aparținînd domeniului (17). Pentru orice ordin p care asigură egalitatea

$$\frac{2n-1}{p} = \frac{2m_0 - 1}{p_0},$$

în care n este un număr întreg, din (16) se obține același decalaj ζ. Ca urmare, simultan cu echilibrarea termenilor de ordinul p_0 se echilibrează și termenii de ordinele *)

$$p = (2n - 1)\frac{p_0}{2m_0 - 1}. \tag{18}$$

3.3. Cel mai bun echilibraj al motorului în H se obține cînd se asigură echilibrarea termenilor de ordinul cel mai mic. Întrucît acest ordin calculat din (8) pentru $k = 1$ este

$$p_{min} = \frac{i}{2\tau}, \tag{19}$$

*) Termenii de ordinul p_0 fac parte dintre cei care subzistă pe ansamblul cilindrilor aferenți aceluiași arbore cotit. În consecință, ordinul p_0 poate fi exprimat conform relației (8), adică

$$p_0 = (2k_0 - 1)\frac{i}{2\tau},$$

astfel încît din (18) și expresia precedentă se obține

$$p = (2n - 1)\frac{2k_0 - 1}{2m_0 - 1}\cdot\frac{i}{2\tau}.$$

Întrucît relația (8) arată că p este un multiplu impar de $\frac{i}{2\tau}$, se pot prezenta două alternative.

a) Dacă $2k_0 - 1$ și $2m_0 - 1$ nu au divizori comuni, ultima formulă este respectată pentru numerele n ce rezultă din egalitatea $2n - 1 = q(2m_0 - 1)$, unde q este evident un număr impar. În această alternativă, din (18) se constată că odată cu echilibrarea termenilor de ordinul p_0 se echilibrează și termenii de ordinele $p = qp_0$.

b) Dacă $2k_0 - 1$ și $2m_0 - 1$ au divizori comuni și cel mai mare dintre aceștia este d, se poate scrie

$$p = (2n - 1)\frac{\frac{2k_0 - 1}{d}}{\frac{2m_0 - 1}{d}}\cdot\frac{i}{2\tau}.$$

Realizarea acestei alternative reclamă îndeplinirea egalității $2n - 1 = r\frac{2m_0 - 1}{d}$, în care r este tot un număr impar.
Înlocuind mai sus, se obține

$$p = r\frac{2k_0 - 1}{d}\frac{i}{2\tau},$$

ceea ce înseamnă că simultan cu termenii de ordinul p_0 se echilibrează și termeni ale căror ordine sînt multipli impari ai ordinului

$$p_{0i}^{*} = \frac{2k_0 - 1}{d}\cdot\frac{i}{2\tau}.$$

decalajul care realizează echilibrajul optim are, conform relației (16), expresia

$$\zeta_{opt} = \frac{2m^* - 1}{p_{min}} \pi \tag{20}$$

sau

$$\zeta_{opt} = \frac{2(2m^* - 1)\tau\pi}{i}.$$

Avînd în vedere restricția (15), se deduce $2m^* - 1 \leqslant 2$, adică

$$m^* = 1. \tag{21}$$

Introducînd valorile (19) și (21) în (20), rezultă

$$\zeta_{opt} = \frac{2\tau\pi}{i}. \tag{22}$$

Pentru $\zeta = \zeta_{opt}$, din (14) se obține

$$F_p = iT_p \cos p\frac{\tau\pi}{i}$$

sau, ținînd seama de (8),

$$F_p = iT_p \cos (2k - 1)\frac{\pi}{2} = 0.$$

Se constată astfel că decalajul ζ_{opt} asigură echilibrajul complet al forțelor de inerție pe ansamblul motorului.

Întrucît aprinderile sînt uniform repartizate între toți cilindrii deserviți de același arbore cotit, decalajul dintre două aprinderi consecutive din acești cilindri este

$$\eta = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}} = \frac{2\tau\pi}{i}. \tag{23}$$

Comparînd relațiile (22) și (23) se constată că după aprinderea I_s se produc simultan, la intervalul unghiular $\zeta_{opt} = \eta$, aprinderile N_d și N'_s, unde $N'_s = I'_s, II'_s, III'_s, \ldots, \left(\frac{i}{4}\right)'_s$ potrivit ordinii de aprindere alese pentru cilindrii din stînga. Rezultă astfel că echilibrajul complet al forțelor de

inerție comportă aprinderi simultane în cilindri ai liniilor s și d' alternînd cu aprinderi simultane în cilindri ai liniilor s' și d (fig. 3).

3.4. O situație interesantă corespunde repartiției uniforme a aprinderilor pe întregul motor, deoarece ea conduce la cea mai mică variație a momentului motor rezultant. În această situație

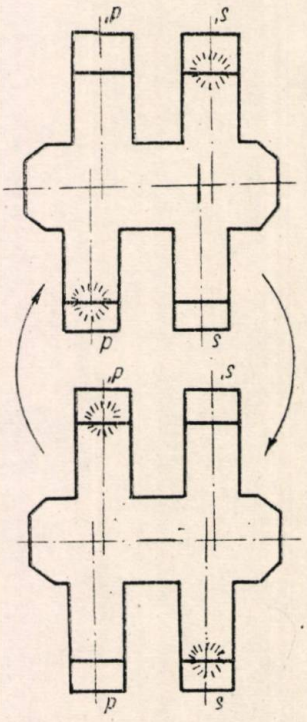


Fig. 3. — Succesiunea aprinderilor la motorul în H corespunzătoare echilibrajului optim

$$\zeta = \frac{\tau\pi}{i}, \tag{24}$$

aprinderile declanșîndu-se consecutiv în cilindri ai liniilor $s - d - s' - d'$, sau

$$\zeta = \frac{3\tau\pi}{i}, \tag{25}$$

aprinderile fiind produse consecutiv în cilindri ai liniilor $s - d' - s' - d$. Introducînd expresiile (8) și (24) sau (8) și (25) în (14) se obține

$$F_p = iT_p \cos(2k-1)\frac{\pi}{4},$$

respectiv

$$F_p = iT_p \cos(2k-1)\frac{3\pi}{4}.$$

Astfel, dacă aprinderile sînt repartizate pe întregul motor, rezultanta termenilor de ordinul p are modulul

$$|F_p| = \frac{\sqrt{2}}{2} iT_p.$$

4. CONCLUZII

Din punctul de vedere al echilibrajului forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, la motoarele în H cu mecanisme bielă-manivelă normale și cu arbori cotiți identici sau simetrici în oglindă, care se rotesc în același sens sau în sensuri contrare, se pot întîlni următoarele situații :

Dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, forțele menționate sînt complet echilibrate la orice motor, cu excepția celor la care $i = 2\tau$, întrucît aceste forțe se echilibrează organic pe ansamblul cilindrilor aferenți aceluiași arbore cotit. Aceeași situație caracterizează și motoarele în patru timpi cu mecanisme bielă-manivelă dezaxate, cînd manivelele fiecărui arbore cotit sînt uniform distribuite în jurul axei lor de rotație.

Unii termeni ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație produc rezultante pe fiecare ansamblu de cilindri aferenți aceluiași arbore cotit la următoarele motoare : 1) în patru timpi cu mecanisme dezaxate

și cu manivele dispuse două cîte două în fază, grupele de manivele în fază fiind uniform distribuite; 2) în doi timpi cu mecanisme dezaxate; 3) cu $i = 2\tau$ și mecanisme axate. Pentru oricare din aceste motoare prezintă interes situațiile din tabelul 2, din care rezultă că este rațional să se opteze

Tabelul 2

Amplitudinea rezultantei pe ansamblul motorului a termenilor de ordinul p

Succesiunea aprinderilor			ζ	$\lvert F_p \rvert$
Nr. crt.	Tipul	În cilindri ai liniilor		
1	Aprinderi simultane	s și d; s' și d'	$0; \frac{4\tau\pi}{i}$	iT_p
2		s și d'; s' și d	$\frac{2\tau\pi}{i}$	0
3	Aprinderi consecutive	$s - d - s' - d'$	$\frac{\tau\pi}{i}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} iT_p$
		$s - d' - s' - d$	$\frac{3\tau\pi}{i}$	

între a doua și a treia succesiune a aprinderilor, asigurînd echilibrajul complet al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație, respectiv repartiția uniformă a aprinderilor pe ansamblul motorului asociată cu un echilibraj mai slab.

Primită la redacție la 25 martie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. GEORGE BĂRĂNESCU, *Teoria echilibrajului motoarelor cu ardere internă în linie*, Edit. Academiei, București, 1975.

ASPECTE PRIVIND STUDIUL MIȘCĂRII SAPELOR DE FORAJ

de DUMITRU RAȘEEV, EMIL TOCACI

Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se exprimă mișcarea unui punct curent ce aparține conului unei sape, realizîndu-se astfel un studiu succint, dar, în principiu, complet, al cinematicii sapelor de foraj.

Se abordează problema legăturii dintre modul de desfășurare a mișcării sapelor și interacțiunile la care acestea sînt supuse, relevîndu-se necesitatea ca un astfel de studiu (care, de fapt, este de dinamica sapelor) să fie completat cu date experimentale.

Riguros vorbind, o sapă de foraj este un sistem material cu cinci grade de libertate : o rotație în jurul unei axe verticale Δ_0, axa de simetrie a corpului sapei ; cîte o rotație în jurul axelor Δ_s ($s = 1, 2, 3$) ale celor trei conuri ; translația vertical descendentă, adică mișcarea de avans. Aceasta din urmă însă este considerabil mai lentă decît celelalte patru, motiv pentru care se poate neglija, ajungîndu-se, în consecință, la un sistem material cu patru grade de libertate, cele patru rotații în jurul axelor Δ_0 și Δ_s ($s = 1, 2, 3$), schițate în figura 1.

Problema care se pune este : 1) de a exprima mișcarea fiecărei particule de material atît din interiorul corpului sapei, cît și din interiorul conurilor, în funcție de vitezele unghiulare ale celor patru rotații (acesta fiind aspectul cinematic al studiului propus) ; 2) de a stabili legătura între modul de desfășurare a mișcării și factorii care influențează mișcarea, adică forțele și momentele forțelor ce acționează sistemul material considerat (acesta este aspectul dinamic al fenomenului).

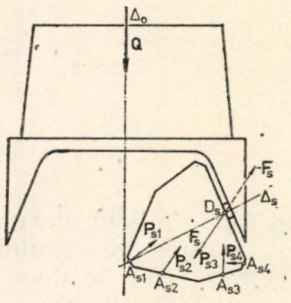


Fig. 1

1. CINEMATICA SAPELOR DE FORAJ

În ceea ce privește mișcarea unei particule ce aparține corpului sapei, problema este banală, fiind vorba de o mișcare în jurul unei axe fixe de rotație.

Pentru a exprima însă mișcarea unui punct ce aparține unuia (oricăruia) dintre cele trei conuri, este necesar să se apeleze la un sistem de referință fix, solidar cu solul și la cîte un sistem de referință pentru fiecare con. Fiecărui con i se atașează un sistem de referință solidar cu conul.

Fie (fig. 2) $Oxyz$ sistemul de referință fix, cu axa Oz vertical ascendentă, confundată cu Δ_0 din figura 1, iar $O_1x_1y_1z_1$ un sistem de referință,

solidar cu conul 1, cu originea în vîrful O_1 al conului și cu O_1x_1 axă de simetrie a conului 1, orientată astfel încît sistemul $O_1x_1y_1z_1$ să fie drept.

Se mai consideră reperul $O_1x_1'y_1'z_1'$ cu axele paralele cu cele ale lui $Oxyz$, adică $O_1x_1' \| Ox$; $O_1y_1' \| Oy$; $O_1z_1' \| Oz$, în vederea definirii unghiurilor lui Euler.

O_1N este linia nodurilor, generată de intersecția dintre planul Oxy (confundat cu $O_1x_1'y_1'$ fiindcă O_1 se găsește pe Oxy) și planul $O_1x_1y_1$.

Astfel apar unghiurile lui Euler : $x_1'O_1N = \psi_1$ (unghiul de precesie) ; $NO_1x_1 = \varphi_1$ (unghiul de rotație proprie) ; $z_1O_1z_1' = \theta_1$ (unghiul de nutație).

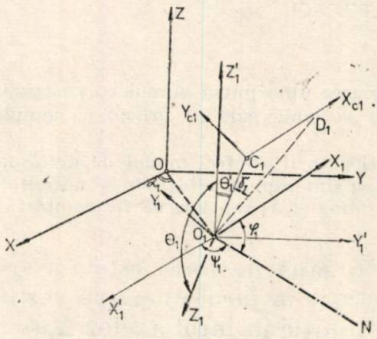


Fig. 2

Unghiul α_1, dintre Ox și segmentul OO_1, variază odată cu rotația în jurul lui Oz (Δ_0).

S-au mai considerat și axele $C_1x_{0_1} \| O_1x_1$ și $C_1y_1 \| O_1y_1$, unde punctul C_1, situat pe axa O_1z_1, este centrul de masă al conului 1.

Se procedează în mod identic pentru celelalte două conuri, cu deosebirea că indicii vor fi 2 și, respectiv, 3, în loc de 1, și cu observațiile următoare :

$$OO_1 = OO_2 = OO_3 = u_0,$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2\pi}{3}; \quad \alpha_3 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{3} = \alpha_1 + \frac{4\pi}{3}, \tag{1}$$

$$\theta_s = \pi - \theta_s'; \quad \theta_s' = \frac{\pi}{2} - \gamma_s = \text{constant}; \quad s = 1, 2, 3$$

γ_s fiind unghiul dintre sol și axa conului $s (s = 1, 2, 3)$, constant.

Firește că studiul se va efectua pentru un singur con, extrapolarea pentru celelalte două fiind imediată.

Dacă M este un punct din interiorul (sau de pe conturul) conului s, viteza sa va fi :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{os} + \boldsymbol{\omega}_s \times \boldsymbol{\rho}_s, \tag{2}$$

unde $\boldsymbol{v}_{os}$ este viteza originii mobile O_s, $\boldsymbol{\omega}_s$ — viteza unghiulară de rotație a conului, iar $\boldsymbol{\rho}_s$ — vectorul de poziție al lui M în raport de O_s.

Relația (2) este cunoscuta lege de distribuție a vitezelor într-o masă rigidă, a cărei utilizare însă ar antrena, în cazul de față, complicații de calcul.

Înainte de a continua studiul este necesar să fie făcută o observație importantă :

Cele patru grade de libertate sînt reprezentate de variația reciproc independentă a următorilor parametri spațiali (coordonate generalizate) α_1, φ_1, φ_2, φ_3, cu notațiile cunoscute.

Într-adevăr, din considerente geometrice elementare, rezultă că

$$\psi_s = \alpha_s + \frac{\pi}{2} - \beta_s = \alpha_1 + (s-1)\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \beta_s, \qquad s = 1, 2, 3, \tag{3}$$

cu β_s unghiul constant, reprezentat în figura 4, iar cum $\theta_s = \frac{\pi}{2} - \gamma_s$ sînt constante, rezultă că singurele mărimi care, în timpul mișcării, variază reciproc independent (dar, bineînțeles, în funcție de timp) sînt α_1 și $\varphi_s (s = 1, 2, 3)$.

Se notează cu $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ vectorii axelor Ox, Oy, Oz și totodată cei ai axelor $O_s x'_s$, $O_s y'_s$, $O_s z'_s$ egali cu omologii lor datorită paralelismului axelor, iar cu $\boldsymbol{i}_s$, $\boldsymbol{j}_s$, $\boldsymbol{k}_s$ versorii axelor $O_s x_s$, $O_s y_s$; $O_s z_s$ (fiind și versorii axelor $C_s x_{cs}$; $C_s y_{cs}$; $O_s z_{cs} = C_s z_s$ ca o consecință a faptului că $C_s x_{cs} \| O_s x_s$; $C_s y_{cs} \| O_s y_s$; $C_s z_{cs} \| O_s z_s$), $s = 1, 2, 3$.

În aceste condiții, dacă coordonatele punctului curent M, ce aparține conului de indice s, în sistemul de referință $O_s x_s y_s z_s$ solidar cu conul, sînt x_s, y_s, z_s, atunci

$$\boldsymbol{\rho}_s = x_s \boldsymbol{i}_s + y_s \boldsymbol{j}_s + z_s \boldsymbol{k}_s, \tag{4}$$

x_s, y_s, z_s fiind, pentru unul și același punct M, numere constante, deoarece raportarea s-a făcut la sistemul de referință solidar cu conul.

În sistemul de referință fix $Oxyz$, coordonatele x, y, z ale aceluiași punct M vor fi, conform cunoscutelor relații care leagă coordonatele unui același punct în sisteme de referință diferite, date de egalitățile

$$\begin{aligned} x = {} & u_0 \cos \alpha_s + x_s (\cos \varphi_s \cos \psi_s - \sin \varphi_s \sin \psi_s \cos \theta_s) - \\ & - y_s (\cos \psi_s \sin \varphi_s + \sin \psi_s \cos \varphi_s \cos \theta_s) + z_s \sin \psi_s \sin \theta_s, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y = {} & u_0 \sin \alpha_s + x_s (\sin \psi_s \cos \varphi_s + \cos \psi_s \sin \varphi_s \cos \theta_s) + \\ & + y_s (- \sin \psi_s \sin \varphi_s + \cos \psi_s \cos \varphi_s \cos \theta_s) - z_s \cos \psi_s \sin \theta_s, \end{aligned} \tag{5'}$$

$$z = x_s \sin \varphi_s \sin \theta_s + y_s \cos \varphi_s \sin \theta_s + z_s \cos \theta_s. \tag{5''}$$

Iar vectorul de poziție al lui M, față de originea fixă O, va fi

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} x + \boldsymbol{j} y + \boldsymbol{k} z. \tag{6}$$

În consecință, viteza unui punct oarecare din interiorul sau de pe conturul unui con va avea expresia vectorială

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i}\dot{x} + \boldsymbol{j}\dot{y} + \boldsymbol{k}\dot{z}. \tag{7}$$

unde, pentru că

$$\alpha_s = \psi_s + \beta_s - \frac{\pi}{2} = \omega_0 t + (s-1)\frac{2\pi}{3}, \tag{8}$$

$$\dot{\alpha}_s = \dot{\psi}_s = \omega_0; \quad s = 1, 2, 3,$$

ω_0 fiind viteza unghiulară constantă a rotației corpului sapei, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, derivatele în raport cu timpul ale egalităților (5), (5′) și (5″) sînt

$$v_x = \dot{x} = -u_0\omega_0 \sin\alpha_s - x_s(\omega_0 \sin\psi_s \cos\varphi_s + \dot{\varphi}_s \cos\psi_s \sin\varphi_s +$$
$$+ \omega_0 \cos\psi_s \sin\varphi_s \cos\theta_s + \dot{\varphi}_s \sin\psi_s \cos\varphi_s \cos\theta_s) -$$
$$- y_s(\dot{\varphi}_s \cos\psi_s \cos\varphi_s - \omega_0 \sin\psi_s \sin\varphi_s + \omega_0 \cos\psi_s \cos\varphi_s \cos\theta_s -$$
$$- \dot{\varphi}_s \sin\psi_s \sin\varphi_s \cos\theta_s) + z_s\omega_0 \cos\psi_s \sin\theta_s), \tag{9}$$

$$v_y = \dot{y} = u_0\omega_0 \cos\alpha_s + x_s(\omega_0 \cos\psi_s \cos\varphi_s - \dot{\varphi}_s \sin\psi_s \sin\varphi_s -$$
$$- \omega_0 \sin\psi_s \sin\varphi_s \cos\theta_s + \dot{\varphi}_s \cos\psi_s \cos\varphi_s \cos\theta_s) -$$
$$- y_s(\omega_0 \cos\psi_s \sin\varphi_s + \dot{\varphi}_s \sin\psi_s \cos\varphi_s + \omega_0 \sin\psi_s \cos\varphi_s \cos\theta_s +$$
$$+ \dot{\varphi}_s \cos\psi_s \sin\varphi_s \cos\theta_s) + z_s\omega_0 \sin\psi_s \sin\theta_s), \tag{9′}$$

$$v_z = \dot{z} = x_s\dot{\varphi}_s \cos\varphi_s \sin\theta_s - y_s\dot{\varphi}_s \sin\varphi_s \sin\theta_s. \tag{9″}$$

Mărimea vitezei acestui punct curent M va fi, evident,

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \tag{10}$$

presupunîndu-se că în (10) se introduc (9), (9′) și (9″).

Astfel, s-a putut exprima viteza unui punct oarecare, aparținînd oricăruia din cele trei conuri atît vectorial, cît și în ceea ce privește mărimea sa.

Accelerația aceluiași punct curent M va fi vectorul

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{i}\ddot{x} + \boldsymbol{j}\ddot{y} + \boldsymbol{k}\ddot{z}, \tag{11}$$

$a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$ obținute, prin derivarea în raport cu timpul a relațiilor (9), (9′), (9″).

Astfel, devine cunoscută și accelerația, a cărui mărime este

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \tag{12}$$

S-a reușit astfel exprimarea atît a vitezei, cît și a accelerației pentru orice punct ce aparține oricărui con.

Dacă se cunoaște variația în funcție de timp pentru φ_s, cum $\alpha_s = f(\psi_s)$ sînt cunoscute (relația (8)), egalitățile (5), (5′) și (5″) ar fi ecuațiile para-

metrice ale traiectoriei, egalitățile (9), (9′) și (9″) ar fi bine determinate, ele fiind componentele vitezei, iar derivatele lor (în raport cu timpul) componentele accelerației, deci ar fi perfect cunoscuți toți parametri cinematici ai oricărui punct M aparținînd oricăruia dintre conuri, individualizarea punctului făcîndu-se prin coordonatele x_s, y_s, z_s ale sale, în sistemul de referință solidar cu conul $(O_s x_s z_s)$, ceea ce nu oferă nici o dificultate.

Dar $\varphi_s = \varphi_s(t)$ nu sînt cunoscute, ele fiind determinate de ansamblul interacțiunilor în care este implicat sistemul material studiat.

Stabilirea legăturii între aceste interacțiuni și variația coordonatelor generalizate $\varphi_s (s = 1, 2, 3)$ este însă o problemă de dinamică.

2. DINAMICA SAPELOR DE FORAJ

După cum am văzut, sistemul studiat (sapa de foraj) are patru grade de libertate, reprezentate de variația reciproc independentă a unghiurilor α_1 și $\varphi_s (s = 1, 2, 3)$.

Se admite că acționează un astfel de cuplu motor, încît $\alpha_1 = \omega_0 t$, ω_0 fiind o viteză unghiulară constantă, fapt verificat de comportarea reală.

În cele ce urmează se vor aborda interdependențele dintre forțele ce acționează asupra unui con, $s (s = 1, 2, 3)$, și variația unghiului φ_s, aspect deci de dinamică.

Aplicarea ecuațiilor mecanicii analitice, care ar prezenta avantajul eliminării forțelor de legătură atît exterioare, cît și interioare, este dificilă în acest caz, datorită naturii interacțiunilor și a legăturilor.

Se va face apel, în consecință, la teoremele fundamentale ale dinamicii vectoriale: teorema impulsului și teorema momentului cinetic.

Se asociază acest procedeu cu o descompunere a mișcării în: a) mișcarea centrului de masă C_s al conului, care se va studia cu ajutorul teoremei impulsului; b) mișcarea conului $s (s = 1, 2, 3)$ în jurul centrului său de masă C_s, care este legată de factorii de cauzabilitate (forțe) prin intermediul teoremei momentului cinetic.

a) Mișcarea centrului de masă C_s al conului $s (s = 1, 2, 3)$ se determică astfel:

Coordonatele lui C_s în sistemul de referință $O_s x_s y_s z_s$ sînt $x_{scs} = 0$; $y_{scs} = 0$; $z_{scs} = -h_s$, segmentul $h_s = O_s C_s$ fiind cunoscut, deoarece se presupune conul s ca fiind cunoscut atît în ceea ce privește dimensiunile sale, deci caracteristicile sale geometrice, cît și cele mecanice, ca poziție a centrului de masă, momente de inerție etc. Ținînd seama de aceasta $(x_{scs} = y_{scs} = 0;\ z_{scs} = -h_s)$ și în conformitate cu relațiile (5), (5′), (5″) și (8), coordonatele x_{cs}, y_{cs}, z_{cs} ale lui C_s în sistemul de referință fix $Oxyz$, vor fi

$$x_{cs} = u_0 \cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] - h_s \sin\theta_s \sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right], \quad (13)$$

$$y_{0s} = u_0 \sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] + h_s \sin\theta_s \cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right], \quad (13')$$

$$z_{0s} = -h_s \cos\theta_s. \quad (13'')$$

Aceste relații reprezintă și traiectoria centrului de masă, C_s, al conului s ($s = 1, 2, 3$), în exprimare parametrică.

Componentele vitezei lui C_s vor fi:

$$v_{csx} = \dot{x}_{cs} = \omega_0 \left\{ - u_0 \sin \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] - h_s \sin \theta_s \cos \left[\omega_0 t + \right. \right. \tag{14}$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{2} - \beta_s + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] \right\},$$

$$v_{0sy} = \dot{y}_{cs} = \omega_0 \left\{ u_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] - h_s \sin \theta_s \sin \left[\omega_0 t + \right. \right. \tag{14'}$$

$$\left. \left. + \frac{\pi}{2} - \beta_s + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] \right\},$$

$$v_{csz} = \dot{z}_{cs} = 0. \tag{14''}$$

De aici rezultă imediat și componentele accelerației lui C_s:

$$a_{csx} = \ddot{x}_{cs} = - \omega_0^2 \left\{ u_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] - h_s \sin \theta_s \sin \left[\omega_0 t + \right. \right. \tag{15}$$

$$\left. \left. + \frac{2\pi}{3} (s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s \right] \right\},$$

$$a_{csy} = \ddot{y}_{cs} = - \omega_0^2 \left\{ u_0 \sin \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] + h_s \sin \theta_s \cos \left[\omega_0 t + \right. \right. \tag{15'}$$

$$\left. \left. + \frac{2\pi}{3} (s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s \right] \right\},$$

$$a_{csz} = \ddot{z}_{cs} = 0. \tag{15''}$$

În virtutea teoremei impulsului

$$\frac{d\boldsymbol{H}_s}{dt} = \frac{d}{dt} (m_s \boldsymbol{v}_{cs}) = m_s \boldsymbol{a}_{cs} = \boldsymbol{R}_s, \tag{16}$$

în care $\boldsymbol{H}_s$ este impulsul conului s de masă m_s; $\boldsymbol{v}_{cs}$ — vectorul viteză; iar $\boldsymbol{a}_{cs}$ — vectorul accelerație pentru centrul de masă C_s; în timp

ce $\boldsymbol{R}_s$ este rezultanta tuturor forțelor ce acționează asupra conului s; și

$$\boldsymbol{R}_s = \boldsymbol{i}\, R_{sx} + \boldsymbol{j}\, R_{sy} + \boldsymbol{k}\, R_{sz}, \tag{17}$$

R_{sx}, R_{sy}, R_{sz} fiind proiecțiile lui R_s pe axele Ox, Oy, Oz ale sistemului de referință fix $Oxyz$, se ajunge la

$$m_s a_{csx} = R_{sx} = -m_s \omega_0^2 \left\{ u_0 \cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] - h_s \sin\theta_s \sin\left[\omega_0 t + \right.\right. \tag{18}$$

$$\left.\left. + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right]\right\},$$

$$m_s a_{csy} = R_{sy} = -m_s \omega_0^2 \left\{ u_0 \sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] + h_s \sin\theta_s \cos\left[\omega_0 t + \right.\right. \tag{18'}$$

$$\left.\left. + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right]\right\},$$

$$m_s a_{csz} = R_{sz} = 0. \tag{18''}$$

reamintind că β_s este unghiul (constant) reprezentat în figura 4.

Astfel, s-a determinat rezultanta $\boldsymbol{R}_s$, a tuturor forțelor ce acționează asupra conului s ($s = 1, 2, 3$).

Forțele, a căror sumă (vectorială) este $\boldsymbol{R}_s$, provin dintr-un ansamblu de interacțiuni de o complexitate deosebită, care însă pot fi împărțite în două categorii: interacțiuni între con și corpul sapei și interacțiuni între con și rocă.

Pentru a evita complexitate inabordabilă a fenomenului și pentru că erorile introduse nu este de așteptat să fie supărător de mari, se va alege o schemă simplificată a forțelor ce se aplică unui con. Această modelare a fenomenului, sau una similară, nu poate fi evitată fără a se ajunge la dificultăți de calcul insurmontabile.

Se admite deci că solul (roca) acționează asupra conului s (fig. 1), prin forțele $\boldsymbol{P}_{s1}, \boldsymbol{P}_{s2}, \boldsymbol{P}_{s3}, \boldsymbol{P}_{s4}$ aplicate în punctele $A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, A_{s4}$. Iar corpul sapei acționează asupra aceluiași con s, cu forța $\boldsymbol{F}_s$, aplicată în punctul D_s. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, conul s va răspunde cu o forță $-\boldsymbol{F}_s$, aplicată tot în D_s, însă care acționează asupra corpului sapei. Corpul sapei mai este acționat (în afara cuplului motor care-i dă mișcarea de rotație) și de o forță axială, $\boldsymbol{Q}$, vertical descendentă (figura 1).

De remarcat faptul că forțele $\boldsymbol{P}_{s\alpha}$ ($s = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$) și $\boldsymbol{F}_s$ ($s = 1, 2, 3$) nu sînt cunoscute în mod inițial.

În ceea ce privește punctele A_s și D_s pozițiile acestora se exprimă cu notațiile din figura 3, q_{s2} și q_{s3} se aleg judicios, în funcție de dimensiunile conului și natura danturii; l_s este cunoscută, iar $q_{s4} = l_s \cos \gamma_s$, unghiul γ_s fiind de asemenea cunoscut.

Urma planului xOy este linia punctată din figura 3, iar C_{s2}, C_{s3} și C_{s4} se vor alege la fel ca (și în funcție de) q_{s2} și q_{s3}.

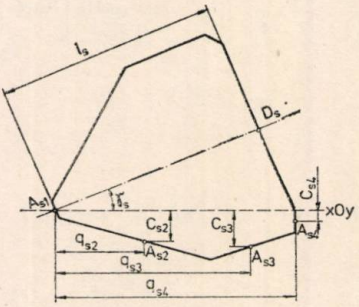


Fig. 3

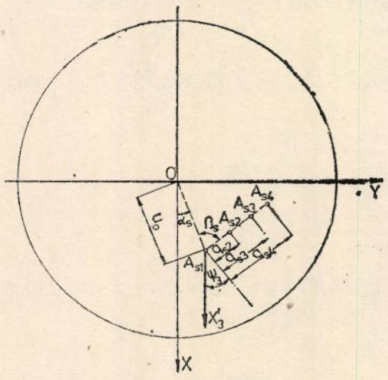


Fig. 4

Exprimînd, conform figurii 4, pozițiile punctelor A_{s1} (a_{s1}, b_{s1}, c_{s1}); $A_{s2}(a_{s2}, b_{s2}, c_{s2})$; $A_{s3}(a_{s3}, b_{s3}, c_{s3})$; $A_{s4}(a_{s4}, b_{s4}, c_{s4})$ în sistemul de referință $Oxyz$, acestea vor fi:

$$a_{s_1} = u_0 \cos \alpha_s = u_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right],$$

$$b_{s1} = u_0 \sin \alpha_s = u_0 \sin \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right], \tag{19}$$

$$c_{s1} = 0;$$

$$a_{s\alpha} = u_0 \cos \alpha_s - q_{s\alpha} \sin \left(\alpha_s + \frac{\pi}{2} - \beta_s \right) = u_0 \cos \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] -$$

$$- q_{s\alpha} \sin \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s \right],$$

$$b_{s\alpha} = u_0 \sin \alpha_s + q_{s\alpha} \cos \left(\alpha_s + \frac{\pi}{2} - \beta_s \right) = u_0 \sin \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) \right] + \tag{20}$$

$$+ q_{s\alpha} \cos \left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3} (s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s \right],$$

$$c_{s\alpha} = C_{s\alpha}; \quad \alpha = 2, 3, 4.$$

Pentru studiul mișcării de rotație este indicat să se exprime pozițiile punctelor $A_{s\alpha}$($s = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$) și D_s în sistemul de referință $O_s x_s y_s z_s$ solidar cu corpul conului s.

Pentru aceasta vom folosi inversele formulelor (5), (5') și (5''), obținînd :

$$\begin{aligned} x_{s_\alpha} &= (a_{s_\alpha} - u_0 \cos \alpha_s)(\cos \varphi_s \cos \psi_s - \sin \varphi_s \sin \psi_s \cos \theta_s) - \\ &- (b_{s_\alpha} - u_0 \sin \alpha_s)(\cos \varphi_s \sin \psi_s + \sin \varphi_s \cos \psi_s \cos \theta_s) - \\ &- C_{s_\alpha} \sin \varphi_s \sin \theta_s, \end{aligned} \tag{21'}$$

$$\begin{aligned} y_{s_\alpha} &= -(a_{s_\alpha} - u_0 \cos \alpha_s)(\sin \varphi_s \cos \psi_s + \cos \varphi_s \sin \psi_s \cos \theta_s) + \\ &+ (b_{s_\alpha} - u_0 \sin \alpha_s)(-\sin \varphi_s \sin \psi_s + \cos \varphi_s \cos \psi_s \cos \theta_s) - \\ &- C_{s_\alpha} \cos \varphi_s \sin \theta_s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{s_\alpha} &= -(a_{s_\alpha} - u_0 \cos \alpha_s) \sin \psi_s \sin \theta_s + (b_{s_\alpha} - u_0 \sin \alpha_s) \cos \psi_s \sin \theta_s + \\ &+ C_{s_\alpha} \cos \theta_s, \end{aligned} \tag{21''}$$

în care x_{s_α}, y_{s_α}, z_{s_α} sînt coordonatele punctelor $A_{s\alpha}$ în $O_s x_s y_s z_s$.

În același sistem de referință ($O_s x_s y_s z_s$) punctul D_s va avea o poziție exprimată de coordonatele

$$x_{sD} = 0 ; \quad y_{sD} = 0 ; \quad z_{sD} = l_s. \tag{22}$$

Odată aceste considerații fiind făcute și relațiile de mai sus stabilite, se poate introduce în studiul fenomenului teorema momentului cinetic

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{cs}}{dt} = \boldsymbol{M}_{cs}. \tag{23}$$

unde $\boldsymbol{K}_{cs}$ este momentul cinetic al conului s față de propriul centru de masă C_s, iar $\boldsymbol{M}_{cs}$ este momentul rezultant al forțelor ce acționează conul, în raport cu același pol C_s, iar t este, evident, timpul :

$$\boldsymbol{K}_{cs} = \boldsymbol{i}_s I_{z_s} \omega_{xs} + \boldsymbol{j}_s I_{y_s} \omega_{ys} + \boldsymbol{k}_s I_{zs} \omega_{z_s}, \tag{24}$$

unde $\boldsymbol{i}_s, \boldsymbol{j}_s, \boldsymbol{k}_s$ sînt versorii sistemului de referință $O_s x_s y_s z_s$, solidar cu conul și, totodată, mai sînt și versorii sistemului de referință $C_s x_{cs} y_{cs} z_{cs}$, de asemenea solidar cu conul, avînd axele paralele cu $O_s x_s y_s z_s$, iar I_{xs}, I_{ys}, I_{zs} sînt momentele de inerție ale conului în raport cu axele $C_s x_{cs}$, $C_s y_{cs}$, $C_s z_{cs}$. Aceste axe fiind solidare cu conul, momentele de inerție sînt niște valori

constante ce se pot considera cunoscute. Se poate lua întotdeauna $I_{x_s} = I_{y_s}$. În ceea ce privește ω_{x_s}, ω_{y_s}, ω_{z_s}, acestea sînt componentele vectorului viteză unghiulară $\boldsymbol{\omega}$ pe axele $C_s x_s$, $C_s y_s$, $C_s z_s$.

Ecuațiile diferențiale ale mișcării unui corp rigid sînt, cu notațiile pînă acum folosite :

$$\begin{aligned} I_{x_s}\dot{\omega}_{x_s} + (I_{z_s} - I_{y_s})\,\omega_{y_s}\omega_{z_s} &= M_{cx_s}, \\ I_{y_s}\dot{\omega}_{y_s} + (I_{x_s} - I_{z_s})\,\omega_{x_s}\omega_{z_s} &= M_{cy_s}, \\ I_{z_s}\dot{\omega}_{z_s} + (I_{y_s} - I_{x_s})\,\omega_{x_s}\omega_{y_s} &= M_{cz_s}. \end{aligned} \tag{25}$$

Urmează acum să se calculeze componentele M_{cx_s}, M_{cy_s} și M_{cz_s} ale momentului rezultant $\boldsymbol{M}_{cs}$ și să se exprime adecuat ω_{x_s}, ω_{y_s}, ω_{z_s}, proiecțiile vitezei unghiulare.

Este interesant însă, înainte de a efectua aceste operațiuni, să fie făcute cîteva considerații asupra forțelor ale căror momente dau momentul rezultant $\boldsymbol{M}_{c_s}$.

Reamintind că

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_s &= \boldsymbol{i}P_{s_{\alpha x}} + \boldsymbol{j}P_{s_{\alpha y}} + \boldsymbol{k}P_{s_{\alpha z}}, \\ \boldsymbol{F}_s &= \boldsymbol{i}F_{sx} + \boldsymbol{j}F_{sy} + \boldsymbol{k}F_{sz}, \\ \boldsymbol{R} &= \boldsymbol{i}R_{sx} + \boldsymbol{j}R_{sy} + \boldsymbol{k}R_{sz}, \end{aligned} \tag{26}$$

cu precizarea că aceste exprimări analitice sînt în sistemul de referință fix $Oxyz$ și ținînd seama de relațiile (18), (18′) și (18″), rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{4} P_{s_\alpha x} + F_{sx} &= -a_s\omega_0^2\left\{u_0\cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] - \right. \\ &\left. - h_s\sin\theta_s\sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right]\right., \\ \sum_{\alpha=1}^{4} P_{s_\alpha y} + F_{sy} &= -m_s\omega_0^2\left\{u_0\sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] + \right. \\ &\left. + h_s\sin\theta_s\cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right]\right., \\ \sum_{\alpha=1}^{4} P_{s_\alpha z} + F_{sz} &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Iar pe de altă parte faptul că nu există nici o translație a corpului sapei, impune concluzia că

$$\sum_{s=1}^{3} F_{sx} = 0\,; \qquad \sum_{s=1}^{3} F_{sy} = 0\,; \qquad \sum_{s=1}^{3} F_{sz} = -Q. \tag{28}$$

Asociind acum (27) cu (28) se ajunge la

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{4} P_{s_\alpha x} &= -\omega_0^2 \sum_{s=1}^{3} m_s \left\{ u_0 \cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] - \right. \\
&\left. - h_s \sin\theta_s \sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right]\right\}, \\
\sum_{s=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{4} P_{s_\alpha y} &= -\omega_0^2 \sum_{s=1}^{3} m_s \left\{ u_0 \sin\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1)\right] + \right. \\
&\left. + h_s \sin\theta_s \cos\left[\omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s\right]\right\}, \\
\sum_{s=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{4} P_{s_\alpha z} &= Q.
\end{aligned} \tag{29}$$

Pentru a calcula componentele M_{cxs}, M_{cys}, M_{csz}, ale momentului rezultant pe axele sistemului de referință $C_s x_{cs} y_{cs} z_{cs}$ trebuie considerate proiecțiile forțelor pe $C_s x_{cs}$, $C_s y_{cs}$, $C_s z_{cs}$, care sînt aceleași cu proiecțiile pe $O_s x_s$, $O_s y_s$, $O_s z_s$.

Pentru acestea trebuie întîi exprimate componentele forțelor pe axele $O_s x_s$, $O_s y_s$ $O_s z_s$.

În sistemul de referință $O_s x_s y_s z_s$ avem expresiile analitice :

$$\boldsymbol{P}_s = P_{s_\alpha x_s}\,\boldsymbol{i}_s + P_{s_\alpha y_s}\,\boldsymbol{j}_s + P_{s_\alpha z_s}\,\boldsymbol{k}_s, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{F}_s = F_{sx_s}\,\boldsymbol{i}_s + F_{sy_s}\,\boldsymbol{j}_z + F_{sz_s}\,\boldsymbol{k}_s, \tag{30'}$$

cu $\boldsymbol{i}_s$, $\boldsymbol{j}_s$, $\boldsymbol{k}_s$ versorii axelor sistemelor $O_s x_s y_s z_s$ și $C_s x_{cs} y_{cs} z_{cs}$.

Între versorii axelor sistemelor $Oxyz$ și $O_s x_s y_s z_s$ există relațiile (cunoscute), avînd un caracter general

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i} &= \boldsymbol{i}_s(\cos\varphi_s\cos\psi_s - \sin\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) - \boldsymbol{j}_s(\sin\varphi_s\cos\psi_s + \\
&\quad + \cos\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) + \boldsymbol{k}_s\sin\psi_s\sin\theta_s, \\
\boldsymbol{j} &= \boldsymbol{i}_s(\cos\varphi_s\sin\psi_s + \sin\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) - \boldsymbol{j}_s(\sin\varphi_s\sin\psi_s - \\
&\quad - \cos\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) - \boldsymbol{k}_s\cos\psi_s\sin\theta_s, \\
\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{i}_s(\sin\varphi_s\sin\theta_s + \boldsymbol{j}_s\cos\varphi_s\sin\theta_s + \boldsymbol{k}_s\cos\theta_s.
\end{aligned} \tag{31}$$

În consecință, din compararea relațiilor (26) cu (30) și (30′), ținînd seama de (31), se impune concluzia că valorile componentelor forțelor $\boldsymbol{P}_{s\alpha}$ și $\boldsymbol{F}_s$ în reperul solidar cu conul vor fi

$$P_{s\alpha}x_s = P_{s\alpha x}(\cos\varphi_s\cos\psi_s - \sin\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) +$$

$$+ P_{s\alpha y}(\cos\varphi_s\sin\psi_s + \sin\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) + P_{s\alpha z}\sin\varphi_s\sin\theta_s,$$

$$P_{s\alpha y_s} = -P_{s\alpha x}(\sin\varphi_s\cos\psi_s + \cos\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) - \tag{32}$$

$$- P_{s\alpha y}(\sin\varphi_s\sin\psi_s - \cos\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) + P_{s\alpha z}\cos\varphi_s\sin\theta_s,$$

$$P_{s\alpha z_s} = P_{s\alpha x}\sin\psi_s\sin\theta_s - P_{s\alpha y}\cos\psi_s\sin\theta_s + P_{s\alpha z}\cos\theta_s$$ și, respectiv,

$$F_{sx_s} = F_{sx}(\cos\varphi_s\cos\psi_s - \sin\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) + F_{sy}(\cos\varphi_s\sin\psi_s +$$

$$+ \sin\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) + F_{sz}\sin\varphi_s\sin\theta_s, \tag{33}$$

$$F_{sy_s} = -F_{sx}(\sin\varphi_s\cos\psi_s + \cos\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) - F_{sy}(\sin\varphi_s\sin\psi_s -$$

$$- \cos\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) + F_{sz}\cos\varphi_s\sin\theta_s,$$

$$F_{sz_s} = F_{sx}\sin\psi_s\sin\theta_s - F_{sy}\cos\psi_s\sin\theta_s + F_{sz}\cos\theta_s,$$

unde $s = 1, 2, 3$; $\alpha = 1, 2, 3, 4$; $F_{s\alpha x}$, $P_{s\alpha y}$, $P_{s\alpha z}$ sînt proecțiile forței $\boldsymbol{P}_{s\alpha}$, F_{sx}, F_{sy}, F_{sz} sînt necunoscute, dar se pot considera constante, iar θ_s sînt constante cunoscute. Mărimile ψ_s au variații cunoscute.

Singurele funcții necunoscute (dependente de timp) sînt φ_s.

În ceea ce privește momentul rezultant $\boldsymbol{M}_{c_s}$ acesta este :

$$\boldsymbol{M}_{c_s} = \sum_{\alpha=1}^{4} \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_s & \boldsymbol{j}_s & \boldsymbol{k}_s \\ x_s & y_s & z_{s\alpha} + h_s \\ P_{s\alpha x_s} & P_{s\alpha y_s} & P_{s\alpha z_s} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_s & \boldsymbol{j}_s & \boldsymbol{k}_s \\ 0 & 0 & h_s - l_s \\ F_{sx_s} & F_{sy_s} & F_{sz_s} \end{vmatrix}. \tag{34}$$

În vederea construirii ecuațiilor de mișcare, în principiu date de relațiile (25), se vor exprima componentele vitezei unghiulare în funcție de unghiurile lui Euler.

$$\omega_{x_s} = \omega_0\sin\varphi_s\sin\theta_s,$$

$$\omega_{y_s} = \omega_0\cos\varphi_s\sin\theta_s, \tag{35}$$

$$\omega_{z_s} = \omega_0\cos\theta_s + \varphi_s.$$

S-a ținut seama de ansamblul de particularități specifice problemei studiate, adică de variația lui ψ_s și de faptul că θ_s sînt valori constante.

Derivînd, în raport cu timpul, egalitățile (35), rezultă

$$\omega_{xs} = \dot{\varphi}_s \omega_0 \cos \varphi_s \sin \theta_s,$$

$$\dot{\omega}_{ys} = -\dot{\varphi}_s \omega_0 \sin \varphi_s \sin \theta_s, \tag{36}$$

$$\dot{\omega}_{zs} = \dot{\varphi}_s.$$

Introducînd acum relațiile (34), (35) și (36) în (25) firește (34), presupunînd dezvoltarea determinanților, se obțin ecuațiile de mișcare ale conului s, a căror primă formă este:

$$I_{x_s}\omega_0 \sin \theta_s \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s + (I_{z_s} - I_{x_s}) (\omega_0^2 \sin \theta_s \cos \theta_s \cos \varphi_s +$$

$$+ \omega_0 \sin \theta_s \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s) = \sum_{\alpha=1}^{4} [y_s P_{s\alpha z_s} - (z_s + h_s) P_{s\alpha y_s}] + (l_s - h_s) F_{sy_s},$$

$$-I_{x_s}\omega_0 \sin \theta_s \dot{\varphi}_s \sin \varphi_s - (I_{zs} - I_{x_s}) (\omega_0^2 \sin \theta_s \cos \theta_s \sin \varphi_s +$$

$$+ \omega_0 \sin \theta_s \dot{\varphi}_s \sin \varphi_s) = \sum_{\alpha=1}^{4} [(z_{s\alpha} + h_s) P_{s\alpha x_s} - x_s P_{s\alpha z_s}] - (l_s - h_s) F_{sx_s},$$

$$I_{z_s} \ddot{\varphi}_s = \sum_{\alpha=1}^{4} (x_{s\alpha} P_{s\alpha y_s} - y P_{s\alpha x_s}), \tag{37}$$

fiindcă $I_{x_s} = I_{y_s}$. Se reamintește că momentele de inerție I_{x_s}, I_{y_s}, I_{z_s} sînt valori constante ce se pot considera cunoscute.

Ecuațiile de mișcare, (37), se pot completa prin introducerea egalităților (19), (20), (21), (21′), (21″), obținîndu-se forma lor completă.

Se pot face unele observații de importanță majoră, asupra sistemului (37).

Astfel, din ultima ecuație a sistemului se poate determina $\varphi_s = \varphi_s(t)$, bineînțeles, legea conținînd constantele necunoscute ce reprezintă proiecțiile forțelor $\boldsymbol{P}_{s\alpha}$ pe axele sistemului de referință fix $Oxyz$.

Introducînd apoi legea $\varphi_s = \varphi_s(t)$ în celelalte două ecuații (37), se vor putea stabili componentele forțelor $\boldsymbol{F}_s$ în funcție de cele ale forțelor $\boldsymbol{P}_{s\alpha}$. La aceste calcule se adaugă constatările anterioare făcute asupra forțelor, materializate în relațiile (28) și (29).

Fie deci ultima relație a sistemului (37):

$$I_{zs} \ddot{\varphi}_s = \sum_{\alpha=1}^{4} (x_{s_\alpha} P_{s\alpha y_s} - y_{s_\alpha} P_{s\alpha x_s}) \tag{38}$$

Potrivit cu (19), (20), (21), (21′) şi (21″), avem :

$$I_{z_s}\ddot{\varphi}_s = \sum_{\alpha=2}^{4}\{[q_{s_\alpha}\sin\psi_s(\cos\varphi_s\cos\psi_s - \sin\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) +$$

$$+ q_{s\alpha}\cos\varphi_s(\cos\varphi_s\sin\psi_s + \sin\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) +$$

$$+ C_{s\alpha}\sin\varphi_s\sin\theta_s]\cdot[P_{s\alpha x}(\sin\varphi_s\cos\psi_s + \cos\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) +$$

$$+ P_{s\alpha y}(\sin\varphi_s\sin\psi_s - \cos\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) -$$

$$- P_{s\alpha z}\cos\varphi_s\sin\theta_s)] - [q_{s\alpha}\sin\psi_s(\sin\varphi_s\cos\psi_s +$$

$$+ \cos\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) + q_{s\alpha}\cos\psi_s(-\sin\varphi_s\sin\psi_s +$$

$$+ \cos\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) - C_{s\alpha}\cos\varphi_s\sin\theta_s]\times$$

$$\times[P_{s\alpha x}(\cos\varphi_s\cos\psi_s - \sin\varphi_s\sin\psi_s\cos\theta_s) +$$

$$+ P_{s\alpha y}(\cos\varphi_s\sin\psi_s + \sin\varphi_s\cos\psi_s\cos\theta_s) + P_{s\alpha z}\sin\varphi_s\sin\theta_s]\}. \quad (39)$$

Această ecuaţie diferenţială în care se reaminteşte că

$$\theta_s = \text{const.}$$

$$\psi_s = \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}(s-1) + \frac{\pi}{2} - \beta_s, \quad (40)$$

iar I_{z_s}, $q_{s\alpha}$, β_s sînt constante cunoscute, în timp ce $P_{s\alpha x}$, $P_{s\alpha y}$, $P_{s\alpha z}$ sînt mărimi ce se admit a fi constante, însă care nu sînt cunoscute.

Determinarea lor experimentală ar permite integrarea ecuaţiei (39).

Sau invers, determinarea experimentală a variaţiilor $\varphi_s = \varphi_s(t)$ şi a derivatelor lor ar permite, din sistemul (37) în asociere cu celelalte relaţii implicate în acest sistem, stabilirea unor valori posibile pentru $P_{s\alpha x}$, $P_{s\alpha y}$, $P_{s\alpha z}$, F_{sx}, F_{sy}, F_{sz}.

Observaţie. Este posibil să se ia

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta\,;\ \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma,$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = h\,;\ l_1 = l_2 = l_3 = l, \quad (41)$$

$$q_{1\alpha} = q_{2\alpha} = q_{3\alpha} = q_\alpha\,;\ I_{x_1} = I_{x_2} = I_{x_3},$$

$$P_{1\alpha x} = P_{2\alpha x} = P_{3\alpha x} = P_{\alpha x}\,;\ I_{z_1} = I_{z_2} = I_{z_3}.$$

Avînd în vedere considerabila complexitate a problemei, fapt bine cunoscut și evident reliefat de prezentul studiu, se recomandă următorul procedeu menit să aducă o simplificare în ceea ce privește tratarea problemei atît sub aspect experimental, cît și de calcul.

a) Se fac experiențe pentru măsurarea unui număr cît mai mare de valori ale vitezelor unghiulare $\omega_s = \dot{\varphi}_s$.

b) Se prelucrează matematic datele obținute, în vederea stabilirii unei funcții analitice $\omega_s = \omega_s(t)$, adică $\dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}_s(t)$, folosindu-se, de pildă, metoda abaterilor pătrate minime.

c) O dată cunoscută $\dot{\varphi}_s(t)$ se află imediat $\varphi_s(t)$ și $\ddot{\varphi}_s(t)$.

d) Cum celelalte variații sînt cunoscute, relațiile (5), (5′), (5″) vor constitui, prin introducerea lui $\varphi_s(t)$ ($s = 1, 2, 3$) ecuațiile traiectoriei unui punct curent aparținînd conului s, iar, folosind aceleași funcții $\varphi_s(t)$, relațiile (9), (9′) și (9″) dau componentele vitezei punctului curent din conul s.

Prin derivarea acestora se obțin componentele accelerației.

În acest fel experiența și prelucrarea matematică a datelor experimentale pot suplini folosirea ecuațiilor dinamicii, conducînd la cunoașterea cinematicii sapelor de foraj.

Procedeul revine la o tratare dinamică experimentală și o exprimare cinematică analitică.

e) Odată cunoscute variațiile $\varphi_s = \varphi_s(t)$, prin introducerea lor în (32), (33) și în sistemul fundamental (37), se pot trage concluzii asupra forțelor de interacțiune dintre corpul sapei (falcă) și con, precum și între con și rocă.

Asemenea concluzii se pot dovedi utile la calcule de rezistență și la calcule de uzură privind conurile sapelor de foraj.

În concluzie, prezentul studiu realizează exprimarea unor legături între unghiurile de rotație și vitezele unghiulare ale variațiilor acestor unghiuri pe de o parte, și vitezele punctelor ce aparțin conurilor pe de altă parte.

Totodată este stabilită și legătura între parametri cinematici și un sistem de forțe echivalente celor de interacțiune dintre falcă și con, rocă și con.

Primită la redacție la 11 iulie 1978

RECENZII

„OSII, ARBORI DREPȚI ȘI ARBORI COTIȚI",

de Prof. dr. doc. ANDREI RIPIANU, dr. ing. ION CRĂCIUN

În Editura tehnică, a apărut anul acesta o lucrare de o deosebită importanță teoretică și practică — OSII, ARBORI DREPȚI ȘI ARBORI COTIȚI — care îmbogățește literatura de specialitate, constituind totodată o prețioasă documentație cu privire la osii și arbori drepți și cotiți.

Pe lîngă o amplă documentație din literatura de specialitate în domeniul manualelor, monografiilor, tezelor de doctorat, articolelor de revistă, brevetelor și prospectelor firmelor specializate din țară și de peste hotare, lucrarea cuprinde și principalele rezultate ale cercetărilor autorilor în domeniul studiului dinamic al arborilor drepți și cotiți, contribuții aplicate la soluționarea multor probleme ridicate de industria constructoare de mașini din țara noastră.

Este important de relevat faptul că, prin conținutul său, cartea se înscrie în cadrul sarcinilor trasate de către Congresul al XI-lea al Partidului Comunist Român și de Conferința Națională a Partidului nostru, privind modernizarea și ridicarea calității produselor și creșterea eficienței economice.

Ca structură, lucrarea se compune din șase capitole, în cadrul cărora se prezintă și o serie de exemple numerice de calcul.

În capitolul 1, „BAZELE TEORETICE ALE CALCULULUI OSIILOR, ARBORILOR DREPȚI ȘI ARBORI COTIȚI", se arată rolul acestor organe de mașini, domeniile lor de utilizare, metodica modernă de calcul și proiectare, condițiile constructive, materialele utilizate, precum și caracteristicile mecanice ale acestor materiale.

Capitolul al 2-lea „EXEMPLE DE CALCUL LA OBOSEALĂ AL OSIILOR, ARBORILOR DREPȚI ȘI ARBORI COTIȚI" conține calculul la oboseală a osiilor, arborilor drepți și cotiți, pentru o serie de cazuri concrete, frecvent întîlnite în tehnică, pentru care s-a efectuat : calculul sistemelor de forțe active și de legătură exterioare ce acționează asupra organului considerat, calculul momentelor încovoietoare în diferite secțiuni ale acestuia și verificarea la oboseală.

În capitolul al 3-lea, intitulat : „VIBRAȚIILE DE TORSIUNE ALE ARBORILOR", după unele precizări legate de notațiile utilizate în cadrul acestui capitol, se prezintă modalitățile de reducere a lungimilor și maselor arborilor cotiți, pentru obținerea sistemului vibrant redus, cu aplicație la transmisiile ramificate cu roți dințate cilindrice. Se trece apoi la calculul pulsațiilor proprii pentru sistemele vibrante cu o singură masă circulară, respectiv cu trei sau n mase circulare. Pe lîngă procedeul Holzer-Tolle, se dezvoltă îndeosebi procedeul de determinarea pulsațiilor proprii cu ajutorul matricelor de transfer. Sînt analizate cazurile cîmpului elastic fără masă, cîmpului rigid cu masă, precum și cazurile transmisiilor cu roți dințate. Teoria este ilustrată printr-un exemplu numeric de calcul, care se referă la un motor Diesel cu șase cilindri, în varianta constructivă Boxer. De asemenea, se dezvoltă problema studiului vibrațiilor forțate, considerîndu-se că sistemul vibrant redus este supus acțiunii cuplurilor de torsiune formate din forțele exterioare active, metoda de calcul utilizată fiind tot cea a matricelor de transfer. În lucrare este redată și schema logică pentru programul FALK, aplicată la studiul vibrațiilor de torsiune forțate. În încheierea capitolului, se prezintă calculul eforturilor unitare tangențiale suplimentare care se produc în arborele cotit, datorită vibrațiilor forțate de torsiune la rezonanță pentru turațiile critice situate în domeniul turațiilor uzuale.

Capitolul al 4-lea, „VIBRAȚIILE DE FLEXIUNE (ÎNCOVOIERE) ALE ARBORILOR" abordează problematica legată de calculul pulsațiilor proprii corespunzătoare vibrațiilor de flexiune a unui arbore încărcat cu mase, prin metoda matricelor de transfer. Se elucidează mai întîi principiul metodei, după care se prezintă matricele de transfer a cîmpurilor elastice cu și fără masă, matricea de transfer a cîmpului rigid cu masă, a lagărului elastic cu masă, a cîmpului elastic fără masă cuplat cu o masă punctiformă, precum și matricea de transfer a articulației elastice. În continuare, se trece la calculul pulsațiilor proprii în cazul

arborelui cu două, respectiv cu patru cîmpuri, cu precizări legate de condițiile de limită interioare. Totodată se dă și un exemplu numeric de calcul și în încheiere se arată influența efectului giroscopic asupra vitezelor unghiulare critice.

În capitolul al 5-lea, „STUDIUL PE MODELE A COMPORTĂRII DINAMICE A ARBORILOR", se tratează mai întîi problema determinării turațiilor critice de diferite grade a arborilor drepți sau cotiți, corespunzătoare vibrațiilor de torsiune ale acestora. Urmează apoi studiul vibrațiilor de încovoiere a arborilor drepți sau cotiți, stabilindu-se turația critică de gradul întîi a arborelui prototip (arbore vertical de diametru constant, sprijinit pe două lagăre, pe care este fixată la mijlocul arborelui cu excentricitatea e o piesă circulară avînd masa m), după care se trece la arbori constituiți din tronsoane cu diametre diferite, rezemați pe două reazeme și încărcați cu n piese circulare. Relațiile stabilite pentru turațiile critice își păstrează valabilitatea și în cazul general al arborelui sprijinit pe un număr oarecare de lagăre și încărcat cu un număr oarecare de piese circulare.

În ultimul capitol, 6, „CALCULUL VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE ALE ARBORILOR CU AJUTORUL GREFELOR DE FLUENȚĂ", se prezintă mai întîi unele noțiuni de teoria grafelor, precum și sistemele „în lanț" și „ramificate", care se aplică cu precădere la vibrațiile de torsiune ale arborilor drepți și cotiți. Se dau, apoi, ecuațiile de bază și grafele de fluență ale vibrațiilor de torsiune pentru sistemele „în lanț", „ramificate" și „închise", după care se trece la studiul proprietăților grafelor de fluență asociate sistemelor menționate mai sus. În continuare, se prezintă calculul vibrațiilor de torsiune pe baza proprietăților grafelor asociate sistemelor liniare. De asemenea prezintă sinteza optimală a sistemelor ce execută vibrații de torsiune.

Lucrarea se încheie cu trei exemple de calcul (un sistem „în lanț" și unul „ramificat", cu cîte opt mase circulare și un sistem „închis" cu șase volanți, pentru care s-au determinat cu ajutorul grafelor ecuațiile pulsațiilor proprii, amplitudinile componentelor vibrațiilor forțate, transmitanțele buclelor grafului vibrațiilor forțate etc.

Ampla bibliografie (constituită din 51 lucrări), în cea mai mare parte constînd din publicațiile autorilor, în țară și străinătate, în perfectă armonie cu tematica lucrării, vine să întărească caracterul original și de mare utilitate și actualitate al lucrării.

Prin conținutul ei, lucrarea se adresează cercetătorilor, inginerilor și tehnicienilor proiectanți, cadrelor didactice din învățămîntul tehnic superior, precum și unui cerc larg de specialiști interesați în probleme de creație tehnico-științifică în domeniul mecanicii aplicate.

Încheind analiza lucrării, considerăm că aceasta poate fi caracterizată ca o lucrare deosebit de valoroasă, cuprinzînd un material vast și variat, de mare utilitate pentru specialiștii care lucrează în acest domeniu, sau în domenii conexe, atît prin conținut, cît și prin forma sa de prezentare. Se cuvine totodată a fi subliniat faptul că, pentru elaborarea acestei cărți, autorii au depus un volum de muncă de-a dreptul impresionant, ceea ce ne îndreptățește odată în plus, s-o recomandăm cu căldură tuturor celor interesați.

Această lucrare nu trebuie să lipsească din nici o bibliotecă cu caracter tehnico-științific, ținînd seama de oportunitatea apariției sale, precum și de faptul că ea tratează la un nivel deosebit de elevat, o problematică de mare actualitate, prezentînd un interes cu totul aparte, pentru toți cei care doresc să țină pasul cu dezvoltarea vertiginoasă și în ritm rapid, a științei și tehnicii.

Petre Sima

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

- Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.
- Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).
- Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.
- Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

- Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).
- Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).
- Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).
- Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).
- Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).
- Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).
- Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 7.

ARTISTIDE HALANAY, MIHAIL POPESCU

ANALIZA STABILITĂȚII HIDRAULICE GENERALE DE FUNCȚIONARE LA REGIMURI TRANZITORII A UZINELOR HIDROELECTRICE PREVĂZUTE CU UNUL SAU DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU, PRIN METODA FUNCȚIEI LIAPUNOV

În articol se expune o metodă de studiu a stabilității hidraulice generale a castelelor de echilibru, bazată pe o analiză a stabilității fundamentată matematic, care permite alegerea preliminară a parametrilor de proiectare ai castelelor de la uzinele hidroelectrice prevăzute cu unul sau două castele de echilibru dispuse în sistem.
În anumite cazuri, metoda permite și o descriere analitică directă a condițiilor de stabilitate.
Se dau două exemple concrete de aplicare a metodei.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 3—19
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. ȘETEANU, R. POPA

TRANSPORTUL ALUVIUNILOR ÎN REGIM NEPERMANENT. II. EFECTUL FORMEI SECȚIUNII TRANSVERSALE A CURGERII

Se prezintă un model de calcul al procesului de transport al aluviunilor în regim nepermanent în albii cu pat mobil și secțiune transversală arbitrară. Se descompune domeniul de curgere în tuburi de curent componente, efectuîndu-se bilanțul aluviunilor transportate cu relația lui Engelund-Hansen. Se indică un exemplu de calcul al procesului de afuiere-transport-depunere pentru lacul de acumulare Bicaz.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 21—28
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. OROVEANU, AL. D. STAN

MIȘCAREA UNUI FLUID PRINTR-UN TUB CU PEREȚI PERMEABILI

În anumite situații practice, mișcarea unui fluid se efectuează prin tuburi cu pereți permeabili. Un asemenea caz ar putea exista la deschiderea stratelor productive de petrol cu ajutorul perforatoarelor mecanice sau al jeturilor. Într-o astfel de situație, este necesar să fie cunoscute elementele mișcării (viteza de filtrare prin pereții tubului, debitul de tranzit, căderea de presiune etc.).
Relațiile de calcul obținute în această lucrare, pe care le considerăm corecte, sînt utile pentru stabilirea parametrilor tehnologici optimi (debit de pompare, presiune) la tratamentele de sonde unde se presupune existența unor astfel de tuburi cu pereți permeabili.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 29—39
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

FLORIN IONESCU

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATRICEALĂ A DINAMICII CONEXIUNILOR DE MOTOARE HIDRAULICE ROTATIVE

Pornind de la prezentarea motorului hidraulic rotativ cu capacitate constantă ca pe un element cvadripolar caracterizat de variabilele de mișcare și de efort, hidraulice și mecanice, lucrarea prezintă, pe baza matricelor caracteristice ale motorului și ale legăturilor sale viscoelastice cu celelalte elemente ale lanțurilor cinematice, avantajele utilizării teoriei cvadripolilor la analiza conexiunilor de motoare hidraulice rotative.
Cu unele ipoteze simplificatoare sînt determinate și prezentate matricele caracteristice ale conexiunilor paralel, serie-paralel și paralel-serie, cît și principalele concluzii de ordin teoretic și practic ce decurg din acestea.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p.41—51
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

V. CÎRTOAJE

CARACTERIZAREA ÎN DOMENIUL FRECVENȚEI A SISTEMELOR LINIARE CONTINUE, INVARIANTE ÎN TIMP, CU FUNCȚII INDICIALE DE TIP EXPONENȚIAL-POLINOMIAL

Lucrarea fundamentează într-o manieră de sine stătătoare corelațiile existente între domeniul frecvenței și domeniul timpului la o anumită clasă de sisteme liniare continue și invariante în timp. Sînt prezentate în continuare metodologia de determinare experimentală a funcțiilor de frecvență, proprietățile principale ale acestora, relațiile de obținere a funcției indiciale din funcțiile de frecvență și o importantă teoremă care exprimă condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile de frecvență pentru ca acestea să corespundă unor sisteme cu funcție indicială de tip exponențial-polinomial.
În încheiere sînt tratate sistemele în conexiune serie și cu reacție.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 53—74
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. SIRETEANU, C. TEODOSIU, O. GÜNDISCH, M. RĂUȚĂ, S. PĂRĂIAN

STUDIUL CARACTERISTICILOR DE LUCRU ALE AMORTIZOARELOR HIDRAULICE

În lucrare este prezentată o metodă de calcul bazată pe studiul teoretic și experimental al sistemului hidraulic al unui amortizor de tip bitubular cu scurgerea lichidului în sens unic. Un accent deosebit este pus pe descrierea tehnicii experimentale concepută și realizată în acest scop.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 75—87
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

F. DINCĂ, O. GÜNDISCH, V. NICOLAE, T. SIRETEANU, I. ROȘU

AMORTIZOARE SECVENȚIALE PENTRU AUTOVEHICULE

Lucrarea prezintă unele aspecte ale reducerii nivelului de vibrații la autovehicule, prin introducerea în suspensie a unor amortizoare avînd principii de funcționare diferite de cele clasice. Este făcută o apreciere globală a eficienței noilor soluții preconizate și se dă un algoritm de calcul pentru determinarea funcției de transfer a unui sistem oscilant, a cărui disipare de energie este realizată cu unul dintre aceste tipuri de amortizoare.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 89—97
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

G. KÜMBETLIAN

INFLUENȚA GROSIMII ASUPRA CÎMPURILOR MĂRIMILOR FIZICE ALE BARELOR ȘI PLĂCILOR GROASE

În cele ce urmează se prezintă concluziile cercetării privind influența grosimii asupra cîmpurilor de forțe tăietoare și momente încovoietoare din barele și plăcile groase solicitate la încovoiere cilindrică sub acțiunea sarcinilor biarmonice, pe baza unui model elaborat de autor și în concordanță cu rezultatele experimentale obținute în acest caz.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 99—105
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

O PROPUNERE DE CODIFICARE A TEORIILOR DIN MECANICA CONSTRUCȚIILOR

Pornind de la constatarea că nu există o clasificare sistematică a teoriilor din mecanica construcțiilor, se propune o codificare bazată pe patru factori principali și anume : modului de exprimare a echilibrului pe structură, comportarea materialului, mărimea deformațiilor și modul de considerare a expresiei curburii. În încheiere, se exemplifică codificarea unor probleme de mecanica construcțiilor.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 107—124
Redacția București, str. Const. Mille nr. 15

C. ȚURCANU și AL. NICA

MODELE ANALITICO-CINETICE PENTRU EVALUAREA EMISIILC R POLUANTE DE LA TURBOMOTOARELE DE AVIAȚIE ; TEHNICI DE LIMITARE

Mecanismele de formare a emisiilor nocive specifice turbomotoarelor de aviație, precum și influența diverșilor parametri funcționali și constructivi, au fost expuse în lucrări anterioare [1], [2], [3]. În cele ce urmează se prezintă unele aspecte noi privind :
a) dezvoltarea metodelor de calcul destinate estimării nivelului emisiilor poluante sub diverse stări de echilibru, pentru o mai bună înțelegere a interacțiunilor dintre factorii implicați în aceste procese ;
b) măsurile practice ce se desprind din aceste studii și eficiența lor în construcțiile efective ;
c) utilizarea unor noi tehnici în cercetările experimentale privind formarea emisiilor poluante.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 125—139
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

GHEORGHE ZĂTREANU, CONSTANTIN SILVESTRU

ECHILIBRAJUL FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE ÎN H

Se prezintă o teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele în H, cu mecanisme bielă-manivelă normale și cu arbori cotiți identici sau simetrici în oglindă, aprinderile fiind uniform repartizate pe ansamblul cilindrilor aferenți aceluiași arbore cotit.
Se arată că forțele de inerție ale maselor cu mișcare de translație se echilibrează complet la orice motor : în funcție de tipul motorului, acest rezultat se obține fie organic, prin construcția arborilor cotiți, fie prin calarea lor corespunzătoare.
Se precizează echilibrajul asigurat prin repartiția uniformă a aprinderilor pe ansamblul motorului.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 141—153
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

DUMITRU RAȘEEV, EMIL TOCACI

ASPECTE PRIVIND STUDIUL MIȘCĂRII SAPELOR DE FORAJ

În lucrare, se exprimă mișcarea unui punct curent ce aparține conului unei sape, realizîndu-se astfel un studiu succint, dar, în principiu, complet, al cinematicii sapelor de foraj.
Se abordează problema legăturii dintre modul de desfășurare a mișcării sapelor și interacțiunile la care acestea sînt supuse, relevîndu-se necesitatea ca un astfel de studiu (care, de fapt, este de dinamica sapelor) să fie completat cu date experimentale.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 1, 1979, p. 155—169
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38, nr. 2 martie—aprilie 1979

SUMAR

STUDII

EMIL TOCACI, Aspecte ale efectului forţelor percutante şi ale dinamicii particulei de masă variabilă, în cazul relativist 175

MIHAI D. STAN, Studiul curgerii unui fluid perfect incompresibil în jurul unui cilindru poros slab deformat 187

T. OROVEANU, AL. D. STAN, Consideraţii asupra regimului termic în mişcarea gazelor prin conducte 197

MIRCEA T. ORĂŞANU, Asupra mişcărilor nestaţionare cu suprafaţă liberă printr-un masiv poros neomogen de tipul III 209

N. MANAFI, S. CONONOVICI, Algoritme pentru calculul poziţional şi cinematic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale binare, utilizate în programul general CINCINET 219

ADALBERT NAHLIK, ALEXANDRU PASTIA, metodă exactă pentru echilibrarea rotorilor în două plane 237

CONSTANTIN ACKER, Solicitări statice în motorul liniar cu piston, avînd cursa pistoanelor verticală 251

VALERIU BĂNUŢ, Calculul geometric neliniar al structurilor spaţiale formate din bare 259

MARCEL D. STERE, Calculul deformaţiilor mari ale plăcilor folosind metoda relaxării dinamice 273

ŞTEFAN JERCA, Calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale cu comportare vîscoelastică 287

DAN FRANGOPOL, JACQUES RONDAL, Combinarea optimă a siguranţei şi economiei în dimensionarea structurilor 299

M. A. DUMBRAVĂ, Elemente de teoria grafurilor aplicate în studiul şi interpretarea fenomenelor de curgere din lagărele hidrostatice 305

ŞTEFAN STANCIU, Lagăre radiale hidrostatice echipate cu drosele din materiale sinterizate 317

LUCIAN CĂPITANU, Cercetări privind comportarea la frecare şi uzare a dozatorilor celulari pentru evacuarea cenuşii de şist din electrofiltre 331

GHEORGHE AMZA, PETRE GLADCOV, Cercetări asupra strunjirii în cîmp ultrasonor 341

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 28, nr. 2 martie—aprilie 1979

SUMAR

STUDII

EMIL. TOCACI, Aspecte ale efectului forţelor pierdutare şi ale dinamicii particulei de masă variabilă, în cazul relativist 175

MIHAI D. STAN, Studiul curgerii unui fluid pentru incompresibil în jurul unui cilindru pătrat şiab deformat 187

T. OROVEANU, AL. D. STAN, Considerarea asupra regimului termic în mişcarea gazelor prin conducte 197

MIRCEA T. ORĂŞANU, Asupra măsurătorilor cu supraţă liberă printr-un muchy pătrat neomogen de tipul III 209

N. MANEA, S. CONSTANTIN, Algoritme pentru calculul pasiunal şi dinamic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale liniare, utilizate în programul general CINEMAT 219

VASILIU MANOLIU, ALEXANDRU PASTIA, Metodă exactă pentru calculul pentru rotorul în două plane 227

CONSTANTIN ACHILLE, Soluţiile statice în spaţiul liniar cu plan, având curba pătrat 231

VALERIU MANOLIU, Calculul geometric al structurilor spaţiale formate din bare 239

MATHIAS, D. ŞTEFAN, Calculul deformaţiilor unui ale plăcilor folosind metoda relaxării diferenţe 279

ŞTEFAN IBRICA, Calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale cu comportare vâscoelastică 287

DAN PĂNĂGOIU, MARCUS HONIAL, Combinarea optimă a sigurantei şi economicităţii în dimensionarea structurilor 293

N. A. DUMBRAVĂ, Elemente de teoria grafurilor aplicate în studiul şi interpretarea fenomenelor de curgere din lagărele hidrostatice 305

ŞTEFAN STANCIU, Lagăre radiale hidrostatice echilibrate cu diferite din materiale elastice 317

ILIE DAN CĂPĂTÂNĂ, Cercetări privind comportarea în frecare şi uzare a dezalierilor cilindri pentru cuplarea cuplaţi de sisi din electrolitire 331

GHEORGHE AMZA, PETRE CLĂTICOV, Cercetări asupra stranguiri în cimp ultrasonor 341

ASPECTE ALE EFECTULUI FORȚELOR PERCUTANTE ȘI ALE DINAMICII PARTICULEI DE MASĂ VARIABILĂ, ÎN CAZUL RELATIVIST

EMIL TOCACI
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Lucrarea, utilizînd unele elemente de teoria distribuțiilor, stabilește, în prima sa parte, legătura între percuția aplicată unei particule și variația vitezei sale, precum și variația masei sale de repaus, în cazul relativist (al vitezei v a particulei suficient de mare în raport cu viteza c a luminii pentru ca mărimea $v^2 \cdot c^{-2}$ să nu poată fi neglijată).
În cea de-a doua parte este stabilită ecuația de mișcare a particulei de masă variabilă (prin captări sau emisii de jeturi de substanță) în același caz relativist, caracterizat fie de o viteză v, a particulei studiate, suficient de mare, pentru ca $v^2 \cdot c^{-2}$ să nu se poată neglija, fie de o viteză u a jetului emis (captat) suficient de mare pentru ca $u^2 \cdot c^{-2}$ să nu fie o cantitate neglijabilă, fie de situația în care atît $v^2 \cdot c^{-2}$, cît și $u^2 \cdot c^{-2}$ nu sînt neglijabile.
Implicațiile practice sînt evidente. Se dau și două exemple de calcul.

Adaptînd legile și relațiile mecanicii relativiste pentru situația în care o particulă materială suferă acțiuni percutante, se va putea obține o ecuație diferențială care să descrie mișcarea în acest caz, ținînd seama și de variația relativistă a masei.

Procedeul devine, evident, necesar în cazul vitezelor $\bar{v}$ suficient de mari pentru ca mărimea $v^2 \cdot c^{-2}$ (cu c viteza luminii, sau, mai general, viteza de propagare a informației și influenței) să nu poată fi neglijată.

1. EFECTUL FORȚELOR PERCUTANTE, ÎN CAZUL RELATIVIST

O forță percutantă

$$\bar{F} = \bar{P}\delta(t - \tau), \tag{1}$$

cu $\bar{P}$ vectorul percuție, τ momentul la care are loc percuția, iar $\delta(t - \tau)$ distribuția lui Dirac. S-a admis firește că este o ciocnire ideală (instantanee).

Aplicînd această forță unui punct material M, a cărui masă de repaus este m_0, iar $m = m_0 \, [1 - v^2 \cdot c^{-2}]^{-\frac{1}{2}}$ este masa de mișcare (cu c viteza luminii), avem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v}) = \bar{P}\delta(t - \tau), \tag{2}$$

ecuația diferențială ce exprimă mișcarea lui M, față de un reper inerțial, în care această particulă are viteza $\bar{v}$.

Integrînd (în sensul distribuțiilor), obținem

$$m\bar{v} = \bar{P}H(t - \tau) + \bar{K}_0, \tag{3}$$

unde

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } t < \tau, \\ \dfrac{1}{2} & \text{pentru } t = \tau, \\ 1 & \text{pentru } t > \tau \end{cases} \tag{4}$$

este funcția lui Heaviside, iar $\bar{K}_0$ este o constantă arbitrară cu semnificație evidentă.

Într-adevăr, se vede că

$$\lim_{t \to \tau - 0} (m\bar{v}) = \bar{K}_0 = m' \cdot \bar{v}', \tag{5}$$

v' fiind viteza particulei M, iar m' masa sa înainte de aplicarea forței percutante $\bar{F}_p$ (adică pentru $t < \tau$, mai exact $t = \tau - 0$).

Deci (3) înseamnă:

$$m\bar{v} = \bar{P}\,H(t - \tau) + m'\bar{v}' \tag{6}$$

sau, mai detaliat, cu notațiile evidente, se poate scrie:

$$\frac{m_{0_p}\bar{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \bar{P}H(t - \tau) + \frac{m_0\bar{v}'}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2}{c^2}}}, \tag{7}$$

cu m_{0_p} masa de repaus după ciocnire (fiindcă poate să crească energia de repaus, $m_{0_p} \geqslant m_0$, doar la ciocnire elastică $m_{0_p} = m_0$).

Se constată că, imediat după ciocnire, particula M are o viteză $\bar{v}_1$, care satisface egalitatea

$$\frac{m_{0_p}\bar{v}_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v_1^2}{c^2}}} = \bar{P} + \frac{m_0\bar{v}'}{\sqrt{1 - \dfrac{v'^2}{c^2}}}, \tag{8}$$

ca o consecință a relației (4), fiindcă $\bar{v}_1 = \lim\limits_{t \to \tau + 0} \bar{v}$.

Se pune problema de a stabili, în condițiile variației relativiste a masei în funcție de viteză, efectul unei percuții.

Datorită percurței $\bar{P}$, viteza are un salt $\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}'$.

Se adoptă notaţia

$$\bar{Q} = \frac{\bar{P}}{m_0} + \frac{\bar{v}'}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}}, \tag{9}$$

cu observaţia că vectorul $\bar{Q}$ este cunoscut, fiind dependent exclusiv de datele problemei.

Introducînd (9) în (8), după calcule cu totul elementare, rezultă

$$|\bar{v}_1| = \frac{\frac{m_0}{m_{0p}} |\bar{Q}|}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 Q^2}{m_{0p}^2 c^2}}}, \qquad \bar{v}_1 = \frac{\frac{m_0}{m_{0p}} \bar{Q}}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 Q^2}{m_{0p}^2 c^2}}}. \tag{10}$$

Şi, în consecinţă,

$$\Delta\bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}' = \frac{\frac{m_0}{m_{0p}} \bar{Q}}{\sqrt{1 + \frac{m_0^2 Q^2}{m_{0p}^2 c^2}}} - \bar{v}' = \frac{\bar{P}}{m_{0p}\sqrt{1 + \frac{m_0^2 Q^2}{m_{0p}^2 c^2}}} + \tag{11}$$

$$+ \bar{v}' \left[\frac{m_0}{m_{0p}\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{m_0^2 Q^2}{m_{0p}^2 c^2}}} - 1 \right],$$

saltul de viteză pentru cazul (relativist) considerat, fiind astfel determinat.

De remarcat că :

1) Vectorul $\bar{Q}$ are dimensiuni de viteză.

2) Dacă $v'^2 \cdot c^{-2} \cong 0$, atunci $Q \cong m_0^{-1} \cdot \bar{P}$.

3) Dacă, în plus, şi $Q^2 \cdot c^{-2} \cong 0$, şi $m_0 \cong m_{0p}$, atunci $\Delta\bar{v} = \frac{\bar{P}}{m_0}$, regăsindu-se, ca un caz cu totul particular, cunoscuta egalitate din mecanica clasică, prin care se exprimă saltul de viteză determinat de o percuţie $\bar{P}$.

4) Masa m_{0p} satisface egalitatea $m_{0p} c^2 = m_0 c^2 + \Delta E_0$, cu ΔE_0 creşterea energiei interne a particulei, datorită ciocnirii. Cînd ciocnirea este elastică, evident $\Delta E_0 = 0$ şi rezultă $m_{0p} = m_0$.

În cazul în care se aplică unei particule o succesiune de percuţii $\bar{P}_i$, la momentele τ_i, concomitent cu acţiunea unei forţe continui $\bar{F}$, legea diferenţială a mişcării va fi :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_0 \bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right] = \bar{F} + \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i \delta(t - \tau_i), \tag{12}$$

cu n numărul total al acţiunilor percutante.

Salturile de viteză provocate de percuții se stabilesc cu ajutorul formulei (11), din aproape în aproape.

După cum se constată cu ușurință, relația (11) este o generalizare a celei clasice cu care este similară, generalizare care se referă la cazul în care se consideră și variația relativistă a masei.

Exemplu de calcul. Se consideră o particulă materială a cărei masă de repaus este m_0 care ciocnește cu o viteză $\bar{v}_0$ planul $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$, raportat la un reper cartesian $Oxyz$, ale cărui axe Ox, Oy, Oz au versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, respectiv. Planul rămîne permanent fix.

Înseamnă că

$$\bar{P} = \lambda(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}), \tag{13}$$

λ fiind un scalar, iar $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, versorii axelor Ox, Oy, Oz, respectiv.

Prin urmare

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\bar{v}) = \lambda(a_0\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\,\delta(t - \tau), \tag{14}$$

cu τ momentul ciocnirii și, după cum se știe, $m = m_0(1 - v^2 \cdot c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, iar $\bar{v}$ este viteza particulei.

Integrînd și determinînd constanta arbitrară, rezultă

$$\frac{m_{0p}\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k})\,H(t - \tau) + \frac{m_0\bar{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \tag{15}$$

Iar dacă $\bar{v}_1$ este viteza imediată după ciocnire, se poate scrie

$$\frac{m_{0p}\bar{v}_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \lambda(a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}) + \frac{m_0\bar{v}_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \tag{16}$$

Admițînd un coeficient de restituire k_0, aceasta revine la a afirma că există egalitatea

$$k_0 = -\frac{\frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{P}}{|P|}}{\frac{\bar{v}_0 \cdot \bar{P}}{|\bar{P}|}} = -\frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{P}}{\bar{v}_0 \cdot \bar{P}} = -\frac{a_1v_{1x} + a_2v_{1y} + a_3v_{1z}}{a_1v_{0x} + a_2v_{0y} + a_3v_{0z}}, \tag{17}$$

care este evidentă, avînd în vedere că $\bar{v}_1 = \bar{i}v_{1x} + \bar{j}v_{1y} + \bar{k}v_{1z}$ și $\bar{v}_0 = \bar{i}v_{0x} + \bar{j}v_{0y} + \bar{k}v_{0z}$.

Totodată, proiectînd ultima egalitate vectorială pe axele sistemului de referință, găsim :

$$\frac{m_{0p}\, v_{1x}}{\sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2}{c^2}}} = \lambda a_1 + \frac{m_0\, v_{0x}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

$$\frac{m_{0p}\, v_{1y}}{\sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2}{c^2}}} = \lambda a_2 + \frac{m_0 v_{0y}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \tag{18}$$

$$\frac{m_{0p}\, v_{0z}}{\sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2}{c^2}}} = \lambda a_3 + \frac{m_0 v_{0z}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

$$a_1 v_{1x} + a_2 v_{1y} + a_3 v_{1z} = -k_0(a_1 v_{0x} + a_2 v_{0y} + a_3 v_{0z}),$$

la care se adaugă și

$$\Delta E = -\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} + \frac{m_{0p} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2}{c^2}}} =$$

$$= m_{0p} c^2 + \frac{m_{0p}}{2}(v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{1z}^2) - (m_0 c^2 + \frac{m_0}{2} v_0^2) \tag{19}$$

deoarece, admițînd că planul cu care se ciocnește particula nu absoarbe energie, înseamnă că energia cinetică a particulei se transformă (doar parțial dacă ciocnirea nu este plastică, și total dacă ciocnirea este plastică) în energie internă, sporind masa de repaus, iar ΔE reprezintă, evident, variația totală de energie a particulei.

Natural, există și posibilitatea ca o parte din energie să fie absorbită și de plan. Pentru un calcul exact al mișcării particulei, această cantitate trebuie cunoscută.

Relațiile (18) și (19) formează un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute și anume : v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, λ, m_{0p}, care se rezolvă în mod cu totul elementar. Coeficientul de restituire k_0 se consideră cunoscut. Se vede că dacă ciocnirea este elastică, $k_0 = 1$ și $v_0^2 = v_1^2$, iar $m_{0p} = m_0$.

2. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A MIȘCĂRII PARTICULEI DE MASĂ VARIABILĂ, PENTRU VITEZELE MARI

În cazul a două puncte materiale, M_1 și M_2, care se ciocnesc între ele, ecuația (12) dă dreptul ca, pentru fiecare din aceste două particule, să se poată scrie :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_{0_1}\bar{v}_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}}\right] = \bar{F}_1 + \bar{P}\delta(t-\tau),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_{02}\bar{v}_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}}\right] = \bar{F}_2 - \bar{P}\delta(t-\tau), \tag{20}$$

cu m_{0_1}, m_{0_2} masele de repaus ale celor două particule ;
$\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ vitezele lor ; $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ forțele nepercutante ce le acționează ; τ momentul ciocnirii dintre ele ; $\bar{P}_1 = \bar{P}$ și $\bar{P}_2 = -\bar{P}$ vectorul percuție pentru M_1 și M_2, respectiv. $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$, chiar dacă influența nu se propagă instantaneu în spații, fiindcă aici este vorba de o ciocnire, deci de o interacțiune de contact și influența (percutantă) reciprocă dintre M_1 și M_2 nu se propagă la distanță.

Conform celor de mai sus, din (20), prin integrare, rezultă

$$\frac{m_{p_1}\bar{v}_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \bar{F}_1\Delta t + \bar{P}H(t-\tau) + \frac{m_{0_1}\bar{v}_1'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}},$$

$$\frac{m_{p2}\,\bar{v}_2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = F_2\Delta t - \bar{P}H(t-\tau) + \frac{m_{0_2}\bar{v}_2'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \tag{21}$$

în care m_{p_1} și m_{p_2} sînt masele de repaus după ciocnire. Dacă ciocnirea este elastică, $m_{p_1} = m_{0_1}$ și $m_{p_2} = m_{0_2}$, iar dacă nu este elastică $m_{p_1} > m_{0_1}$ și $m_{p_2} > m_{0_2}$ pentru că energia internă a particulelor crește. Într-adevăr, fie

$$E_0 = \frac{m_{0_1}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}} \tag{22}$$

energia sistemului format din cele două particule materiale, în momentul imediat anterior ciocnirii, cînd cele două particule au vitezele v_1' și v_2'. Fie

$$E = \frac{m_{p_1}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{p_2}c^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} \tag{23}$$

energia aceluiași sistem material, în momentul imediat ulterior ciocnirii. Pentru că $E_0 = E$, dacă se consideră fenomenul pe un interval de timp elementar, delimitat de un moment imediat anterior și unul imediat ulterior ciocnirii ideale, interval în care deci este inclus și momentul τ al ciocnirii (adică, în relațiile (21) se ia $\Delta t \cong 0$) și pentru că, în aceleași condiții, la marginile aceluiași interval de timp, însumînd relațiile (21), rezultă

$$\frac{m_{p_1}\bar{v}_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{p_2}\bar{v}_2^2}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{0_1}\bar{v}_1'}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}\bar{v}_2'}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}} \tag{24}$$

sau

$$\frac{m_{p_1}\bar{v}_1\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{p_2}\bar{v}_2\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{m_{0_1}\bar{v}_1'\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v'^2_1}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}\bar{v}_2'\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}}. \tag{25}$$

Din (22) și (23), asociate cu egalitatea $E_0 = E$, precum și (25), se stabilește că

$$m_{p1} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{m_{01}}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}} & 1 \\ \frac{m_{0_1}\bar{v}_1'\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{02}\bar{v}_2'\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}} & \bar{v}_2\bar{P} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} & 1 \\ \frac{\bar{v}_1\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} & \bar{v}_2\bar{P} \end{vmatrix}} \tag{26}$$

și că

$$m_{p_2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{m_{0_1}}{\sqrt{1-\dfrac{v_1'^2}{c^2}}} + \dfrac{m_{0_2}}{\sqrt{1-\dfrac{v_2'^2}{c^2}}} \\ \bar{v}_1\bar{P} & \dfrac{m_{0_1}\bar{v}_1'\bar{P}}{\sqrt{1-\dfrac{v_1'^2}{c^2}}} + \dfrac{m_{0_2}\bar{v}_2'\bar{P}}{\sqrt{1-\dfrac{v_2'^2}{c^2}}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}} \\ \bar{v}_1\bar{P} & \dfrac{\bar{v}_2\bar{P}}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}} \end{vmatrix}}. \tag{27}$$

S-a admis că ciocnirea nu este plastică.

Astfel, s-au exprimat m_{p_1} și m_{p_2} în funcție de mărimile de care ele depind. Evident, această exprimare rămîne adevărată pentru orice ciocnire între două particule.

Se constată imediat că dacă $\frac{v_1^2}{c^2} \cong 0$ și $\frac{v_2^2}{c^2} \cong 0$, atunci

$m_{p_1} = m_{0_1}$ și $m_{p_2} = m_{0_2}$, ceea ce este foarte firesc.

Revenind la (21), $\Delta t = 2\varepsilon$ este suficient de mic pentru ca

$$\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \bar{F}_1 dt = 2\bar{F}_1\varepsilon = \bar{F}_1\Delta t; \quad \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \bar{F}_2 dt = 2\bar{F}_2\varepsilon = \bar{F}_2\,\Delta t, \tag{28}$$

ceea ce revine la a spune că ε este suficient de mic pentru ca $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$ să permită a se considera $\bar{F}_1$ și $\bar{F}_2$ vectori constanți. Se reamintește că $\bar{v}_1$ și $\bar{v}_2$ sînt vitezele după ciocnire; $\bar{v}_1'$ și $\bar{v}_2'$ sînt vitezele înainte de ciocnire.

Însumînd cele două ecuații (21), se obține

$$\frac{m_{p_1}\bar{v}_1}{\sqrt{1-\dfrac{v_1^2}{c^2}}} + \frac{m_{p_2}\bar{v}_2}{\sqrt{1-\dfrac{v_2^2}{c^2}}} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)\,\Delta t + \frac{m_{0_1}\bar{v}_1'}{\sqrt{1-\dfrac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}\bar{v}_2'}{\sqrt{1-\dfrac{v_2'^2}{c^2}}} \tag{29}$$

Dacă ciocnirea este plastică, $v_1 = v_2 = v_c$, și

$$\frac{(m_{p_1} + m_{p_2})\bar{v}_c}{\sqrt{1-\dfrac{v_c^2}{c^2}}} = (\bar{F}_1 + \bar{F}_2)\,\Delta t + \frac{m_{0_1}\bar{v}_1'}{\sqrt{1-\dfrac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}\bar{v}_2'}{\sqrt{1-\dfrac{v_2'^2}{c^2}}}. \tag{30}$$

Fie acum cazul în care punctul material M_1 captează un jet de mase, și $m_{p_1} = m_p$ masa de repaus la momentul t și $m_p + \Delta m_p$ la momentul $t + \Delta t$. În intervalul $(t, t + \Delta t)$ punctul M_1 a captat un jet de particule (care se asimilează cu o singură particulă) a cărui masă de repaus a fost, înainte de captare, $m_{0_2} = \Delta m_0$.

Se mai admite că $\bar{F}_1 = \bar{F}$ (o forță oarecare, suma tuturor forțelor ce acționează pe M_1. și care nu sînt generate de fenomenul de captare); $\bar{F}_2 = 0$ (adică particulele captate nu sînt acționate de alte forțe în afară de cea care este generată de ciocnirea plastică, adică de captare); $\bar{v}_1' = \bar{v}$; $\bar{v}_2' = \bar{u}$ (viteza particulei captate în momentul imediat anterior captării); $\bar{v}_c = \bar{v} + \Delta\bar{v}$ (viteza comună după captare). Cu acestea relația (30) ia forma

$$\frac{(m_p + \Delta m_p)(\bar{v} + \Delta\bar{v})}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{v} + \Delta\bar{v})^2}{c^2}}} = \bar{F}\Delta t + \frac{m_p\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{\Delta m_0\bar{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{31}$$

sau

$$\frac{(m_p + \Delta m_p)(\bar{v} + \Delta\bar{v})}{\sqrt{1 - \frac{(\bar{v} + \Delta\bar{v})^2}{c^2}}} - \frac{m_p\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \bar{F}\Delta t + \frac{\Delta m_0\bar{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \tag{31'}$$

Împărțind la Δt și considerînd cazul limită în care Δt este infinit mic ($\Delta t \to 0$), rezultă, în mod evident, ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m_p\bar{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right] = \bar{F} + \frac{\bar{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t}, \tag{32}$$

care este ecuația diferențială Mescerski-Levi Civita, a mișcării unei particule materiale care captează un jet continuu de substanță.

Firește, $\bar{v}$ este viteza acestei particule materiale a cărei mișcare interesează, iar masa de repaus m_p este o funcție de timp: $m_p = m_p(t)$.

Remarca 1. Dacă particula studiată emite un jet de substanță, această emisie se poate considera ca o captare negativă și tot ce s-a afirmat rămîne adevărat, cu precizarea că pentru captare $\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} > 0$, iar pentru emisie $\frac{\mathrm{d}m_0}{\mathrm{d}t} < 0$.

Remarca 2. Dacă ciocnirea între două particule este pastică, deci $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = \bar{v}_c$, se poate scrie conservarea energiei și relația de conservare a impulsului, înmulțită cu vectorul percuție $\bar{P}$,

$$\frac{m_{p_1} + m_{p_2}}{\sqrt{1 - \frac{v_c^2}{c^2}}} = \frac{m_{0_1}}{\sqrt{1 - \frac{v_1'^2}{c^2}}} + \frac{m_{0_2}}{\sqrt{1 - \frac{v_2'^2}{c^2}}}, \tag{33}$$

$$\frac{(m_{p_1}+m_{p_2})\bar{v}_c\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_c^2}{c^2}}}=\frac{m_{0_1}\bar{v}_1'\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}}+\frac{m_{0_2}\bar{v}_2'\bar{P}}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}}, \tag{34}$$

ceea ce, dacă $\bar{v}_1', \bar{v}_2'$ și implicit $\bar{v}_c$ și $\bar{P}$ sînt toți patru vectori coliniari, înseamnă

$$\bar{v}_c=\frac{\dfrac{m_{0_1}v_1'}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}}+\dfrac{m_{0_2}v_2'}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}}}{\dfrac{m_{0_1}}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}}+\dfrac{m_{0_2}}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}}}, \tag{35}$$

oricare ar fi m_{p_1} și m_{p_2}, înseamnă că, în cazul captării, conform celor de mai sus, dacă $m_{p_1}+m_{p_2}=m_p+\mathrm{d}m_p$; $m_{0_1}=m_p$; $m_{0_2}=\mathrm{d}m_0$, $v_1'=v$; $v_2'=u$; $v_c=v+\mathrm{d}v$, atunci

$$v+\mathrm{d}v=\frac{\dfrac{m_pv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\dfrac{\mathrm{d}m_0u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}{\dfrac{m_p}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\dfrac{\mathrm{d}m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} \tag{36}$$

sau

$$\mathrm{d}v=(u-v)\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{\mathrm{d}m_0}{m_p} \tag{37}$$

și ținînd seama de (33), după calculele elementare, rezultă

$$\mathrm{d}m_p=\left[\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}-\frac{v(u-v)}{c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]\mathrm{d}m_0. \tag{38}$$

Această egalitate este utilă pentru calculele practice bazate pe ecuația (32). Evident, pentru a stabili relația (38) s-au intodus în (33) datele specifice captării (emisiei) precizate mai sus.

Exemplu de calcul. Fie o rachetă a cărei masă inițială este m_{0r} și care este lansată de la sol, cu o viteză inițială nulă. Jetul de gaze eliminat într-un interval de timp elementar dt are o masă de repaus $dm_0 = -q_0 e^{\alpha t} dt$ · (q_0 și α constante date, cu dimensiuni evidente). Admitem că racheta se deplasează rectiliniu, pe verticală, și $\bar{F} = -mg\,\bar{k}$ (unde $\bar{k}$ este versorul vertical ascendent); iar $\bar{v} = \dot{z}\bar{k}$ (z fiind cota). Se mai consideră cazul în care $u = -(u_0 - \dot{z})$, cu u_0 o constantă. Firește, g este accelerația gravitațională.

Ecuația (32) devine:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_p \dot{z}}{\sqrt{1-\frac{\dot{z}^2}{c^2}}}\right] = -\frac{m_p}{\sqrt{1-\frac{\dot{z}^2}{c^2}}}\,g + q_0\,\frac{u_0 - \dot{z}}{\sqrt{1-\frac{(u_0-\dot{z})^2}{c^2}}}\,e^{\alpha t}, \tag{39}$$

iar (38) ia forma

$$\frac{dm_p}{dt} = -q_0 e^{\alpha t}\,\frac{\sqrt{1-\frac{\dot{z}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{(u_0-\dot{z})^2}{c^2}}} + \frac{u_0 \dot{z}}{c^2\sqrt{1-\frac{\dot{z}^2}{c^2}}\,\sqrt{1-\frac{(u_0-\dot{z})^2}{c^2}}}. \tag{40}$$

Ecuațiile (39) și (40) formează un sistem diferențial, a cărui rezolvare (asociată cu determinarea constantelor arbitrare de integrare, cu ajutorul condițiilor inițiale) conduce la cunoașterea funcțiilor $z = z(t)$ și $m_p = m_p(t)$, deci la stabilirea evoluției mecanice a rachetei.

Evident, aceste considerații și calcule se pot dezvolta, extinde și aprofunda considerabil, dar prezenta lucrare nu-și propune decît să sugereze un punct de vedere și o metodă de lucru, care devine deosebit de utilă dacă fie viteza particulei ce captează (emite), fie cea a particulelor captate (emise) este o cîtime neneglijabilă din cea a luminii, deci este suficient de mare și, bineînțeles, cu atît mai mult dacă amîndouă vitezele v și u îndeplinesc această condiție.

De pildă, admițînd că $\dot{z}^2 \cdot c^{-2} \cong 0$; $(u_0 - \dot{z})^2 \cdot c^{-2} \cong u_0^2 \cdot c^2$; $u_0 - \dot{z} \cong u_0$, adică admițînd că u_0 este foarte mare și nu poate fi neglijată față de viteza luminii (c), iar $\dot{z}$ este o viteză suficient de mică pentru a se putea neglija în raport cu u_0 și, cu atît mai mult în raport cu c, ecuațiile (39) și (40) devin:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_p \dot{z}) &= -m_p g + \frac{q_0 u_0}{\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}}\,e^{\alpha t}, \\ \frac{dm_p}{dt} &= -\frac{q_0}{\sqrt{1-\frac{u_0^2}{c^2}}}\left(1 + \frac{u_0}{c^2}\,\dot{z}\right)e^{\alpha t}. \end{aligned} \tag{41}$$

După calcule elementare și pentru că racheta este în repaus la momentul inițial, acestea iau forma :

$$m_p(\dot{z} + gt) = \frac{u_0 q_0}{\alpha\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}(e^{\alpha t} - 1),$$

$$m_p\left[\frac{dm_p}{dt} + \left(1 - \frac{u_0 g}{c^2}t\right)\left[\frac{q_0 e^{\alpha t}}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}\right] = \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}} - e^{\alpha t}\right]\frac{q_0^2 u_0^2}{\alpha c^2\sqrt{1 - \frac{u_0^2}{c^2}}}\right. \tag{42}$$

Integrarea acestui sistem conducînd imediat la soluționarea problemei.

Lucrări viitoare vor aprofunda unele aspecte și vor încerca să obțină concluzii de importanță practică majoră, într-o manieră pe care prezenta lucrare o sugerează.

Primită la redacție la 7 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

V. Ougarov, *Théorie de la relativité restreinte*, Editions Mir-Moscou, 1974.
E. Tocaci, *Fenomene discontinui în mecanică și rezistența materialelor*, Edit. Academiei R. S. România, București, 1974.

În memoria prof. Șt. I. Gheorghiță

STUDIUL CURGERII UNUI FLUID PERFECT INCOMPRESIBIL ÎN JURUL UNUI CILINDRU POROS SLAB DEFORMAT

de MIHAI D. STAN
Institutul de studii și proiectări hidroenergetice, București

În lucrare se studiază curgerea unui fluid perfect incompresibil în jurul unui cilindru poros slab deformat.

1. INTRODUCERE

Metoda parametrului mic constituie o metodă aproximativă folosită cu mult succes în fizică și tehnică. Intens utilizată în cadrul mecanicii fluidelor [2, 3, 4, 10] ea și-a găsit o mare utilizare și în cadrul mecanicii mediilor poroase (5, 6, 7, 8].

Lucrarea de față își propune să studieze mișcarea unui fluid perfect incompresibil în jurul unui cilindru poros slab deformat.

2. STUDIUL PROBLEMEI ÎN CAZUL GENERAL

Fie D_ϵ ($\epsilon \ll 1$) în domeniul ocupat de un mediu poros a cărui frontieră este

$$\partial D_\epsilon : r = R[1 + \epsilon f(\theta)] \quad \epsilon \ll 1, \ \theta \in [0,2\pi], \ f \in C^1[0,2\pi]. \tag{2.1}$$

Notăm cu D_ϵ^* exteriorul domeniului D și-l presupunem ocupat de un fluid perfect, incompresibil, care este animat la infinit de viteza constantă $\vec{V}_0$. Ne propunem să studiem mișcarea fluidului în jurul domeniului D_ϵ.

Fără a restrînge din generalitate vom presupune că $\vec{V}_0$ este un vector paralel cu axa Ox. Avem prin urmare de rezolvat o problemă plană, a cărei formulare matematică este: să se determine funcțiile armonice φ_1 și φ_2 care verifică următoarele condiții:

$$\Delta\varphi_1 = 0 \quad \text{în} \quad D_\epsilon^*, \tag{2.2}$$

$$\Delta\varphi_2 = 0 \quad \text{în} \quad D_\epsilon, \tag{2.3}$$

$$\lim \ (\text{grad}\ \varphi_1)\,\vec{i} = V_0\vec{i}, \tag{2.4}$$

$$p_0 + \frac{\rho}{2}[V_0^2 - (\text{grad } \varphi_1)^2 = -\frac{\rho g}{k}\varphi_2 \text{ pe } \partial D_\epsilon, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \qquad \text{pe } \partial D_\epsilon, \tag{2.6}$$

unde p_0 reprezintă presiunea fluidului la infinit, ρ densitatea fluidului, g acceleraţia gravitaţională, iar k coeficientul de permeabilitate. Condiţia (2.4) reprezintă condiţia ca viteza fluidului la infinit să fie dată, iar condiţiile (2.5) şi (2.6) reprezintă continuitatea presiunilor pe contur, respectiv continuitatea componentei normale a vitezei.

Se observă că cele două funcţii armonice φ_1 şi φ_2 vor depinde atît de k, cît şi de parametrul ϵ. În plus, parametrul ϵ este conţinut în formă implicită în ecuaţia frontierei, fapt ce îngreunează rezolvarea problemei. Din acest motiv vom folosi o metodă aproximativă de dezvoltare în serie a funcţiilor φ_1 şi φ_2 după puterile lui k şi ϵ.

Vom căuta deci φ_1 şi φ_2 sub forma:

$$\varphi_1 = \varphi_{100} + \epsilon\varphi_{110} + k\varphi_{101} + \epsilon^2\varphi_{120} + k^2\varphi_{102} + \epsilon k\varphi_{111} + \ldots, \tag{2.7}$$

$$\varphi_2 = k(\varphi_{200} + \epsilon\varphi_{210} + k\varphi_{201} + \epsilon^2\varphi_{220} + k^2\varphi_{202} + \epsilon k\varphi_{211} + \ldots). \tag{2.8}$$

Pentru φ_2 admitem dezvoltarea sub forma dată conform cu cele expuse în [7]. Întrucît condiţiile de racordare introduc dificultăţi de rezolvare, pentru liniarizarea acestor condiţii vom dezvolta $r = R[1 + \epsilon f(\theta)]$ în serie Taylor după parametrul ϵ în jurul punctului $r = R$ şi vom ţine cont de acest lucru în expresiile operatorilor care intervin. Identificînd (vezi anexa) puterile de acelaşi ordin găsim următoarea succesiune de probleme Neumann şi Dirichlet. Vom lucra în coordonate polare.

$$\Delta\varphi_{100} = 0, \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\infty} \text{grad } \varphi_{100} = V_0 \cos\theta_r\vec{i} + V_0 \sin\theta_\theta\vec{i}, \\ \dfrac{\partial \varphi_{100}}{\partial r} = 0 \qquad \text{pentru } r = R, \end{cases} \tag{2.9'}$$

$$\Delta\varphi_{200} = 0, \qquad (k') \tag{2.10}$$

$$-\rho g\,\varphi_{200} = \rho_0 + \rho\frac{v_0^2}{2} - \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \varphi_{100}}{\partial \theta}\right)^2\right] \text{ pentru } r = R, \tag{2.10'}$$

$$\Delta\varphi_{101} = 0, \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\infty} \text{grad } \varphi_{101} = 0, \qquad (k) \\ \dfrac{\partial \varphi_{101}}{\partial r} = \dfrac{\partial \varphi_{200}}{\partial r} \qquad \text{pentru } r = R, \end{cases} \tag{2.11'}$$

$$\Delta\varphi_{201} = 0, \qquad (k^2) \tag{2.12}$$

$$-\rho g\varphi_{201} = -\frac{\rho}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta} \qquad \text{pentru } r = R \tag{2.12'}$$

$$\Delta\varphi_{110} = 0, \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\infty} \operatorname{grad}\varphi_{110} = 0, & (\epsilon') \\ \dfrac{\varphi_{110}}{\partial r} = \dfrac{f'}{R}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta} - Rf\dfrac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2} & \text{pentru } r = R, \end{cases} \tag{2.13'}$$

$$\Delta\varphi_{210} = 0, \qquad (\epsilon') \tag{2.14}$$

$$-\rho g\varphi_{210} = \frac{gf}{R^2}\left(\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta^2}\right)^2 - \frac{\rho}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta} \qquad \text{pentru } r = R, \tag{2.14'}$$

$$\Delta\varphi_{120} = 0, \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\infty} \operatorname{grad}\varphi_{120} = 0 & (\epsilon^2) \\ \dfrac{\partial\varphi_{120}}{\partial r} = \dfrac{f'}{R}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{110}}{\partial r} - Rf\dfrac{\partial^2\varphi_{110}}{\partial r^2} - 2\dfrac{ff'}{R}\dfrac{\varphi_{100}}{\partial\theta} & \text{pentru } r = R, \end{cases} \tag{2.15'}$$

$$\Delta\varphi_{220} = 0, \tag{2.16}$$

$$-\rho g\varphi_{220} = \rho g\left[Rf\frac{\partial\varphi_{210}}{\partial r} + \frac{R^2f^2}{2}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{200}}{\partial r^2}\right] - \qquad (\epsilon^2)$$

$$-\frac{\rho}{2}\left[R^2f\cdot\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2}\right)^2 + \frac{f^2}{R^2}\left(\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\right)^2 +$$

$$+ Rf^2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^3\varphi_{100}}{\partial r^1\partial\theta} + 2Rf\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r} + \qquad \text{pentru } r = R, \tag{2.16'}$$

$$+\frac{2f}{R}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{110}}{\partial r\partial\theta} - 4\frac{f}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\theta\partial} +$$

$$+\frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{120}}{\partial\theta}$$

$$\Delta\varphi_{111} = 0, \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\infty} \text{grad}\ \varphi_{111} = 0, \\ \dfrac{\partial\varphi_{111}}{\partial r} = Rf\dfrac{\partial\varphi_{200}}{\partial r} + \dfrac{\partial\varphi_{210}}{\partial r} - Rf\dfrac{\partial^2\varphi_{101}}{\partial r^2} + \quad \text{pentru } r = R, \\ \qquad + \dfrac{f'}{R}\dfrac{\partial\varphi_{101}}{\partial r} \end{cases} \tag{2.17'}$$

$$\Delta\varphi_{211} = 0, \tag{2.18}$$

$$\begin{cases} -\rho g\varphi_{211} = \rho g Rf\dfrac{\partial\varphi_{201}}{\partial r} - \dfrac{\rho}{2}\left[2Rf\cdot\dfrac{\partial^2\varphi_{101}}{\partial r} + \right. \\ + 2\dfrac{f}{R}\dfrac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial^2\varphi_{101}}{\partial r\,\partial\theta} - 4\dfrac{f}{R^2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta} + \\ + 2\dfrac{\partial\varphi_{101}}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{101}}{\partial r} + \dfrac{2}{R}\dfrac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta} + \quad \text{pentru } r = R. \\ \left. + \dfrac{2}{R^2}\dfrac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{111}}{\partial\theta} + \dfrac{2}{R^2}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}\right. \end{cases} \tag{2.18'}$$

Se observă că cunoașterea primelor aproximații determină complet aproximațiile imediat următoare. Pentru a exemplifica acest lucru vom rezolva un caz particular.

3. APLICAȚIE

Să considerăm în formulele de mai sus $f = -\sin^2\theta$. Am făcut această alegere pentru a arăta că într-un caz particular ($k = 0$), cazul cilindrului impermeabil) vom cădea peste soluția din [2], iar pentru $\epsilon = 0$ (cazul cilindrului nedeformat) vom obține soluțiile din [7]. Fie deci

$$\partial D_\epsilon : r = R\,[1 - \sin^2\theta\cdot\epsilon]. \tag{3.1}$$

Din punct de vedere fizic cilindrul dat reprezintă o primă aproximație pentru un cilindru cu baza o elipsă. Vom calcula numai aproximațiile de ordin zero și unu. Așadar, pentru φ_{100} și φ_{200} care verifică relațiile :

$$\Delta\varphi_{100} = 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\infty} \text{grad}\ \varphi_{100} = V_0\cos\theta\,\vec{i}_r + V_0\sin\theta\,\vec{i}_\theta, \\ \dfrac{\partial\varphi_{100}}{\partial r} = 0 \qquad \text{pentru } r = R \end{cases} \tag{3.2'}$$

şi

$$\Delta\varphi_{200} = 0, \tag{3.3}$$

$$-\rho g\,\varphi_{200} = p_0 + \rho\frac{v_0^2}{2} - \frac{\rho}{2}\left[\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\right)^2\right] \quad \text{pentru } r = R \tag{3.3'}$$

găsim :

$$\varphi_{100} = V_0\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta, \tag{3.4}$$

$$\varphi_{200} = -\frac{1}{\rho g}\left(p_0 - \frac{1}{2}\rho V_0^2\right) - \frac{V_0^2 r^2}{gR^2}\cos 2\theta. \tag{3.5}$$

În φ_{100} recunoaştem soluţia din cazul mişcării unui fluid perfect incompresibil în jurul unui cilindru impermeabil. Observăm că φ_{200} din (3.5) coincide cu soluţia din [7]. Să calculăm acum φ_{110}, φ_{100}, φ_{210}, φ_{201}. Pentru φ_{101} găsim ecuaţiile :

$$\Delta\varphi_{101} = 0 \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r} = -\frac{2V_0^2}{gR}\cos\theta \quad \text{pentru } r = R, \tag{3.6'}$$

cu soluţia

$$\varphi_{101} = \frac{V_0^2 R^2}{g^2 r^2}\cos 2\theta. \tag{3.7}$$

Odată cunoscut φ_{101} putem determina φ_{201}. Într-adevăr,

$$\Delta\varphi_{201} = 0, \tag{3.8}$$

$$-\rho g\varphi_{201} = -\frac{4\rho}{gR}V_0^3\sin\theta\sin 2\theta \quad \text{pentru } r = R, \tag{3.8'}$$

care are soluţia

$$\varphi_{201} = -\frac{2V_0^3}{g^2 r}\left[\cos\theta - \left(\frac{R}{r}\right)^2\cos 3\theta\right]. \tag{3.9}$$

Atît φ_{101}, cît şi φ_{201} coincid cu aproximaţiile de acelaşi ordin din [7]. Trecem la determinarea lui φ_{110} şi φ_{210}. Pentru φ_{110} avem :

$$\Delta\varphi_{110} = 0, \tag{3.10}$$

$$\lim_{\infty}\operatorname{grad}\varphi_{110} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r} = 4V_0\cos\theta\sin^2\theta \quad \text{pentru } r = R, \tag{3.10'}$$

şi atunci

$$\varphi_{110} = \frac{3V_0R^2}{2r}\cos\theta - \frac{V_0R^4}{2r^3}\cos 3\theta, \tag{3.11}$$

soluţie care în absenţa mediului poros coincide cu aproximaţia de ordin unu a problemei tratate în [2].

Să determinăm acum φ_{210}. Cu:

$$\Delta\varphi_{210} = 0, \tag{3.12}$$

$$-\rho g\varphi_{210} = V_0^2\rho\left[\frac{3}{2}\cos 4\theta - 4\cos 2\theta + \frac{7}{2}\right], \tag{3.12'}$$

găsim

$$\varphi_{210} = -\frac{3V_0^2}{2g}r^4\cos 4\theta + \frac{4V_0^2}{g}r\cos 2\theta - \frac{7}{2g}, \tag{3.13}$$

care însă nu mai are corespondent în nici una din problemele generalizate.

În acest fel am determinat aproximaţiile de ordin zero şi unu.

ANEXĂ

Condiţiile de frontieră (2.4) — (2.5) implică dezvoltarea după parametrul mic ϵ a unor expresii de forma $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}$, unde f şi g sînt funcţii scalare oarecare, toate exprimate în coordonate polare.

Aşadar, dacă

$$\partial D_\epsilon : r = R[1 + \epsilon f(\theta)], \tag{1}$$

iar $\vec{i}_r$ $\vec{i}_\theta$ sînt versorii normalei $\vec{n}$ la curbă,

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}}\vec{i}_n + \frac{\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}}\vec{i}_\theta, \text{ şi în plus} \tag{2}$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{i}_n + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{i}_\theta, \tag{3}$$

după calcule simple obținem

$$\operatorname{grad}\varphi|_{r=R}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\epsilon Rf\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\epsilon^2\frac{R^2f^2}{2}\frac{\partial^3\rho}{\partial r^2\partial\theta}+\ldots\right)\vec{i}_r+$$

$$+\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}+\frac{\epsilon}{R}\left(Rf\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}-f\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\right. \tag{4}$$

$$\left.+\frac{\epsilon^2}{R}\left(f^2\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-Rf^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta}\right)+\frac{R^2f^2}{2}\frac{\varphi^3\varphi}{\partial r\partial\theta}+\ldots\right]\vec{i}_\theta,$$

$$\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\epsilon\left(Rf\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\right.$$

$$+Rf\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{R}f\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\theta}-\frac{f}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+$$

$$\left.+\frac{f}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{f}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\epsilon^2\left(\frac{R^2f^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cdot\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial\theta}+R^2f^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\right.$$

$$+\frac{R^2f^2}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^2\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{f^2}{R^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{f^2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta}+ \tag{5}$$

$$+\frac{Rf^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial^3\psi}{\partial r^2\partial\theta}+f^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\theta}-$$

$$-\frac{f^2}{R}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{f^2}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial\theta}+$$

$$+\frac{f^2}{R^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{f^2}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}+$$

$$\left.+\frac{f^2}{2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^2\partial\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+0\,(\epsilon^3),$$

și, de asemenea, cu

$$\vec{n}=\left(1-\frac{\epsilon^2}{2}f'+\ldots\right)\vec{i}_r+(\epsilon^2ff'-\epsilon f'+\ldots)\vec{i}_\theta, \tag{6}$$

avem

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \epsilon\left(Rf\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} - \frac{f'}{R}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \tag{7}$$

$$+ \epsilon^2\left(\frac{f'^2}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 2\frac{ff'}{R}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - ff'\frac{\partial^2\psi'}{\partial r\partial\theta}\right) + \ldots.$$

Folosind (5), (6) și (7) în dezvoltările (2.7) și (2.8) introducîndu-le în (2.4) — (2.6) și efectuînd calculele, prin identificare sîntem conduși la relațiile generale următoare:

$$p_0 + p\frac{V_0^2}{2} - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\right)^2\right] = -\rho g\varphi_{200}, \quad (\epsilon^0) \tag{8}$$

$$-\frac{\rho}{2}\left[Rf\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2} - 2\frac{f}{R^2}\left(\frac{\partial f_{100}}{\partial\theta}\right)^2 + 2\frac{f}{R}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r\partial\theta} +\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta}\right] = -\rho g\left(\varphi_{210} + Rf\frac{\partial\varphi_{200}}{\partial r}\right), (\epsilon^2) \tag{9}$$

$$-\frac{\rho}{2}\left[2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r} + \frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}\right] = -\rho g\varphi_{20}, \quad (k') \tag{10}$$

$$-\frac{\rho}{2}\left[R^2f^2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial^3\varphi_{100}}{\partial r\,\partial\theta} + R^2f^2\left(\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2}\right)^2 + \frac{f^2}{R^2}\left(\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\right)^2 +\right.$$

$$+ Rf^2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^3\varphi_{100}}{\partial r^2\,\partial\theta} - 4\frac{f^2}{R}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^3\varphi_{100}}{\partial r\,\partial\theta} + f^2\left(\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r\,\partial\theta}\right)^2 +$$

$$+ 2Rf\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2} + 2Rf\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r} + \frac{2f}{R}\frac{\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{110}}{\partial r\,\partial\theta} - \tag{11}$$

$$- 4\frac{f}{R^2}\cdot\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta} + \frac{2f}{R}\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r\,\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta} + 2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\frac{\partial\varphi_{120}}{\partial\theta} +$$

$$\left. + \frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{120}}{\partial\theta}\right] = -\rho g\left[\varphi_{220} + Rf\frac{\partial\varphi_{210}}{\partial r} + \frac{R^2f^2}{2}\frac{\partial^2\varphi_{200}}{\partial r^2}\right] (\epsilon^2)$$

$$\left\{ -\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r^2}\right)^2+\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}\right)^2+ \right.\right. \tag{12}$$

$$\left.\left. +2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{102}}{\partial r}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{102}}{\partial\theta}\right]=-\rho g\varphi_{202},\right.$$

$$-\frac{\rho}{2}\left[2Rf\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{101}}{\partial r^2}+2Rf\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r}+2\frac{f}{R}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial^2\varphi_{101}}{\partial r\,\partial\theta}-\right.$$

$$-4\frac{f}{R^2}\cdot\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}+2\frac{f}{R}\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}+2\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r}\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r}+ \tag{13}$$

$$+\frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}+2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{111}}{\partial r}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial\theta}+$$

$$\left.+2\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}+\frac{2}{R^2}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}\cdot\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial\theta}\right]=-\rho g\left(Rf\frac{\partial\varphi_{201}}{\partial r}+\varphi_{211}\right],\quad(\in k)$$

$$\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}=0,\qquad(\in^{\circ}) \tag{14}$$

$$Rf\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r^2}-\frac{f'}{R}\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}+\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r}=0,\qquad(\in') \tag{15}$$

$$\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_{200}}{\partial r},\qquad(k') \tag{16}$$

$$\frac{\partial\varphi_{102}}{\partial r}=\frac{\partial\varphi_{201}}{\partial r},\qquad(\mathrm{k}^2) \tag{17}$$

$$\left\{\frac{f'^2}{2}\cdot\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial r}+2\frac{ff'}{R}\cdot\frac{\partial\varphi_{100}}{\partial\theta}-ff'\frac{\partial^2\varphi_{100}}{\partial r\,\partial\theta}+Rf\frac{\partial^2\varphi_{110}}{\partial r^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{f'}{R}\frac{\partial\varphi_{110}}{\partial r}+\frac{\partial\varphi_{120}}{\partial r}=0,\right. \qquad(\in^2) \tag{18}$$

$$Rf\frac{\partial^2\varphi_{101}}{\partial r^2}-\frac{f'}{R}\frac{\partial\varphi_{101}}{\partial r}+\frac{\partial\varphi_{111}}{\partial r}=Rf\frac{\partial\varphi_{200}}{\partial r}+\frac{\partial\varphi_{210}}{\partial r}\qquad(\in k) \tag{19}$$

Primită la redacție la 9 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. I. G. Barenblatt, V. M. Entov, V. M. Rijic, *Teoria nestaționarnii filtrații jidcosti i gaza*, Izdatelistvo „Nedra" Moskva, 1972.
2. P. Brădeanu, *Mecanica fluidelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976.
3. J. D. Cole, *Metodi vosmuşcenii v priclanoi matematike*, Iz. „Mir" Moskva, 1972.
4. E. D. Van Dyke, *Perturbation methods in fluids mechanics*, Academic Press, New-York, 1964.
5. H. Ene, S. Gogonea, *Probleme de teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1973.
6. St. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
7. — *Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase*, Edit. Academiei, București, 1969.
8. M. A. Guseinzade, A. K. Kolosovskaia, *Uprughi regim v odnorodni hi mnogoplastovîh sistemah*, Iz. „Nedra" Moscva, 1972.
9. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, București—Paris, 1959.
10. A. Naifef, *Metodi vosmuscenii*, Iz. „Mir" Moscva, 1976.
11. I. V. Nemîş, D. I. Cernopiski *Necatorie asisimetricintie granicinîie zadaci statiki poperecinovo gofrirovanth nogoslointh țilindrov*, Prikl — Meh., *6* (1978).
12. T. Oroveanu, *Curgerea fluidelor prin medii neomogene*, Edit. Academiei, București.

CONSIDERAȚII ASUPRA REGIMULUI TERMIC ÎN MIȘCAREA GAZELOR PRIN CONDUCTE

T. OROVEANU și AL. D. STAN
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se prezintă mai întîi modul de calcul al proprietăților fizice ale unui gaz cu mai mulți componenți, rezultatele fiind apoi utilizate la stabilirea variației temperaturii în lungul unei conducte prin care se transportă un asemenea gaz. Calculele efectuate pentru un caz concret indică o diferență între cazul „izoterm" și cel „neizoterm", așa cum sînt definite acestea în lucrare. Între variantele „neizoterme", calculele indică diferențe nesemnificative din punct de vedere practic.

1. INTRODUCERE

Pentru transportul gazelor printr-o conductă, prezintă importanță stabilirea regimului termic exact în lungul acesteia. Problema este studiată în prezenta lucrare în care se utilizează relațiile de transfer de căldură cunoscute în literatură [1], [3], [4], [5]. Debitul de gaze și compoziția acestora sînt apropiate de acelea dintr-un exemplu tratat în altă lucrare [3]. Proprietățile fizice ale gazelor au fost stabilite conform indicațiilor din lucrările [2], [5], [6], iar calculele numerice au fost efectuate pe un calculator electronic FELIX C-256.

2. CALCULUL PROPRIETĂȚILOR FIZICE MEDII ALE GAZELOR

În cele ce urmează a fost considerată următoarea compoziție a gazelor care se transportă printr-o conductă: CO_2, N_2, H_2O, CH_4, C_2H_6, C_3H_8, C_4H_{10}, C_5H_{12}. Fracțiile volumice de participare a acestor componenți la amestec, precum și modul de calcul al unor proprietăți fizice în funcție de temperatură sînt redate în anexă.

În calculele efectuate, s-a considerat că proprietățile fizice și anume densitatea, viscozitatea, căldura specifică și conductivitatea termică depind numai de temperatură. Valorile acestor proprietăți, pentru amestec, au fost calculate așa cum se arată în continuare.

2.1. DENSITATEA AMESTECULUI

Pentru determinarea densității amestecului de gaze se utilizează formula

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i, \tag{1}$$

unde ρ_i este densitatea componentului i, a cărui fracţie volumică în amestec este x_i, n fiind numărul de componenţi din amestec (în cazul exemplului de calcul considerat n a fost egal cu 8).

2.2. VISCOZITATEA DINAMICĂ

Conform indicaţiilor din literatura de specialitate [5], viscozitatea dinamică a unui amestec cu mai mulţi componenţi se determină din formula

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} Q_{ij} \frac{x_j}{x_i}}, \tag{2}$$

în care μ_i este viscozitatea dinamică a componentului i, x_i şi x_j fracţiile molare ale componenţilor i, respectiv j, iar coeficienţii Q_{ij} sînt funcţii de viscozitatea dinamică şi de greutăţile moleculare M_i şi M_j ale componenţilor i şi j şi anume

$$Q_{ij} = \frac{\left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_j}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_j}{M_i}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^2}{2\sqrt{2}\left(1 + \frac{M_i}{M_j}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

2.3. CAPACITATEA CALORICĂ

Valoarea capacităţii calorice la presiune constantă C_p a amestecului se calculează din formula

$$C_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_{pi} x_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i M_i}, \tag{4}$$

unde C_{pi} este capacitatea calorică a componentului i, celelalte notaţii fiind precizate la punctul precedent.

2.4. CONDUCTIVITATEA TERMICĂ

Pentru un amestec avînd n componenţi, conductivitatea termică rezultă din formula

$$\lambda = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i M_i^{\frac{1}{3}}\right]}{\sum_{i=1}^{n} x_i M_i^{\frac{1}{3}}}, \tag{5}$$

λ_i fiind conductivitatea termică a componentului i. În ceea ce privește celelalte notații din (5), semnificațiile lor sînt cele precizate mai înainte.

3. REGIMUL TERMIC DIN CONDUCTĂ

Prin considerații elementare expuse în literatura de specialitate, se ajunge la formula

$$T_x = T_s + (T_0 - T_s)\, e^{-\frac{k}{\rho Q C_p} x}, \tag{6}$$

în care T_x este temperatura medie din secțiunea transversală a unei conducte de gaze, la o distanță x față de secțiunea de intrare. Cu T_s este notată temperatura mediului în care se află conducta, de obicei solul, cu ρ masa specifică a gazului și cu Q debitul de volum. Semnificația notațiilor C_p și T_0 este cunoscută, iar k este un coeficient global de transmisie a căldurii, determinat cu ajutorul formulei

$$k = \frac{\pi}{\frac{1}{\alpha D_i} + \frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{D_e}{D_i} + \frac{1}{2\lambda_s} \ln \frac{4H}{D_e}}. \tag{7}$$

în care α reprezintă coeficientul de transmisie a căldurii prin convecție de la gaze la peretele interior al conductei, λ_0 conductivitatea termică a materialului din care sînt confecționate țevile și λ_s conductivitatea termică a mediului din jurul conductei, respectiv a solului. Cu D_i este notat diametrul interior al conductei, cu D_e diametrul exterior al acesteia și cu H adîncimea la care este îngropată conducta, măsurată pînă la axa acesteia. În formula (7) s-a presupus că nu există un înveliș protector al conductei, modificarea ce intervine în acest caz fiind neesențială.

După cum se știe, coeficientul α poate fi determinat din formula

$$\alpha = \frac{\mathcal{N}u \lambda}{D_i}, \tag{8}$$

în care $\mathcal{N}u$ reprezintă numărul lui Nusselt. Pentru determinarea acestuia din urmă, există mai multe relații empirice; una dintre acestea [1], [5] și anume

$$\mathcal{N}u = 0{,}027\, \mathcal{R}e^{0{,}8}\, \mathcal{P}r^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_p}\right)^{0{,}14}, \tag{9}$$

este valabilă pentru gaze, în regim turbulent de mișcare, situație care corespunde realității în problema studiată. Efectul lungimii de intrare termice este neglijat în această formulă, aproximație foarte acceptabilă dată fiind lungimea, de obicei mare, a unei conducte de gaze. Au fost introduse notațiile

$$\mathcal{R}e = \frac{\rho v D_i}{\mu} \tag{10}$$

pentru numărul lui Reynolds și

$$\mathscr{P}r = \frac{\mu C_p}{\lambda} \tag{11}$$

pentru numărul lui Prandtl; în formulele (8), (10) și (11), λ reprezintă conductivitatea termică a gazului, ρ densitatea acestuia, μ viscozitatea lui dinamică, μ_p valoarea acesteia la peretele conductei și v viteza medie din secțiunea transversală.

Principala obiecție care se poate aduce formulei (6) este aceea că mărimile care apar la exponent sînt considerate constante, bineînțeles cu excepția distanței x. Apare deci util să se studieze influența pe care o are dependența de temperatură a mărimilor menționate, asupra variației temperaturii în lungul conductei.

Mai înainte de a întreprinde acest studiu, vom da formulei (6) o formă puțin diferită și anume

$$T_x = T_s + (T_0 - T_s)\, e^{-4C \frac{\mathscr{N}u}{\pi D_i \mathscr{R}e\, \mathscr{P}r} \xi}, \tag{12}$$

unde

$$C = \frac{\pi D_i}{1 + \alpha D_i \left(\frac{1}{2\lambda_0} \ln \frac{D_e}{D_i} + \frac{1}{2\lambda_s} \ln \frac{4H}{D_e} \right)} \tag{13}$$

și

$$\xi = \frac{x}{D_i}. \tag{14}$$

Din considerațiile precedente, rezultă că în (12) numerele $\mathscr{N}u$, $\mathscr{R}e$ și $\mathscr{P}r$ sînt funcții de temperatură și prin urmare calculele trebuie efectuate ținîndu-se seama de această situație.

4. METODA DE CALCUL PROPUSĂ

Pentru studiul problemei au fost considerate cinci variante, adaptate pentru programarea la un calculator electronic, împărțindu-se în acest scop conducta într-un număr de tronsoane de aceeași lungime.

Prima variantă, notată cu a, corespunde cazului „izoterm" în care proprietățile fizice ale gazului, respectiv numerele $\mathscr{N}u$, $\mathscr{R}e$, $\mathscr{P}r$ sînt considerate constante pe întreaga lungime a conductei și calculate pentru valoarea temperaturii la intrarea în primul tronson.

În continuare, au fost considerate alte patru variante, toate corespunzînd cazului „neizoterm", diferind însă între ele prin modul în care a fost considerată dependența de temperatură a proprietăților fizice ale gazului. Astfel, în varianta notată cu b, pentru fiecare tronson, aceste proprietăți, respectiv numerele $\mathscr{N}u$, $\mathscr{R}e$, $\mathscr{P}r$ sînt calculate pentru valoarea

temperaturii în secţiunea iniţială a fiecărui tronson. În varianta notată cu *c*, se procedează în mod asemănător, temperatura la care se calculează valorile numerelor $\mathcal{N}u$, $\mathcal{R}e$ şi $\mathcal{P}r$ fiind însă aceea din secţiunea finală a fiecărui tronson. Pentru a se putea efectua calculele în această variantă este deci necesar să se calculeze mai întîi proprietăţile fizice la valoarea temperaturii din secţiunea iniţială a tronsonului, să se determine apoi temperatura din secţiunea finală şi să se reia calculul cu valorile numerelor $\mathcal{N}u$, $\mathcal{R}e$ şi $\mathcal{P}r$ la această ultimă temperatură.

În varianta notată cu *d*, se determină mai întîi valorile numerelor $\mathcal{N}u$, $\mathcal{R}e$ şi $\mathcal{P}r$ pentru temperatura din secţiunea iniţială a tronsonului şi se calculează apoi temperatura din secţiunea finală a acestuia. Se face apoi media aritmetică a celor două temperaturi şi se recalculează numerele $\mathcal{N}u$, $\mathcal{R}e$, şi $\mathcal{P}r$ pentru valoarea astfel obţinută a temperaturii ; după aceea, se recalculează temperatura din secţiunea finală.

În sfîrşit, în ultima variantă, notată cu *e*, se procedează ca în varianta *d*, cu deosebirea că temperatura medie pentru fiecare tronson. notată cu T_{med}, se obţine din formula

$$T_{med} = \frac{1}{l_t}\int_0^{l_t} T_x \, dx, \tag{15}$$

l_t fiind lungimea tronsonului. Dacă se introduce pentru T_x în această formulă expresia sa (12), rezultă

$$T_{med} = T_s + (T_0 - T_s)\left(1 - e^{-4C\frac{\mathcal{N}u}{\pi D_i \mathcal{R}e\,\mathcal{P}r}\xi_t}\right)\frac{\pi D_i \mathcal{R}e\,\mathcal{P}r}{4C\mathcal{N}u\xi_t}, \tag{16}$$

ξ_t fiind lungimea adimensională a tronsonului, obţinută din (14).

5. REZULTATELE CALCULELOR. CONCLUZII

În exemplul de calcul a fost considerată o conductă cu diametrul interior $D_i = 0{,}513$ m prin care se transportă gaze a căror compoziţie a fost precizată mai înainte. Au fost considerate trei debite şi anume $Q_1 = 1{,}7708$ Nm³/s, $Q_2 = 1{,}9676$ Nm³/s şi $Q_3 = 2{,}1643$ Nm³/s, dar, în cele ce urmează, sînt prezentate numai rezultatele onbţinute pentru primul dintre aceste debite.

Diametrul exterior al conductei a avut valoarea $D_e = 0{,}526$ m, iar pentru adîncimea de îngropare s-a ales $H = 1{,}2$ m. Au mai fost introduse în calcule valorile $\lambda_0 = 48{,}094$ W/m°K şi $\lambda_s = 1{,}4$ W/m°K, considerate constante.

Cu aceste date şi proprietăţile fizice ale gazului calculate aşa cum se arată în anexă, a fost întocmit şi rulat pe un calculator FELIX C-256 programul de calcul pentru determinarea variaţiei temperaturii în lungul conductei.

Calculele au fost efectuate pentru cele cinci variante menţionate mai înainte, pe tronsoane cu lungimea adimensională $\xi_t = 3488{,}4$ ceea ce corespunde, dacă se ţine seama de valoarea diametrului interior D_i,

la o lungime reală de 1785,55 m. Valoarea relativ mare a lui ξ_t a fost aleasă atît pentru a se respecta condiția de valabilitate a relației (9), cît și pentru a obține variații sensibile de temperatură, numărul lui Reynolds avînd o valoare ridicată.

În tabela 1 este indicată secvența operațiilor pe care le execută calculatorul pe primele trei tronsoane ale conductei, pentru cele cinci variante. Semnificația notațiilor din tabelă este reprezentată în figura 1.

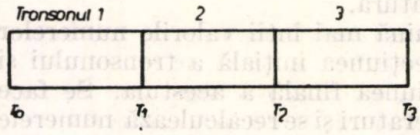


Fig. 1

În figura 2 este redată variația viscozității dinamice în lungul conductei corespunzător celor cinci variante și numai pentru debitul Q_1. În abscisă, s-a notat cu N numărul de tronsoane, iar calculul a fost efectuat pentru primele 11 tronsoane, fiecare avînd lungimea precizată mai înainte.

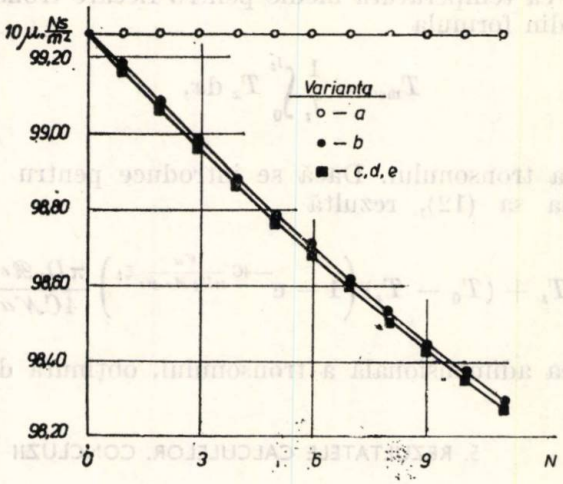


Fig. 2

În figura 3 este reprezentată variația temperaturii în lungul conductei, tot pentru primele 11 tronsoane, numărul acestora fiind notat din nou cu N. Valorile reprezentate corespund debitului Q_1, pentru toate cele cinci variante considerate.

Din examinarea rezultatelor se constată că valorile calculate ale temperaturilor sînt apropiate pentru variantele *b*, *c*, *d* și *e*, toate fiind mai mari decît cele găsite în cazul variantei „izoterme".

În ceea ce privește valorile temperaturilor obținute pentru variantele „neizoterme", se constată că acelea corespunzătoare variantelor *c* și *d* coincid practic și sînt mai mari decît cele corespunzătoare variantei *b*, diferența fiind însă nesemnificativă din punct de vedere tehnic.

Valorile temperaturilor găsite în cazul variantei *e* sînt mai mari decît cele care corespund variantelor *c* și *d*, dar diferențele sînt tot fără importanță deosebită în ceea ce privește calculele practice.

Tabela 1

Varianta	Tronson nr.	Secvența operațiilor efectuate de către calculator pe primele trei tronsoane ale conductei
a	1	$T = T_0$, calculează T_1
	2	$T = T_0$, calculează T_2
	3	$T = T_0$, calculează T_3
b	1	$T = T_0$, calculează T_1
	2	$T = T_1$, calculează T_2
	3	$T = T_2$, calculează T_3
c	1	$T = T_0$, calculează T_1 $T = T_1$, recalculează T_1
	2	$T = T_1$, calculează T_2 $T = T_2$, recalculează T_2
	3	$T = T_2$, calculează T_3 $T = T_3$, recalculează T_3
d	1	$T = T_0$, calculează T_1 $T = (T_0 + T_1)2/$, recalculează T_1
	2	$T = T_1$, calculează T_2 $T = (T_1 + T_2)/2$ recalculează T_2
	3	$T = T_2$, calculează T_3 $T = (T_2 + T_3)/2$, recalculează T_3
e	1	$T = T_0$, calculează T_1 Calculează valoarea medie T_{med} între T_0 și T_1 $T = T_{med}$, recalculează T_1
	2	$T = T_1$, calculează T_2 Calculează valoarea medie T_{med} între T_1 și T_2 $T = T_{med}$, recalculează T_2
	3	$T = T_2$, calculează T_3 Calculează valoarea medie T_{med} între T_2 și T_3 $T = T_{med}$, recalculează T_3

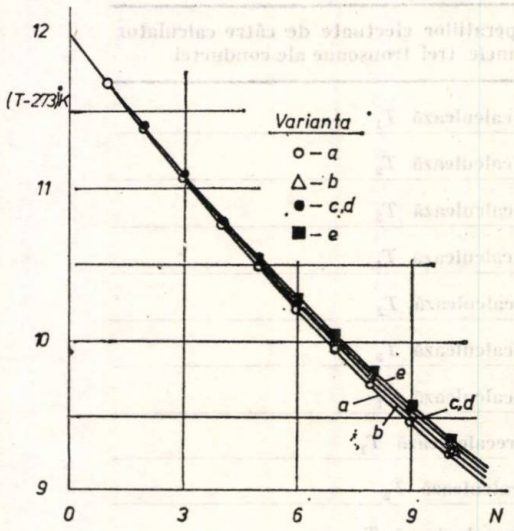


Fig. 3

După părerea noastră, varianta *e* este cea mai exactă, dar dacă ținem seama de faptul că rezultatele nu diferă în mod semnificativ de cele obținute la varianta *d*, aceasta din urmă este de preferat datorită simplității calculelor.

În ceea ce privește soluția prezentată în [3] aceasta este mai apropiată de cazul „izoterm" definit prin varianta *a*.

Așa cum am precizat mai sus, nu am efectuat calculele decît pentru 11 tronsoane deoarece am urmărit numai scopul de a pune în evidență efectul variației proprietăților fizice ale gazului precum și diferențele dintre diferitele variante de calcul adoptate.

ANEXĂ

PROPRIETĂȚILE FIZICE ALE COMPONENȚILOR AMESTECULUI DE GAZE

Fracțiile volumice și greutățile moleculare ale componenților amestecului de gaze sînt prezentate în tabela A1. Aceste valori au fost utilizate în calculele care au fost efectuate pe baza formulelor (1), (2), (3), (4) și (5) din lucrare. Întrucît în aceste formule intervin, pe rînd, și proprietățile fizice ale fiecărui component în funcție de temperatură, arătăm în cele ce urmează cum au fost calculate acestea.

Tabela A1

Component	CO_2	N_2	H_2O	CH_4	C_2H_6	C_3H_8	C_4H_{10}	C_5H_{12}
Fracție volumică	0,20	1,20	1,10	92,20	1,60	1,30	1,30	1,10
Greutate moleculară	44,01	28,02	18,01	16,04	30,07	44,09	58,10	72,20

Astfel, în ceea ce privește densitatea componentului *i*, luăm ca punct de plecare legea gazelor perfecte

$$\frac{p_i}{\rho_i} = RT, \tag{A.1}$$

în care

$$R = \frac{R'}{M_i}, \tag{A.2}$$

R' fiind constanta universală a gazelor și M_i greutatea moleculară a componentului. Cu valoarea cunoscută a constantei R', la presiuni apropiate de aceea atmosferică formula (1) din lucrare ia forma

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i = \frac{10^5}{8314{,}5} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i M_i}{T} \tag{A.3}$$

și poate fi utilizată pentru calculul variației densității amestecului de gaze în funcție de temperatură.

Trecînd acum la viscozitatea dinamică, pentru componenții CO_2, N_2 și H_2O aceasta a fost calculată, în micropoise, din formula [5]

$$\mu = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \alpha_3 T^3 + \alpha_4 T^4 + \alpha_5 T^5. \tag{A.4}$$

Valorile coeficienților $\alpha_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ sînt trecute în tabela A2.

Tabela A2

Component	α_0	$10\,\alpha_1$	$10^4\alpha_2$	$10^7\,\alpha_3$	$10^{11}\,\alpha_4$	$10^{11}\alpha_5$
CO_2	−5,4384	5,9427	−2,5895	0,64557	0	0
N_2	5,2239	7,2345	−5,8131	3,2167	−7,0913	0
H_2O	9,6500	2,9347	0,92109	−0,41666	0	0

În [5] se afirmă că eroarea introdusă în calculul viscozității prin formula (A.4), în comparație cu datele experimentale, nu depășește 1% pentru CO_2, 2% pentru N_2 și 5% pentru H_2O.

Pentru ceilalți componenți, a fost admisă o variație liniară a viscozității dinamice cu temperatura, în intervalul 273°K ÷ 373°K, obținîndu-se astfel formulele [2]

$$\begin{aligned} &CH_4: && \mu = 0{,}32T + 13{,}64, \\ &C_2H_6: && \mu = 0{,}29T + 5{,}83, \\ &C_3H_8: && \mu = 0{,}26T + 3{,}02, \\ &C_4H_{10}: && \mu = 0{,}26T - 2{,}98, \\ &C_5H_{12}: && \mu = 0{,}22T + 5{,}94. \end{aligned} \tag{A.5}$$

În toate aceste formule, dacă se introduce temperaturia în grade Kelvin, viscozitatea dinamică rezultă exprimată în micropoise.

În ceea ce privește capacitatea calorică C_p, s-a admis că și aceasta variază liniar în funcție de temperatură în intervalul 273°K ÷ 373°K.

În conformitate cu datele din [6] pentru CO_2 și din [2] pentru hidrocarburile ciclice saturate, rezultă formulele

$$\begin{aligned}
&CO_2: && C_p = 0{,}00023T + 0{,}1302,\\
&CH_4: && C_p = 0{,}0008T + 0{,}3016,\\
&C_2H_6: && C_p = 0{,}0008T + 0{,}1070,\\
&C_3H_8: && C_p = 0{,}0010T + 0{,}1070,\\
&C_4H_{10}: && C_p = 0{,}0011T + 0{,}0597,\\
&C_5H_{12}: && C_p = 0{,}0011T + 0{,}0698.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Temperatura fiind introdusă în grade Kelvin, din formulele precedente se obține capacitatea calorică la presiune constantă în kcal/kg°K.

Pentru componenții N_2 și H_2O au fost considerate valorile independente de temperatură 0,2465, respectiv 0,5020, exprimate în aceleași unități de măsură ca și mai sus [6].

Și pentru conductivitatea termică s-a considerat o variație liniară în funcție de temperatură în intervalul 273°K ÷ 373°K. Cu ajutorul datelor din [2], rezultă formulele

$$\begin{aligned}
&CO_2: && \lambda = 0{,}197T - 18{,}181,\\
&N_2: && \lambda = 0{,}153T + 15{,}431,\\
&H_2O: && \lambda = 0{,}339T - 67{,}547,\\
&CH_4: && \lambda = 0{,}300T - 6{,}900,\\
&C_2H_6: && \lambda = 0{,}300T - 36{,}900,\\
&C_3H_8: && \lambda = 0{,}200T - 14{,}600,\\
&C_4H_{10}: && \lambda = 0{,}250T - 38{,}250,\\
&C_5H_{12}: && \lambda = 0{,}240T - 33{,}520.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Dacă temperatura se introduce în grade Kelvin, conductivitatea termică rezultă în cal/ms°K.

Observație. În cadrul programului întocmit și ale cărui rezultate au fost prezentate în lucrare, toate mărimile au fost introduse în unități internaționale, prin transformarea corespunzătoare a valorilor obținute din formulele precedente.

Primită la redacție la 25 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. D. Dobrinescu, L. Bulău, *Contribuții la calculul termic al conductelor îngropate*, Petrol și gaze, **20**, 2 (1969).
2. R. W. Gallant, *Physical Properties of Hydrocarbons*, vol. 1, Gulf Publishing Company, Houston, 1968, p. 6, 7, 77, 106, 146.
3. D. Grigorescu, M. Jung, *Deshidratarea gazelor naturale*, Editura Tehnică, București, 1971, p. 56, 57.
4. V. Isachenko, V. Osipova, A. Sukomel, *Heat Transfer*, Mir Publishers, Moscow, 1969, p. 49, 83.
5. M. W. Rohsenow, J. P. Hartnett, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Company, New York, Toronto, London, 1973, p. 2—75, 2—92.
6. N. V. Vargaftik, *Spravocinik po teplofiziceskim svoistvam veşcestv*, Gosenergoizdat, Moskva, 1956, p. 322, 333.

ASUPRA MIȘCĂRILOR NESTAȚIONARE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ PRINTR-UN MASIV POROS NEOMOGEN DE TIPUL III

de MIRCEA T. ORĂȘANU
Liceul nr. 3 Aeronautic București

Prezenta lucrare este o extindere a teoriei hidraulice pentru mișcările nestaționare cu suprafață liberă în medii poroase neomogene de tipul III. Cînd suprafața liberă nu se depărtează prea mult de un plan orizontal $z = z_0$, ecuația suprafeței libere se poate scrie :

$$z = H(x, y, t).$$

În baza teoriei hidraulice și a legii lui Darcy, obținem, pentru funcția necunoscută H, ecuația de ordinul doi neliniară cu derivate parțiale,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x, y)\frac{\partial H^2}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x, y)\frac{\partial H^2}{\partial y}\right]\right\} + \frac{W_0}{m},$$

unde W_0 este viteza verticală pe planul $Z = 0$, dar W_0 conține și alți factori ca, infiltrația sau evaporarea prin suprafața liberă, iar m este porozitatea.
În continuare, se fac o serie de considerații teoretice asupra acestei ecuații pentru forme particulare a coeficientului de filtrație $k = k(x, y)$, iar în final se trec în revistă cîteva aplicații.

1. Un capitol important al hidrogazodinamicii subterane este acela privind mișcarea fluidelor de filtrație cu suprafață liberă prin medii poroase neomogene de tipul III nedeformabile, de porozitate m, deci cînd coeficientul de filtrație k variază de la punct la punct.

Cînd suprafața liberă nu este prea depărtată de un plan orizontal impermeabil, $z = z_0$, ecuația suprafeței libere se poate scrie sub forma [3]

$$z = H(x, y ; t). \tag{1}$$

În ipotezele teoriei hidraulice și a legii lui Darcy [3] proiecțiile vectorului viteză $\vec{v}$ pe planul orizontal sînt :

$$u = -k(x, y)\frac{\partial H}{\partial x}, \qquad v = -k(x, y)\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{2}$$

iar ecuaţia continuităţii are forma

$$w(x, y, z; t) = -z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + w_0(x, y; t), \tag{3}$$

unde w_0 reprezintă viteza verticală pe planul impermeabil $z = 0$, dar în w_0 se pot îngloba şi alţi factori ca infiltraţia sau evaporarea prin suprafaţa liberă.

Pe de altă parte [3]

$$u = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v = m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad w = m\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Atunci, derivînd substanţial egalitatea (1) şi ţinînd seama de (4), deducem

$$m\frac{\partial H}{\partial t} + u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y} - w = 0. \tag{5}$$

Înlocuind în (5) expresia lui w din (3) în care am făcut $z = H$ rezultă în primul rînd:

$$m\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uH) - \frac{\partial}{\partial y}(vH) + w_0. \tag{6}$$

Cu (2) în (6) obţinem, pentru funcţia necunoscută H, ecuaţia cu derivate parţiale neliniară:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x, y)\frac{\partial H^2}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x, y)\frac{\partial H^2}{\partial y}\right]\right\} + \frac{w_0}{m} \tag{7}$$

în ipoteza că funcţia k este cunoscută. Această ecuaţie o generalizează pe cea a lui Boussinesq [1].

Pentru mişcarea paralelă cu planul vertical Oxz vom avea din (7)

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial H^2}{\partial x}\right] + \frac{w_0}{m}, \tag{8}$$

iar în cazul mişcării axial-simetrice cu $r^2 = x^2 + y^2$ deducem

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot k(r)\frac{\partial H^2}{\partial r}\right] + \frac{w_0}{m}. \tag{9}$$

2. În cele ce urmează vom presupune $w_0 = 0$ şi vom căuta soluţii ale ecuaţiilor (8) sau (9) care să satisfacă condiţii la limită corespunză-

toare unor mișcări reale. De la bun început metoda folosită de Boussinesq de obținere a soluției ecuației la care el însuși a ajuns se impune și ecuațiilor (8) și (9). Adică, folosind metoda separării variabilelor, putem lua în primul caz

$$H(x\,;t) = X(x)\cdot T(t) \tag{10}$$

și atunci din (8) rezultă (cu $w_0 = 0$)

$$\frac{T'}{T^2} = \frac{1}{2m}\,\frac{[k(X^2)']'}{X}\,. \tag{11}$$

Ca să obținem o soluție mărginită a acestei ecuații pentru $t > 0$, va trebui ca valoarea comună a rapoartelor să fie o constantă negativă, pe care o vom nota cu $-A^2$, încît din (11) avem

$$T = (C + A^2 t)^{-1} \tag{12}$$

și ecuația diferențială neliniară de ordinul doi,

$$[k\cdot(X^2)']' + 2mA^2X = 0, \tag{13}$$

a cărei necunoscută este X, în cazul cînd dependența dintre k și x este dată. Înainte de a indica modul de rezolvare a ecuației (13) vom cere ca în [1] $T(0) = 1$. Atunci, din (12) rezultă $C = 1$. În ceea ce privește constanta A^2, care apare în ecuația (13), și deci în soluția acesteia, vom impune condițiile $X(L) = H_0$, unde H_0 este cota suprafeței libere în punctul de abscisă $x = L$. Soluția astfel găsită a ecuației (8) ($w_0 = 0$) capătă aceeași interpretare ca și cea a lui Boussinesq [1]; adică, reprezintă mișcarea într-un mediu poros în care avem un dren orizontal, practic punctual în originea O și un perete impermeabil vertical la distanța L de această origine. În ceea ce privește ecuația (13) am putea să o rezolvăm considerînd k apriori necunoscut dar cunoscînd dependența lui X față de k. Revenind în (13), rezultă

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\mathrm{d}k^2}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}X^2}{\mathrm{d}k}\right] + 4mA^2X = 0. \tag{14}$$

Ecuația (14) va fi o ecuație diferențială de ordinul doi în care funcția necunoscută va fi k. Odată găsită soluția din (14) se poate determina ușor și $X = X(k)$.

Exemplu. Să presupunem că $X(k) = k$. Atunci din (14) deducem:

$$\frac{\mathrm{d}^2k^3}{\mathrm{d}x^2} + 3mA^2k = 0, \tag{15}$$

deci (15) este o ecuație diferențială de ordinul doi neliniară pe care o mai scriem sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k^2\cdot\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}\right) + mA^2k = 0. \tag{15'}$$

În ipoteza cînd $k = k(x)$ este bijectivă, deci admite funcția inversă $x = x(k)$, ecuația (15′) se transformă într-una diferențială în care necunoscuta este x și argumentul k,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \cdot \left(k^2 \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k}} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k}} + mA^2 k = 0. \tag{16}$$

Punînd

$$S = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}k}}, \tag{17}$$

din (16) avem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(k^2 \cdot S)S + mA^2 k = 0, \tag{18}$$

a cărei soluție generală este

$$S = \frac{\sqrt{mA^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{H_0^4 - k^4}}{k^2}, \tag{19}$$

unde am notat $H_0^4 = \dfrac{k}{mA^2}$, k fiind o constantă ce apare la integrarea ecuației (18). Ținînd seama de (17) și de felul cum am ales pe k, din (19) găsim imediat :

$$x = \frac{2}{\sqrt{mA^2}} \int_0^X X_1^2 (H_0^4 - X_1^4)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}X_1 \cdot + K_1. \tag{20}$$

Cum $x(0) = 0$, constanta K_1 ia valoarea zero. Cînd $X = H_0$, din (20) obținem

$$L = \frac{2}{\sqrt{mA^2}} \cdot \int_0^{H_0} X_1^2 (H^4 - X_1^4)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}X_1 \tag{21}$$

sau, folosind funcția beta a lui Euler,

$$B(p, q) = \int_0^1 S^{p-1} (1 - S)^{q-1} \, \mathrm{d}S, \tag{22}$$

din (21) rezultă

$$\sqrt{mA^2} = \frac{H_0}{2L} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right). \tag{23}$$

Întorcîndu-ne cu acest rezultat în (20), deducem

$$x = \frac{4L}{B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)H_0} \cdot \int_0^X X^2 \left(H_0^4 - X_1^4\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}X_1. \tag{24}$$

Ținînd seama de valoarea $B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) \Big/ 4 \approx 0{,}75$ și introducînd variabilele $\frac{x}{L} = x_0$ și $\frac{X}{H_0} = X_0$, egalitatea (24) capătă forma

$$x_0 = 1{,}33 \cdot \int_0^{X_0} Y^2 (1 - Y^4)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}Y. \tag{24'}$$

Întrucît funcția $x_0 = x_0(X_0)$ este bijectivă, atunci există și funcția inversă $X_0 = f(x_0)$ sau

$$X = H_0 f\left(\frac{x}{L}\right). \tag{25}$$

Cu (10), (12) și (25) obținem, pentru ecuația (8) ($w_0 = 0$),

$$H = \frac{H_0 f\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + 2{,}25 \frac{H_0^2}{mL^2} t}. \tag{26}$$

Cînd $t = 0$, avem $H = H_0 \cdot f\left(\frac{x}{L}\right)$, iar pentru $t \to \infty$, $H \to 0$.

În ceea ce privește graficul funcției $X_0 = f\left(\frac{x}{L}\right)$ aceasta se poate trasa folosind același procedeu ca în [4].

Aplicînd formula care exprimă debitul [4],

$$q(x\,;t) = -k(x)\, H(x\,;t) \frac{\partial h}{\partial x}, \tag{27}$$

rezultă

$$q(x, t) = -\frac{H_0^3}{L} \frac{f^2\left(\frac{x}{L}\right) \cdot f'\left(\frac{x}{L}\right)}{\left(1 + 2{,}25 \cdot \frac{H_0^2}{mL^2} \cdot t\right)^3}. \tag{27'}$$

Dacă ţinem seama de (15′) şi de semnificaţia lui k, pentru debitul drenei deducem

$$q = 5{,}89\, H^3 L^{-1}\left(1 + 2{,}25\,\frac{H_0^2}{mL^2}\cdot t\right)^{-3}. \tag{28}$$

Un raţionament analog este posibil pentru ecuaţia (9) urmînd metoda lui Iu. D. Sokolov [5].

3. O altă aplicaţie a ecuaţiei (8), cînd $w_0 = 0$, este aceea pentru descrierea mişcării fluidelor neomogene, în particular cînd un lichid se răspîndeşte deasupra unui lichid mai greu. Rezultatele obţinute de L. A. Galin, Z. F. Korpîceva şi A. R. Skirici în [2] pot fi generalizate aici. Aplicarea ecuaţiei (8), adică, în fond, a teoriei hidraulice, este justificată dacă $u \geqslant v$ în cazul mişcării plane şi $v_r \geqslant v_z$ în cazul mişcării simetrice (unde v_r este componenta lui v în lungul razei vectoare r, iar v_z este componenta în lungul lui Oz a aceluiaşi vector). Se va presupune că potenţialul vitezelor în lichidul mai greu, care se află sub limita de lichid a cărui mişcare o studiem, este nul.

Vom presupune că lentila de lichid este simetrică faţă de axa Oy astfel încît ea este cuprinsă între $-a(t) < x < a(t)$ şi $y = h(x)$, iar $y = -bh(x)$, unde b este o constantă ce va trebui determinată (fig. 1).

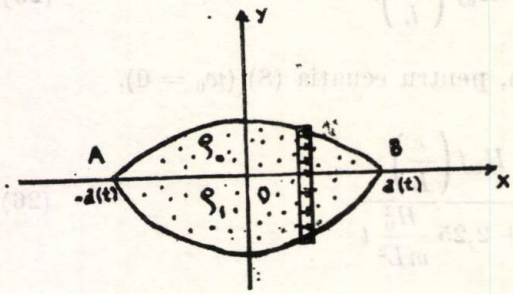


Fig. 1

Să scriem $H = 0$ într-un punct din D de pe frontiera comună a celor două fluide:

$$\frac{p}{\rho_1 g} - bh(x) = 0,$$

deci

$$p = \rho_1 gbh(x). \tag{29}$$

Impunînd continuitatea presiunii cînd traversăm frontiera ADB, vom avea

$$h(x) = \frac{\rho_1 bh(x)}{\rho_0} - bh(x), \tag{30}$$

de unde

$$b = \frac{\rho_0}{\rho_1 - \rho_0}. \tag{31}$$

După ipotezele făcute, lichidul care se găseşte la momentul iniţial deasupra axei Ox, se va găsi tot timpul deasupra ei, şi deci pentru studiul mişcării lentilei este suficient să studiem mişcarea lichidului ce se găseşte deasupra axei Ox, ca şi cum aceasta ar reprezenta un perete impermeabil. Scriind ecuaţia (8) în variabilele adimensionale,

$$X = xa_0^{-1},\ U = hh_0^{-1},\ T = h_0k_0(2ma_0^2)^{-1}t,\ \frac{k}{k_0} = K, \tag{32}$$

unde h_0 și a_0 sînt valorile inițiale ale lui h_{max} și a, avem de rezolvat ecuația (k_0 = valoarea lui $k(x)$ pentru mediul omogen)

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial X}\left[K(X)\frac{\partial U^2}{\partial X}\right], \tag{33}$$

cu condiția inițială

$$U(X, 0) = U_0(X). \tag{34}$$

Să căutăm pe U_0 sub forma

$$U_0(X) = 1 - g(X) \text{ dacă } -1 < X,\ g(X) < 1, \tag{35}$$

iar pe $U(X, T)$ îl luăm astfel

$$U(X, T) = \beta(T)\cdot[\alpha^2(T) - g(X)] \text{ dacă } -\alpha < X,\ g(X) < \alpha,\ \alpha > 1. \tag{36}$$

Calculînd cantitatea de fluid din lentilă, care este constantă în decursul mișcării, rezultă

$$2\int_0^1 [1 - g(X)]\,dX = 2\cdot\int_0^{\alpha(T)} \beta(T)[\alpha^2(T) - g(X)]\,dX. \tag{37}$$

De aici avem

$$\beta(T) = \frac{M(T) + N}{\alpha^3(T)}, \tag{38}$$

unde

$$M(T) = \beta(T)\int_0^{\alpha(T)} g(X)\,dX,\quad N = 1 - \int_0^1 g(X)\,dX. \tag{39}$$

Cu (38) în (36) deducem:

$$U(X, T) = \frac{M(T) + N}{\alpha^3(T)}[\alpha^2(T) - g(X)]. \tag{40}$$

Derivînd (40) în raport cu T apoi în raport cu X și înlocuind rezultatele în (33), obținem

$$\left[\frac{M(T) + N}{\alpha(T)}\right]' - \left[\frac{M(T) + N}{\alpha^3(T)}\right]' g(X) =$$

$$= -\frac{[M(T) + N]^2}{\alpha^6(T)}\{2\alpha^2(T)\,[K(X)\,g'(X)]' - [K(X)\cdot(g^2(X))']\}. \tag{41}$$

Pentru (41) căutăm soluţii de forma

$$M(T) + N = \alpha^{\frac{n-2}{n}}, \tag{42}$$

$$g(X) = X^n, \tag{43}$$

unde $n \in (0, +\infty)$.

Atunci, din aceeaşi ecuaţie cu (42) şi (43), ajungem, pentru $\alpha(T)$ şi $K(X)$, la ecuaţiile diferenţiale:

$$\alpha^{\frac{n-2}{n}} \cdot \alpha' = 2n, \tag{44}$$

$$[K(X) \cdot X^{n-1}]' = \frac{2}{n}, \tag{45}$$

ale cărei soluţii sînt, respectiv,

$$\alpha(T) = [4(n+1)T + C]^{\frac{n}{2(n+1)}}, \tag{46}$$

$$K(X) = \frac{2}{n} X^{2-n}. \tag{47}$$

Evident, $n \neq 0$, iar constanta C este egală cu unitatea dacă impunem condiţia iniţială.

Revenind cu (46), (43) în (40), deducem

$$U(X, T) = [1 + 4(n+1)T]^{-1} \{[1 + 4(n+1)T]^{\frac{n}{n+1}} - X^n\}. \tag{48}$$

Cînd $n = 2$, sîntem în cazul mişcării fluidelor neomogene printr-un mediu omogen, caz tratat în [2]. Trecînd egalitatea (48) la vechile variabile date de (32), obţinem

$$h(x, t) = h_0 \left[1 + \frac{2(n+1) h_0 t}{m a_0^2}\right]^{-1} \cdot \left\{\left[1 + \frac{2(n+1) h_0 t}{m a_0^2}\right]^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{x}{a_0}\right)^n\right\}. \tag{49}$$

Pentru $a(t)$ avem expresia

$$a(t) = a_0 \left[1 + \frac{2(n+1) h_0 t}{m a_0^2}\right]^{\frac{n}{2(n+1)}}, \tag{50}$$

iar pentru maximul suprafeţei libere

$$h_{\max} = h_0 \left[1 + \frac{2(n+1) h_0 t}{m a_0^2}\right]^{-\frac{1}{n+1}}. \tag{51}$$

Din (50) şi (51) găsim

$$(h_{\max})^{\frac{n}{2}} \cdot a(t) = h_0^{\frac{n}{2}} \cdot a_0. \tag{52}$$

De asemenea, ţinînd seama de ultima egalitate (32) şi de cea din (47), rezultă

$$k(x) = \frac{2}{n} k_0 \left(\frac{x}{a_0}\right)^{2-n}. \tag{53}$$

Cînd $n \to \infty$, din (53) ar rezulta $k(x) = 0$, ceea ce corespunde faptului că mediul este impermeabil.

Într-un asemenea mediu nu există mişcare, fapt confirmat şi de expresia lui h din (49).

Dacă vom considera mişcarea axială simetrică, introducînd

$$Y = ra_0^{-1}, \tag{54}$$

şi păstrînd celelalte notaţii din (32), avem de rezolvat ecuaţia ($w_0 = 0$)

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial Y} \left[Y \cdot K(Y) \cdot \frac{\partial U^2}{\partial Y} \right]. \tag{9'}$$

Luînd pentru U_0 expresia (35) cu Y în loc de X, iar pentru U expresia (36) cu aceeaşi înlocuire, calculînd volumul de lichid la un moment oarecare şi la momentul iniţial, găsim

$$\beta(T) = \frac{M(T) + N}{\alpha^4(T)}, \tag{55}$$

unde

$$M(T) = 2\,\beta(T) \int_0^{\alpha(T)} Y g(Y)\,dY, \tag{56}$$

$$N = 1 - 2 \cdot \int_0^1 Y \cdot g(Y)\,dY. \tag{57}$$

După introducerea lui U în (9'), procedînd ca în cazul mişcării unidimensionale, avem

$$\alpha(T) = [1 + 4(n+2)T]^{\frac{n}{2(n+2)}} \quad n \in (0, +\infty) \tag{58}$$

şi după revenirea la variabilele iniţiale

$$k(r) = \frac{2k_0}{n} \left(\frac{r}{a_0}\right)^{2-n}, \tag{59}$$

$$h(t, r) = h_0 \left[1 + \frac{2(n+2)\,k_0 h_0 t}{m a_0^2}\right]^{-1} \left\{ \left[1 + \frac{2(n+2)\,k_0 h_0 t}{m a_0^2}\right]^{\frac{n}{n+2}} - \left(\frac{r}{a_0}\right)^n \right\}. \tag{60}$$

Pentru $a(t)$ și $h_{\max}(t)$ obținem, respectiv,

$$a(t) = a_0 \cdot \left[1 + \frac{2(n+2)\, k_0 h_0 t}{m a_0^2}\right]^{\frac{n}{2(n+2)}}, \tag{61}$$

$$h_{\max}(t) = h_0 \left[1 + \frac{2(n+2)\, k_0 h_0 t}{m a_0^2}\right]^{-\frac{2}{n+2}}, \tag{62}$$

deci $a(t) \cdot \sqrt[n]{h_{\max}(t)} = a_0 \cdot \sqrt[n]{h_0}$.
Cînd $n = 2$ obținem cazul clasic.

Primită la redacție la 26 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. J. Boussinesq, *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrés dans le sol* J. Math. Pures et Appl. ser. 5, **X**, *1*, 5 (1904).
2. L. A. Galin, Z. F. Karpîceva, A. R. Skirici, *Rastekanie linzi gruntovîh vod*, Prikl. mat. i meh., **24**, *3*, 559 (1960).
3. St. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
4. P. Ia. Polubarinova-Kocina, *Teoria dvijenia gruntovîh vod*, Moscva, 1952.
5. Iu. D. Sokolov *O necotorîh ceasinîh reșeniah uravnenia Boussinesq*, Ucr. Mat. J., **VIII**, *I* 54 (1956).

ALGORITME PENTRU CALCULUL POZIȚIONAL ȘI CINEMATIC AL MECANISMELOR FORMATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE BINARE, UTILIZATE ÎN PROGRAMUL GENERAL CINCINET

de N. MANAFI, S. CONONOVICI
Institutul de fizică și tehnologia materialelor

Lucrarea este prima dintr-o serie avînd ca obiectiv prezentarea principiilor și algoritmelor care au stat la baza elaborării programului general CINCINET destinat calculului cinematic și cineostatic automatizat al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare.
Se prezintă mai întîi o serie de considerente generale avute în vedere la elaborarea programului, urmate de scurtă descriere a acestuia.
Sînt prezentate în continuare algoritmele de calcul pozițional și cinematic, elaborate de autori, incluse integral în programul CINCINET. Datorită formei în care au fost sistematizate, aceste algoritme se pretează și utilizării lor pe minicalculatoare programabile și neprogramabile.

1. GENERALITĂȚI ASUPRA REALIZĂRII DE PROGRAME DE CALCUL ÎN DOMENIUL PROIECTĂRII ASISTATĂ DE CALCULATOR A MECANISMELOR

În cadrul proiectării asistată de calculator a mecanismelor și mașinilor o pondere însemnată o deține calculul cinematic și dinamic, atît ca obiectiv în sine, cît și ca mijloc de verificare și ajustare a soluțiilor oferite de sinteza cantitativă și calitativă prin aproximații succesive.

În condițiile în care cercetările în domeniul teoriei mecanismelor furnizează metode analitice moderne și eficiente, iar problema preciziei și rapidității este rezolvată de tehnica de calcul electronic, realizarea de programe în domeniul menționat, considerate ca instrumente de lucru indispensabile în activitatea de proiectare, este oportună și necesară, constituind preocuparea a numeroase colective de cercetare din țară și străinătate.

Indiferent de metodele teoretice de tratare utilizate, se pot pune în evidență anumite cerințe care trebuie avute în vedere la elaborarea unor astfel de programe. Se consideră necesar ca un program să întrunească următoarele calități:

— să aibă un caracter de generalitate pentru a acoperi un număr cît mai mare de probleme din domeniul respectiv;

— să poată fi ușor utilizat de către proiectant, fără a fi necesar ca acesta să posede cunoștințe speciale de programare sau să-și însușească metodele și algoritmele care au stat la baza elaborării programului, pentru a-i permite concentrarea eforturilor în activitatea de concepție și proiectare propriu-zisă; această cerință poate fi asigurată, de exemplu, prin atașarea la program a unui limbaj specializat în care utilizatorul să-și formuleze problema de calcul în termeni uzuali, familiari lui;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 2, 1979, P. 219–236

— să furnizeze rezultatele calculului într-o formă direct utilizabilă, cît mai apropiată de necesităţile procesului de proiectare;

— să permită dialogul comod între proiectant şi calculator prin intermediul echipamentelor interactive din dotarea calculatoarelor:

— să poată fi rulat, integral sau prin segmentare, pe calculatoare de capacitate mică şi mijlocie care au în prezent o largă răspîndire;

— să fie compatibil cu o gamă cît mai largă de calculatoare;

— să fie extensibil sub aspectul posibilităţilor şi performanţelor;

— să poată fi corelat şi cu alte programe utilitare din domeniul proiectării.

2. SCURTĂ PREZENTARE A PROGRAMULUI CINCINET

În conformitate cu cerinţele generale expuse mai înainte, autorii au elaborat programul general CINCINET destinat, în această ediţie, calculului cinematic şi cinetostatic complet al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare (diadele assurice).

Programul a fost astfel conceput încît să permită rezolvarea sub aspect cinematic şi cinetostatic a oricărui mecanism din categoria amintită, numărul diadelor şi elementelor conducătoare din configuraţia sa structurală nefiind limitat. Numărul de poziţii şi domeniul din ciclul cinematic pentru care se poate face calculul sînt opţionale.

Programului CINCINET îi este ataşat un limbaj specializat, compus dintr-un număr redus de tipuri de enunţuri pentru formularea problemei de calcul. Sintaxa acestor enunţuri este simplă şi comod de utilizat, termenii întrebuinţaţi fiind uzuali. Descrierea în detaliu a limbajului, a modului de organizare şi utilizare a programului CINCINET va face obiectul unor articole ulterioare.

În funcţie de opţiunile utilizatorului, programul furnizează rezultatele calculului cinematic şi cinetosatic sub formă tabelară şi grafică. Existenţa limbajului asociat permite conversaţia dintre utilizator şi calculator prin intermediul echipamentelor interactive.

Programul are o concepţie modulară şi este segmentabil în funcţie de capacitatea calculatorului utilizat. Este compatibil cu toate calculatoarele care au compilator FORTRAN IV.

În continuare se face o succintă prezentare a algoritmelor utilizate în secţiunea de calcul poziţional şi cinematic a programului CINCINET, algoritmele pentru calculul cinetosatic urmînd a fi publicate într-un articol ulterior.

3. ASPECTE STRUCTURALE ŞI DIMENSIONALE ÎN DESCRIEREA MECANISMELOR PLANE

Mecanismele plane în componenţa cărora intră numai diade şi elemente conducătoare pot fi descrise pornind de la schemele lor cinematice, în cadrul cărora fiecărei cuple de rotaţie (R) sau translaţie (T) i se ataşează cîte un *identificator* literal, numeric sau alfanumeric.

Schema cinematică a mecanismului considerat se raportează la un sistem general de referinţă xOy convenabil ales.

a). — *Diadele* (planşele 1 ÷ 7) pot fi descrise fiecare printr-o tripletă de identificatori, notaţi convenţional α, β, γ, în care β este atribuit

cuplei interioare, iar α și γ *cuplelor potențiale* de legătură cu elementele conducătoare, baza mecanismului sau alte diade. În conformitate cu succesiunea aleasă a identificatorilor, tipul (aspectul) diadei poate fi precizat printr-o combinație literală specifică după cum urmează:

RRR — aspect 1 TRT — aspect 4
RTR — aspect 2 RTT — aspect 5, varianta 1
TRR — aspect 3, varianta 1 TTR — aspect 5, varianta 2
RRT — aspect 3, varianta 2

În general, primul dintre identificatori (α) poate fi atribuit oricăreia dintre cuplele potențiale. Face excepție diada RTR pentru care se convine ca α să fie atribuit cuplei potențiale R solidară cu cupla interioară T (planșa 2).

Unificînd notațiile [1] și ținînd cont de succesiunea identificatorilor, fiecărei diade îi va corespunde un anumit număr de date dimensionale indicate, din grupul general (l_1, l_2, ψ, ν_1, ν_2), specificate explicit în planșele $1 \div 7$; sînt indicate în aceste planșe și variantele dimensionale acceptate și neacceptate. Pentru unghiuri se indică un sens de măsură și se consideră pozitive dacă acesta corespunde sensului trigonometric.

Cunoscînd pozițiile la un moment dat ale cuplelor potențiale α și γ (sau ale suporturilor lor de translație în cazul că sînt de tipul T), cu aceleași date dimensionale, pentru fiecare din diadele RRR, RTR, TRR, și RRT se pot realiza două construcții geometrice diferite pozițional și funcțional. Din acest motiv a apărut necesitatea introducerii unui parametru definitor distinct, care a fost denumit *indice de contur* și notat prin $k_1 = \pm 1$. Acest parametru care intervine în calculul pozițional, precizează poziția diadei respective în raport cu poziția sa critică. Pozițiile critice ale diadelor se definesc în modul următor (planșele $1 \div 5$):

— diada RRR — α, β, γ în linie;
— diada RTR — proiecțiaB a punctului α pe direcția $\gamma\beta$ coincide cu γ;
— diada TRR — β,γ în linie cu proiecția A a punctului β pe direcția $\alpha^*\alpha$;
— diada RRT — α,β în linie cu proiecția C a punctului β pe direcția $\gamma^*\gamma$;
— diada TRT — punctul β este în linie cu proiecțiile sale A și C pe direcțiile $\alpha^*\alpha$ și respectiv $\gamma^*\gamma$.

Diada TRT, deși este univoc determinată dimensional, poate ajunge în poziție critică atunci cînd suporturile de translație ale cuplelor potențiale α și γ devin paralele.

Pentru determinarea valorii indicelui de contur k_1 s-a stabilit o regulă simplă, ușor de utilizat. Pornind de la schema cinematică a mecanismului desenată într-o poziție oarecare (de exemplu în poziția inițială), pentru fiecare din diadele menționate se parcurge un anumit contur geometric, după cum urmează:

— RRR, RTR — conturul $\alpha \to \beta \to \gamma$;
— TRR — conturul $A \to \beta \to \gamma$;
— RRT — conturul $\alpha \to \beta \to C$.

Dacă sensul de parcurgere al conturului coincide cu sensul trigonometric, atunci $k_1 = +1$. Contrar, $k_1 = -1$.

Pentru diada RTR indicele de contur k_1 nu este suficient pentru a-i preciza poziția în raport cu cea critică, întrucît la o distanță între

punctele α și γ impusă, pentru același k_1, proiecția punctului α pe direcția $\gamma\beta$ se poate afla de o parte sau alta a punctului γ. Din acest motiv, numai pentru această diadă, a fost introdus un *indice de contur suplimentar* notat prin $k_2 = \pm 1$, a cărui valoare se stabilește în același mod ca și pentru k_1, parcurgînd însă conturul $\alpha \rightarrow B \rightarrow \gamma$.

Pentru diadele TRT, RTT și TTR indicele de contur nu este necesar, pozițiile lor find univoc determinate prin datele dimensionale indicate.

În vederea calculului poziționa1 și cinematic al unei diade, pentru cuplele potențiale de tip R este necesară cunoașterea coordonatelor x și y la momentul considerat, iar pentru cuplele potențiale de tip T poziția suportului de translație, precizată prin coordonatele x* și y* ale unui punct de pe suport și prin unghiul λ dintre direcția pozitivă a axei Ox și cea a suportului. În funcție de configurația mecanismului aceste date poziționale se determină pornind de la elementele conducătoare și parcurgînd diadele într-o anumită succesiune.

b). — *Elementele conducătoare* (planșa 8) pot fi descrise fiecare prin succesiunea a doi identificatori, notați convențional α,β, primul fiind atribuit legăturii la bază. Ca și la diade, tipul elementului conducător, generator al mișcării mecanismului, poate fi precizat printr-o combinație literală specifică, în concordanță cu succesiunea identificatorilor, după cum urmează:

GRR — manivelă,
GRT — manivelă cu culisă,
GTR — culisă cu articulație,
GTT — culisă cu suport de translație.

În planșa 8 sînt indicați parametrii caracteristici fiecărui tip de element conducător.

În cazul general, un mecanism oarecare poate fi acționat printr-un anumit număr de elemente conducătoare de același tip sau de tipuri diferite. Deși fiecare din acestea poate avea o lege de mișcare proprie independentă, bine definită, pentru determinarea mișcării mecanismului este necesară o anumită corelare. Această corelare se poate realiza prin indicarea valorilor parametrilor poziționali și cinematici la un moment dat, într-o poziție de referință care poate fi de exemplu *poziția inițială*, pentru toate elementele conducătoare ale mecanismului.

c). — *Legăturile la bază ale diadelor* (planșa 9), în cazul că există, trebuie specificate explicit, spre deosebire de cele ale elementelor conducătoare care sînt implicite. Ele se descriu printr-un singur identificator, notat convențional α, identic cu identificatorul α sau γ al diadei respective. În funcție de tipul cuplei cinematice respective, tipul legăturii se definește literal în modul următor:

PFR — punct fix de rotație,
DFT — direcție fixă de translație.

Parametrii caracteristici sînt dați în planșa 9.

4. GENERAREA MIȘCĂRII MECANISMULUI

Calculul poziționa1 și cinematic al unui mecanism se efectuează în funcție de un parametru variabil independent căruia i se atribuie valori discrete a căror succesiune trebuie să acopere în cazul general întregul

ciclu cinematic. Acest parametru, denumit în continuare *parametru generator al mișcării generalizat* și notat prin T, poate fi timpul (t) sau parametrul poziţional (φ sau s) al unuia dintre elementele conducătoare, convenabil ales și denumit *element conducător de referință.*

În particular, calculul se poate executa și pe domenii mai mici sau mai mari decît un ciclu cinematic, pornind dintr-o *poziție de start* (T_s), care poate coincide sau nu cu poziţia de referinţă inițială (T_0), și ajungînd într-o *poziție finală* (T_f). Alegînd pentru T un pas de variaţie p constant (care poate fi Δt, $\Delta\varphi$, Δs), va rezulta un anumit număr N de poziții distincte ale mecanismului, pentru care se face calculul (planșa 10).

Întrucît în configuraţia unui mecanism se pot găsi simultan mai multe tipuri diferite de elemente conducătoare, determinarea unei poziții curente a acestora se face prin intermediul unui parametru comun, respectiv timpul necesar trecerii dintr-o poziție în alta, indiferent de natura parametrului generator generalizat T. În planșa 10 este prezentat în detaliu modul în care, pornind de la parametrii corespunzători poziției inițiale a fiecărui element conducător, se calculează mai întîi parametrii poziției de start și, în continuare, cei ai poziției curente din domeniul de analiză preconizat. Sînt prevăzute și situaţiile în care, datorită decelerării, mișcarea elementului conducător de referinţă încetează.

5. CALCULUL POZIȚIONAL AL MECANISMULUI

În funcție de tipul fiecărui element conducător, pentru o poziție curentă oarecare (φ sau s), se pot calcula în continuare parametrii poziţionli ai conexiunilor β ale acestora cu diadele antrenate. Relaţiile respective sînt date în planșa 8.

Se poate trece în continuare la calculul poziţional al tuturor diadelor din configuraţia mecanismului, determinîndu-se unghiurile de poziție ale elementelor și lungimilor acelor elemente care servesc ca suport cuplelor de translaţie interioare sau potențiale.

În baza utilizării *metodei contururilor vectoriale* [1, 2], au fost stabilite algoritmele pentru calculul poziţional al tuturor diadelor, prezentate în planșele 1 ÷ 7.

Luînd în considerare cazul general al unui mecanism complex avînd un număr determinat de elemente conducătoare și de diade, calculul poziţional începe prin rezolvarea tuturor elementelor conducătoare, pornind de la cel de referinţă. Pentru diade ordinea logică de rezolvare este următoarea :

— diadele legate la un element conducător și bază,
— diadele legate la două elemente conducătoare,
— diadele legate la un element conducător și o diadă rezolvată,
— diadele legate la o diadă rezolvată și bază,
— diadele legate la două diade rezolvate.

În baza acestei ordini se poate stabili pentru orice mecanism *șirul succesiunii diadelor* (SSD), care în cadrul programului CINCINET se determină automat prin analiza conexiunilor. Pentru efectuarea calculului poziţional și cinematic diadele se rezolvă în ordinea dată de SSD.

6. CALCULUL CINEMATIC AL UNEI DIADE

Parametrii cinematici care se calculează pentru o diadă oarecare, indiferent de tipul (aspectul) acesteia, pot fi grupați în modul următor:

— *parametri cinematici standard*, respectiv coordonatele, vitezele și accelerațiile cuplelor potențiale, vitezele și accelerațiile unghiulare ale fiecărui element (planșa 11);

— *parametrii cinematici ai punctelor și direcțiilor atașate* elementelor diadei (planșa 12). Punctele atașate pot fi atît *puncte de interes*, cît și *puncte de conexiune* pentru cuplele potențiale R ale altor diade. Direcțiile atașate reprezintă suportul de translație al cuplelor potențiale T ale altor diade.

Relațiile generale pentru calculul parametrilor cinematici standard ai unei diade oarecare într-o poziție dată sînt prezentate în planșa 11. În aceste relații intervin derivatele în raport cu parametrul generator generalizat T ale coordonatelor cuplelor potențiale și ale unghiurilor de poziție ale elementelor diadei. În cadrul programului CINCINET, pentru calculul acestor derivate se utilizează *metoda diferențelor finite* [5]. Pentru folosirea relațiilor specifice acestei metode (planșa 11) este necesară efectuarea unui calcul pozițional extins pentru valorile T, T−2h, T−h, T+h, T+2h ale parametrului generator generalizat, T fiind valoarea curentă a acestuia. *Pasul de derivare* h, de aceiași natură cu T, este diferit de pasul de variație p al parametrului generator în domeniul de analiză. În timp ce valoarea pasului *p* este opțională în funcție de numărul de poziții pentru care se dorește efectuarea calculului, valoarea pasului h influențează direct precizia determinării derivatelor, aceasta fiind cu atît mai mare cu cît h este mai mic. În cazul în care T este φ sau s, derivatele sale în raport cu timpul sînt luate de la elementul conducător de referință considerat.

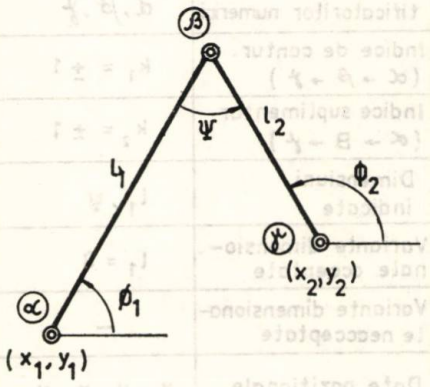
Parametrii poziționali ai punctelor și direcțiilor atașate unui element al diadei (planșa 12) se raportează la un sistem de coordonate local a cărui origine coincide cu centrul geometric al cuplei potențiale a elementului și a cărui axă X este suprapusă direcției acestuia. Pentru un punct oarecare, avînd un identificator notat convențional δ, se calculează parametrii cinematici cu relațiile din planșa 12. Dacă punctele și direcțiile atașate servesc numai conectării altei diade, δ fiind una din cuplele potențiale ale acesteia, este suficientă calcularea parametrilor poziționali ai conexiunii corespunzător celor 5 valori învecinate ale parametrului generator T, întrucît parametrii lor cinematici devin parametri standard și se calculează la diada conectată.

Primită la redacție la 13 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, D. Larionescu, *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane*, Ed. Academiei, București, 1968.
2. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, Ed. Academiei, București, 1967.
3. N. Manafi, *Contribuții la analiza dinamică a mecanismelor plane*, Teză de doctorat, Institutul Politehnic București, 1976.
4. S. Cononovici, *Simularea pe calculatorul electronic*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, *1*, 1976.
5. P. C. Wang, *Metode numerice și matriceale în mecanica construcțiilor, cu aplicații la calculatoare*, Edit. Tehnică, București, 1970.

CINCINET	DIADA DE ASPECT 1 (RRR)	planșa 1



Definire literală a tipului diadei	RRR
Succesiunea identificatorilor numeriei	α, β, γ
Indice de contur ($\alpha \to \beta \to \gamma$)	$k_1 = \pm 1$
Indice de contur suplimentar	-
Dimensiuni indicate	l_1, l_2
Variante dimensionale acceptate	-
Variante dimensionale neacceptate	$l_1 = 0,\ l_2 = 0$
Date poziționale	x_1, y_1, x_2, y_2
Parametri calculați	Φ_1, Φ_2

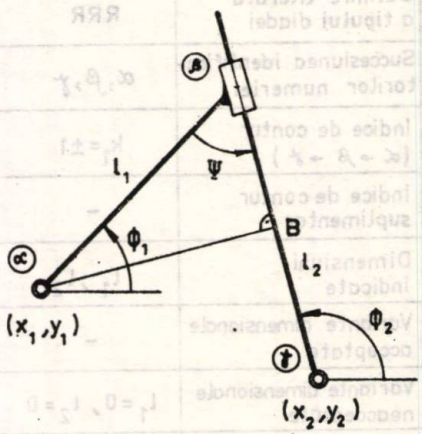
ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

1	$d_x = x_2 - x_1$
2	$d_y = y_2 - y_1$
3	$d^2 = d_x^2 + d_y^2$
4	$\cos\Psi = (l_1^2 + l_2^2 - d^2)/2l_1 l_2$
5	$\sin\Psi = -k_1\sqrt{1-\cos^2\Psi}$
6	$\cos\Phi_1 = [(l_1 - l_2\cos\Psi)d_x - l_2\sin\Psi \cdot d_y]/d^2$
7	$\sin\Phi_1 = [(l_1 - l_2\cos\Psi)d_y + l_2\sin\Psi \cdot d_x]/d^2$
8	$\cos\Phi_2 = \cos\Phi_1\cos\Psi - \sin\Phi_1\sin\Psi$
9	$\sin\Phi_2 = \sin\Phi_1\cos\Psi + \cos\Phi_1\sin\Psi$

Protecție	$1-\cos^2\Psi \begin{cases} < 0 & \text{deschiderea lanțului cinematic} \\ = 0 & \text{poziție critică } (\Psi = 0, \pi) \end{cases}$
Observații	$k_1 = +1$ conturul $\alpha \to \beta \to \gamma$ parcurs în sens trigonometric pozitiv

Planșa 1

CINCINET	DIADA DE ASPECT 2 (RTR)	planșa 2



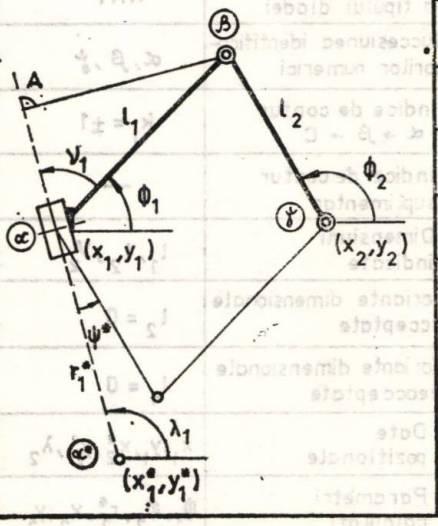
Definire literală a tipului diadei	RTR
Succesiunea identificatorilor numerici	α, β, γ
Indice de contur ($\alpha \to \beta \to \gamma$)	$k_1 = \pm 1$
Indice suplimentar ($\alpha \to B \to \gamma$)	$k_2 = \pm 1$
Dimensiuni indicate	l_1, Ψ
Variante dimensionale acceptate	$l_1 = 0$
Variante dimensionale neacceptate	—
Date pozitionale	x_1, y_1, x_2, y_2
Parametri calculați	ϕ_1, ϕ_2, l_2

ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

1	$d_x = x_2 - x_1$
2	$d_y = y_2 - y_1$
3	$d^2 = d_x^2 + d_y^2$
4	$l_2 = l_1 \cdot \cos\Psi + k_1 k_2 \sqrt{d^2 - l_1^2 \cdot \sin^2\Psi}$
5	$\cos\phi_1 = [(l_1 - l_2\cos\psi)\cdot d_x - l_2 \sin\psi \cdot d_y] / d^2$
6	$\sin\phi_1 = [(l_1 - l_2\cos\psi)\cdot d_y + l_2 \sin\psi \cdot d_x] / d^2$
7	$\cos\phi_2 = \cos\phi_1 \cos\psi - \sin\phi_1 \sin\psi$
8	$\sin\phi_2 = \sin\phi_1 \cos\psi + \cos\phi_1 \sin\psi$

Protecție	$d^2 - l_1^2 \sin^2\psi \begin{cases} < 0 & \text{deschiderea lanțului cinematic} \\ = 0 & \text{poziție critică } (\gamma \text{ coincide cu } B) \end{cases}$
Observații	$k_1 = +1$ conturul $\alpha \to \beta \to \gamma$ } parcurs în sens trigonometric pozitiv $k_2 = +1$ conturul $\alpha \to B \to \gamma$ } α atribuit cuplei R solidară cu cupla T $\Psi = \widehat{\alpha\beta\gamma} < \pi$ măsurat de la elementul $\alpha\beta$ spre elementul $\gamma\beta$ ($\Psi > 0$ pentru sens trigonometric pozitiv)

CINCINET	DIADA DE ASPECT 3, VARIANTA 1 (TRR)	planșa 3



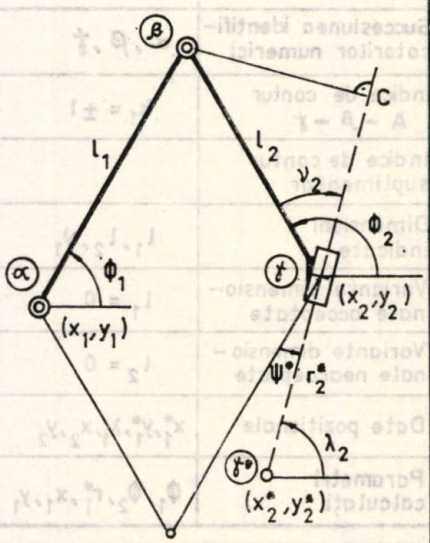
Definirea literală a tipului diadei	TRR
Succesiunea identificatorilor numerici	α, β, γ
Indice de contur $A \to \beta \to \gamma$	$k_1 = \pm 1$
Indice de contur suplimentar	
Dimensiuni indicate	l_1, l_2, ν_1
Variante dimensionale acceptate	$l_1 = 0$
Variante dimensionale neacceptate	$l_2 = 0$
Date poziționale	$x_1^*, y_1^*, \lambda_1, x_2, y_2$
Parametri calculați	$\varphi_1, \varphi_2, r_1^*, x_1, y_1$

ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

1	$\cos\varphi_1 = \cos\lambda_1 \cos\nu_1 + \sin\lambda_1 \sin\nu_1$		
2	$\sin\varphi_1 = \sin\lambda_1 \cos\nu_1 - \cos\lambda_1 \sin\nu_1$		
3	$d_x^* = x_2 - x_1^* - l_1 \cos\varphi_1$		
4	$d_y^* = y_2 - y_1^* - l_1 \sin\varphi_1$		
5	$\sin\psi^* = (d_x^* \sin\lambda_1 - d_y^* \cos\lambda_1) / l_2$		
6	$\cos\psi^* = -k_1 \sqrt{1 - \sin^2\psi^*}$		
7	$r_1^* = d_x^* \cos\lambda_1 + d_y^* \sin\lambda_1 + l_2 \cos\psi^*$		
8	$\cos\varphi_2 = \cos\lambda_1 \cos\psi^* - \sin\lambda_1 \sin\psi^*$	10	$x_1 = x_1^* + r_1^* \cos\lambda_1$
9	$\sin\varphi_2 = \sin\lambda_1 \cos\psi^* + \cos\lambda_1 \sin\psi^*$	11	$y_1 = y_1^* + r_1^* \sin\lambda_1$

Protecție	$1 - \sin^2\psi^*$	< 0 desfacerea lanțului cinematic $= 0$ poziție critică (A, β, γ în linie)
Observații	$k_1 = +1$ conturul $A \to \beta \to \gamma$ parcurs în sens trigonometric ν_1 măsurat de la elementul $\alpha\beta$ la prelungirea $\alpha^*\alpha$ ($\nu_1 > 0$ pentru sens trigonometric pozitiv)	

CINCINET	DIADA DE ASPECT 3, VARIANTA 2 (RRT)	planșa 4



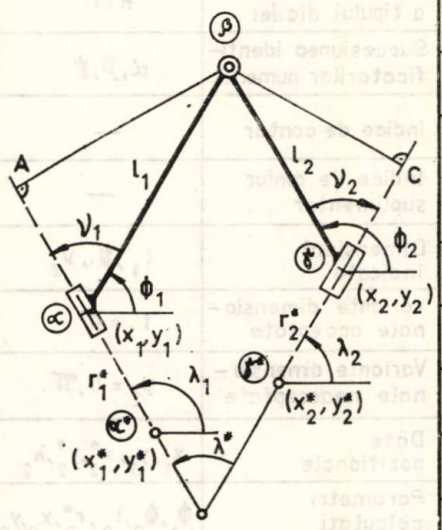
Definirea literala a tipului diadei	RRT
Succesiunea identificatorilor numerici	α, β, γ
Indice de contur $\alpha \to \beta \to C$	$k_1 = \pm 1$
Indice de contur suplimentar	—
Dimensiuni indicate	l_1, l_2, ν_2
Variante dimensionale acceptate	$l_2 = 0$
Variante dimensionale neacceptate	$l_1 = 0$
Date poziționale	$x_1, y_1, x_2^*, y_2^*, \lambda_2$
Parametri calculați	$\Phi_1, \Phi_2, r_2^*, x_2, y_2$

ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

1	$\cos\Phi_2 = \cos\lambda_2 \cos\nu_2 + \sin\lambda_2 \sin\nu_2$		
2	$\sin\Phi_2 = \sin\lambda_2 \cos\nu_2 - \cos\lambda_2 \sin\nu_2$		
3	$d_x^* = x_2^* - x_1 + l_2 \cos\Phi_2$		
4	$d_y^* = y_2^* - y_1 + l_2 \sin\Phi_2$		
5	$\sin\psi^* = (d_x^* \sin\lambda_2 - d_y^* \cos\lambda_2) / l_1$		
6	$\cos\psi^* = -k_1 \sqrt{1 - \sin^2\psi^*}$		
7	$r_2^* = l_1 \cos\psi^* - d_x^* \cos\lambda_2 - d_y^* \sin\lambda_2$		
8	$\cos\Phi_1 = \cos\lambda_2 \cos\psi^* + \sin\lambda_2 \sin\psi^*$	10	$x_2 = x_2^* + r_2^* \cos\lambda_2$
9	$\sin\Phi_1 = \sin\lambda_2 \cos\psi^* - \cos\lambda_2 \sin\psi^*$	11	$y_2 = y_2^* + r_2^* \sin\lambda_2$

Protecție	$1 - \sin^2\psi^* \begin{cases} < 0 & \text{deschiderea lanțului cinematic} \\ = 0 & \text{poziție critică } (\alpha, \beta, C \text{ în linie}) \end{cases}$
Observații	$k_1 = +1$ conturul $\alpha \to \beta \to C$ parcurs în sens trigonometric ν_2 măsurat de la elementul $\gamma\beta$ la prelungirea $\gamma^*\gamma$ ($\nu_2 > 0$ în sens trigonometric)

CINCINET	DIADA DE ASPECT 4 (TRT)	planșa 5



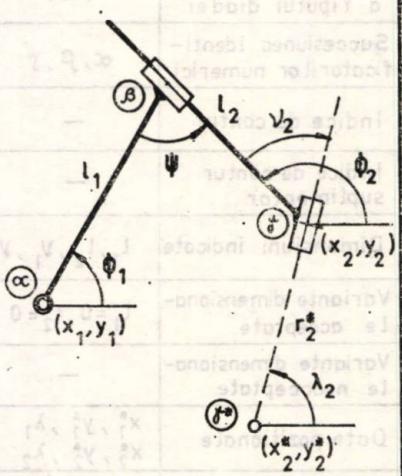
Definire literală a tipului diadei	TRT
Succesiunea identificatorilor numerici	α, β, γ
Indice de contur	—
Indice de contur suplimentar	—
Dimensiuni indicate	l_1, l_2, ν_1, ν_2
Variante dimensionale acceptate	$l_1 = 0, l_2 = 0$
Variante dimensionale neacceptate	—
Date poziționale	x_1^*, y_1^*, λ_1 x_2^*, y_2^*, λ_2
Parametri calculați	$\phi_1, \phi_2, r_1^*, r_2^*$ x_1, y_1, x_2, y_2

ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

1	$\cos\phi_1 = \cos\lambda_1 \cos\nu_1 + \sin\lambda_1 \sin\nu_1$	10	$\sin\lambda^* = \sin\lambda_1 \cos\lambda_2 - \cos\lambda_1 \sin\lambda_2$
2	$\sin\phi_1 = \sin\lambda_1 \cos\nu_1 - \cos\lambda_1 \sin\nu_1$	11	$r_1^* = [(d_x - d_x^*)\sin\lambda_2 - (d_y - d_y^*)\cos\lambda_2] / \sin\lambda^*$
3	$\cos\phi_2 = \cos\lambda_2 \cos\nu_2 + \sin\lambda_2 \sin\nu_2$		
4	$\sin\phi_2 = \sin\lambda_2 \cos\nu_2 - \cos\lambda_2 \sin\nu_2$	12	$r_2^* = r_1^* \cos\lambda^* + (d_x - d_x^*)\cos\lambda_2 + (d_y - d_y^*)\sin\lambda_2$
5	$d_x = l_1 \cos\phi_1 - l_2 \cos\phi_2$		
6	$d_y = l_1 \sin\phi_1 - l_2 \sin\phi_2$	13	$x_1 = x_1^* + r_1^* \cos\lambda_1$
7	$d_x^* = x_2^* - x_1^*$	14	$y_1 = y_1^* + r_1^* \sin\lambda_1$
8	$d_y^* = y_2^* - y_1^*$	15	$x_2 = x_2^* + r_2^* \cos\lambda_2$
9	$\cos\lambda^* = \cos\lambda_1 \cos\lambda_2 + \sin\lambda_1 \sin\lambda_2$	16	$y_2 = y_2^* + r_2^* \sin\lambda_2$

Protecție	$\sin\lambda^* = 0$ poziție critică (A, β, C în linie)
Observații	ν_1 măsurat de la elementul $\alpha\beta$ la prelungirea $\alpha^*\alpha^*$ ($\nu_1 > 0$ în sens trigonometric) ν_2 măsurat de la elementul $\gamma\beta$ la prelungirea $\gamma^*\gamma^*$ ($\nu_2 > 0$ în sens trigonometric)

CINCINET	DIADA DE ASPECT 5, VARIANTA 1 (RTT)	planșa 6



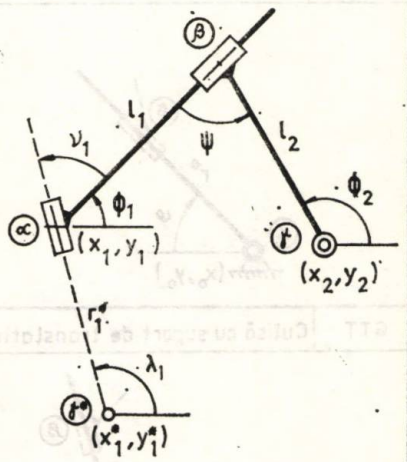
Definire literală a tipului diadei	RTT
Succesiunea identificatorilor numerici	α, β, γ
Indice de contur	—
Indice de contur suplimentar	—
Dimensiuni indicate	l_1, ψ, ν_2
Variante dimensionale acceptate	$l_1 = 0$
Variante dimensionale neacceptate	$\nu_2 = 0, \pi$
Date pozitionale	$x_1, y_1, x_2^*, y_2^*, \lambda_2$
Parametri calculați	$\varphi_1, \varphi_2, l_2, r_2^*, x_2, y_2$

ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

1	$\cos\varphi_2 = \cos\lambda_2 \cos\nu_2 + \sin\lambda_2 \sin\nu_2$		
2	$\sin\varphi_2 = \sin\lambda_2 \cos\nu_2 - \cos\lambda_2 \sin\nu_2$		
3	$\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 \cos\psi + \sin\varphi_2 \sin\psi$		
4	$\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2 \cos\psi - \cos\varphi_2 \sin\psi$		
5	$d_x = x_1 - x_2^* + l_1 \cos\varphi_1$		
6	$d_y = y_1 - y_2^* + l_1 \sin\varphi_1$		
7	$l_2 = (d_x \sin\lambda_2 - d_y \cos\lambda_2) / \sin\nu_2$		
8	$r_2^* = d_x \cos\lambda_2 + d_y \sin\lambda_2 - l_2 \cos\nu_2$		
9	$x_2 = x_2^* + r_2^* \cos\lambda_2$	10	$y_2 = y_2^* + r_2^* \sin\lambda_2$

Protecție	$\sin\nu_2 = 0$ – poziție nedeterminată a elementului $\gamma\beta$
Observații	$\psi = \widehat{\alpha\beta\gamma} < \pi$ măsurat de la elementul $\alpha\beta$ la elementul $\gamma\beta$ ($\psi > 0$ în sens trigonometric) ν_2 măsurat de la elementul $\gamma\beta$ la prelungirea $\gamma^*\gamma$ ($\nu_2 > 0$ în sens trigonometric)

CINCINET	DIADA DE ASPECT 5, VARIANTA 2 (TTR)	planșa 7



Definire literală a tipului diadei	TTR
Succesiunea identificatorilor numerici	α, β, γ
Indice de contur	—
Indice de contur suplimentar	—
Dimensiuni indicate	l_2, ψ, ν_1
Variante dimensionale acceptate	$l_2 = 0$
Variante dimensionale neacceptate	$\nu_1 = 0, \pi$
Date poziționale	$x_1^*, y_1^*, \lambda_1, x_2, y_2$
Parametri calculați	$\phi_1, \phi_2, l_1, r_1^*, x_1, y_1$

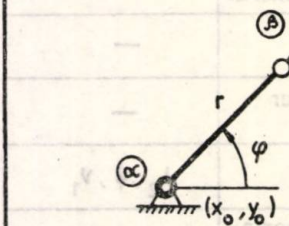
ALGORITMUL PENTRU CALCULUL POZITIONAL

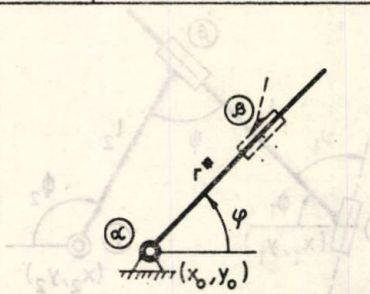
1	$\cos\phi_1 = \cos\lambda_1 \cos\nu_1 + \sin\lambda_1 \sin\nu_1$		
2	$\sin\phi_1 = \sin\lambda_1 \cos\nu_1 - \cos\lambda_1 \sin\nu_1$		
3	$\cos\phi_2 = \cos\phi_1 \cos\psi - \sin\phi_1 \sin\psi$		
4	$\sin\phi_2 = \sin\phi_1 \cos\psi + \cos\phi_1 \sin\psi$		
5	$d_x = x_2 - x_1^* + l_2 \cos\phi_2$		
6	$d_y = y_2 - y_1^* + l_2 \sin\phi_2$		
7	$l_1 = (d_x \sin\lambda_1 - d_y \cos\lambda_1)/\sin\nu_1$		
8	$r_1^* = d_x \cos\lambda_1 + d_y \sin\lambda_1 - l_1 \cos\nu_1$		
9	$x_1 = x_1^* + r_1^* \cos\lambda_1$	10	$y_1 = y_1^* + r_1^* \sin\lambda_1$

Protecție	$\sin\nu_1 = 0$ – poziție nedeterminată a elementului $\alpha\beta$
Observații	$\psi = \widehat{\alpha\beta\gamma} > \pi$ măsurat de la elementul $\alpha\beta$ la $\beta\gamma$ ($\psi > 0$ în sens trigonometric) ν_1 măsurat de la elementul $\alpha\beta$ la prelungirea $\alpha^*\alpha$ ($\nu_1 > 0$ în sens trigonometric)

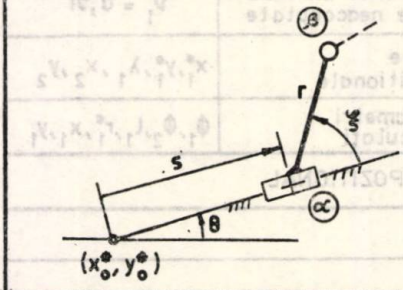
CINCINET	ELEMENTELE CONDUCATOARE	planșa 8

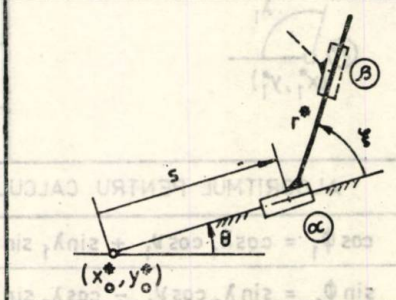
GRR	Manivelă	GRT	Manivelă cu culisă





GTR	Culisă cu articulație	GTT	Culisă cu suport de translație



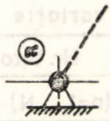
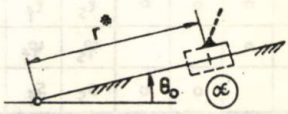


Definirea literală a tipului elementului conducător	GRR	GRT	GTR	GTT
Identificatori numerici	α, β	α, β	α, β	α, β
Date poziționale și dimensionale indicate	x_0, y_0, r	x_0, y_0	$x_0^*, y_0^*, r, \theta, \xi$	$x_0^*, y_0^*, \theta, \xi$
Parametrul poziționat caracteristic	φ	φ	s	s
Parametri cinematici inițiali	$\varphi_0, \omega_0, \varepsilon_0$	$\varphi_0, \omega_0, \varepsilon_0$	s_0, v_0, a_0	s_0, v_0, a_0
Parametri proprii calculați în algoritmul diadei conectate	–	r^*	–	r^*
Parametrii poziționali ai conexiunii	x, y	x^*, y^*, λ	x, y	x^*, y^*, λ

Relații pentru calculul parametrilor poziționali ai conexiunii

GRR	GRT	GTR	GTT
$x = x_0 + r \cdot \cos\varphi$	$x^* = x_0$	$x = x_0^* + s \cdot \cos\theta + r \cdot \cos(\theta + \xi)$	$x^* = x_0^* + s \cdot \cos\theta$
$y = y_0 + r \cdot \sin\varphi$	$y^* = y_0$		$y^* = y_0^* + s \cdot \sin\theta$
	$\cos\lambda = \cos\varphi$	$y = y_0^* + s \cdot \sin\theta + r \cdot \sin(\theta + \xi)$	$\cos\lambda = \cos(\theta + \xi)$
	$\sin\lambda = \sin\varphi$		$\sin\lambda = \sin(\theta + \xi)$

Planșa 8

CINCINET	LEGATURI LA BAZA ALE DIADELOR			planșa 9
PFR	Punct fix de articulatie	DFT	Direcție fixă de translație	
 (x_o, y_o)		 (x^*_o, y^*_o)		
Definire literală a tipului		PFR	DFT	
Identificator numeric		α	α	
Parametri poziționali indicați		x_o, y_o	x^*_o, y^*_o, θ_o	
Parametri calculați în algoritmul diadei conectate			r^*	
Parametrii poziționali ai conexiunii		$x = x_o$	$x^* = x^*_o$, $y^* = y^*_o$	
		$y = y_o$	$\cos\lambda = \cos\theta_o$ $\sin\lambda = \sin\theta_o$	

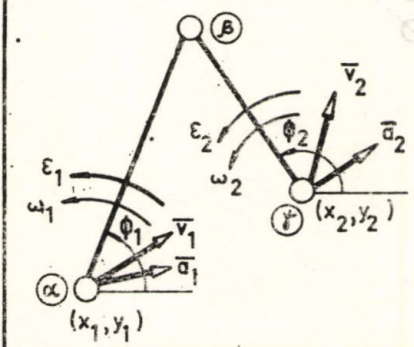
Planșa 9

| CINCINET | GENERAREA MIŞCĂRII MECANISMULUI | | |

CINCINET	CALCULUL CINEMATIC AL UNEI DIADE	planșa 11

Parametrii cinematici standard

x_1	y_1	v_{1x}	v_{1y}	a_{1x}	a_{1y}	ω_1	ε_1
x_2	y_2	v_{2x}	v_{2y}	a_{2x}	a_{2y}	ω_2	ε_2



T	Parametrul generator al mișcării generalizat
t	Timpul
φ	Unghiul de poziție al manivelei conducătoare de referință
s	Deplasarea culisei conducătoare de referință

Derivatele în raport cu timpul ale parametrului generator

T	dT/dt	d^2T/dt^2	Caz particular (mișcare uniformă)
t	1	0	
φ	ω	ε_o	$\omega = \omega_o \quad \varepsilon_o = 0$
s	v	a_o	$v = v_o \quad a_o = 0$

Relații generale pentru calculul derivatelor unei funcții F(T) prin metoda diferențelor finite (h = pasul de derivare)

$$\frac{dF}{dT} = \frac{1}{12h}\left[F(T-2h) - 8F(T-h) + 8F(T+h) - F(T+2h)\right]$$

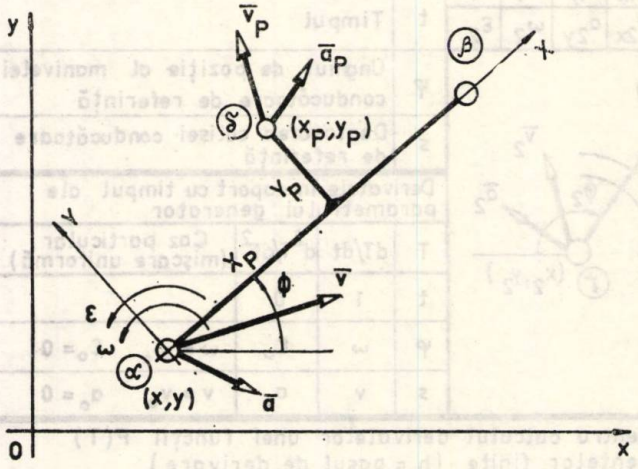
$$\frac{d^2F}{dT^2} = \frac{1}{12h^2}\left[-F(T-2h) + 16F(T-h) - 30F(T) + 16F(T+h) - F(T+2h)\right]$$

Relații generale pentru calculul parametrilor cinematici standard

1	$v_{1x} = \frac{dx_1}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$	5	$v_{2x} = \frac{dx_2}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$
2	$v_{1y} = \frac{dy_1}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$	6	$v_{2y} = \frac{dy_2}{dT} \cdot \frac{dT}{dt}$
3	$a_{1x} = \frac{d^2x_1}{dT^2} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \frac{dx_1}{dT} \cdot \frac{d^2T}{dt^2}$	7	$a_{2x} = \frac{d^2x_2}{dT^2} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \frac{dx_2}{dT} \cdot \frac{d^2T}{dt^2}$
4	$a_{1y} = \frac{d^2y_1}{dT^2} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \frac{dy_1}{dT} \cdot \frac{d^2T}{dt^2}$	8	$a_{2y} = \frac{d^2y_2}{dT^2} \cdot \left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \frac{dy_2}{dT} \cdot \frac{d^2T}{dt^2}$
9	$\omega_1 = \left[\cos\phi_1 \cdot \frac{d}{dT}(\sin\phi_1) - \sin\phi_1 \cdot \frac{d}{dT}(\cos\phi_1)\right] \cdot \frac{dT}{dt}$		
10	$\omega_2 = \left[\cos\phi_2 \cdot \frac{d}{dT}(\sin\phi_2) - \sin\phi_2 \cdot \frac{d}{dT}(\cos\phi_2)\right] \cdot \frac{dT}{dt}$		
11	$\varepsilon_1 = \left[\cos\phi_1 \cdot \frac{d^2}{dT^2}(\sin\phi_1) - \sin\phi_1 \cdot \frac{d^2}{dT^2}(\cos\phi_1)\right]\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \omega_1 \cdot \frac{d^2T}{dt^2} \Big/ \frac{dT}{dt}$		
12	$\varepsilon_2 = \left[\cos\phi_2 \cdot \frac{d^2}{dT^2}(\sin\phi_2) - \sin\phi_2 \cdot \frac{d^2}{dT^2}(\cos\phi_2)\right]\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 + \omega_2 \cdot \frac{d^2T}{dt^2} \Big/ \frac{dT}{dt}$		

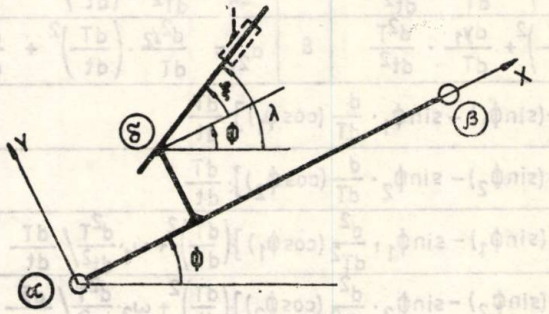
Notă : Valorile parametrilor $x, y, \cos\phi, \sin\phi$ se obțin din calculul poziționat al elementelor conducătoare și al diadelor, în funcție de T și h.

CINCINET	PUNCTE SI DIRECTII ATASATE UNUI ELEMENT AL UNEI DIADE OARECARE	planșa 12



PARAMETRII CINEMATICI AI UNUI PUNCT DE INTERES

1	$X = X_p \cos\phi - Y_p \sin\phi$	5	$v_{PX} = v_X - \omega \cdot Y$
2	$Y = X_p \sin\phi + Y_p \cos\phi$	6	$v_{Py} = v_y + \omega \cdot X$
3	$x_p = x + X$	7	$a_{Px} = a_x - \varepsilon \cdot Y - \omega^2 \cdot X$
4	$y_p = y + Y$	8	$a_{Py} = a_y + \varepsilon \cdot X - \omega^2 \cdot Y$



Poziția direcției atașate

1	$\cos\lambda = \cos\phi\cos\xi - \sin\phi\sin\xi$
2	$\sin\lambda = \sin\phi\cos\xi + \cos\phi\sin\xi$

O METODĂ EXACTĂ PENTRU ECHILIBRAREA ROTORILOR ÎN DOUĂ PLANE

de ADALBERT NAHLIK, ALEXANDRU PASTIA

I.C.P.E.T. București

În lucrare sînt prezentate noțiunile de bază privind echilibrarea rotorilor, indicîndu-se pentru diferite mase de rotor forța centrifugă liberă corespunzătoare gradelor de calitate a echilibrării, recomandate în ISO 1940. Se expune metoda de calcul propusă, la baza căreia stă ipoteza interdependenței liniare dintre masa contragreutății și vectorul corespunzător de dezechilibru din planele lagărelor. Mersul calculului este ilustrat cu diagrame vectoriale. Este redat în continuare programul de calcul întocmit în limbaj FORTRAN precum și două exemple, rezultatele finale fiind prezentate tabelar.

1. GENERALITĂȚI

În construcția mașinilor rotative se înregistrează o tendință de creștere a maselor în mișcare, a vitezelor de rotație, tendință care impune o tot mai mare atenție la conceperea acestor utilaje, la tehnologia de execuție, la montajul și exploatarea acestora. Această atenție sporită este dictată de evitarea unor forțe de inerție libere, neechilibrate, exagerat de mari, care, în timpul funcționării agregatelor, pot conduce la serioase perturbații în funcționarea acestora.

Echilibrarea maselor în rotație pe mașini speciale sau/și „in situ" devine deci o sarcină de mare răspundere, a cărei rezolvare corectă trebuie avută în vedere deja în faza de proiectare, indicîndu-se gradul de calitate necesar al echilibrării, precum și tehnologia necesară pentru realizarea acestuia.

La un disc de masă M, perfect echilibrat, axa de rotație coincide cu axa principală de inerție; amplasarea unei mase m la raza r face ca axa principală de inerție să se deplaseze paralel cu ea însăși cu distanța

$$e = \frac{mr}{M+m} = \frac{mr}{M} \cong \frac{U}{M}, \tag{1}$$

unde $U = mr$ reprezintă dezechilibrul discului, măsurat în g.mm.

Excentricitatea e se măsoară în μm, dacă în (1) m se introduce în g, M în kg și r în mm. În același timp e reprezintă și dezechilibrul specific, adică dezechilibrul raportat la unitatea de masă a discului, exprimat în g.mm/kg.

Forța centrifugă liberă, neechilibrată are expresia:

$$F = U \cdot 10^{-6}(\pi n/30)^2 = 1{,}0966 \cdot 10^{-8} U n^2 [\mathrm{N}], \text{ sau} \tag{2}$$

$$F = U \cdot 10^{-6}(\pi n/30)^2/9{,}81 = 1{,}1178 \cdot 10^{-9} U n^2 \ [\mathrm{kgf}], \tag{2a}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 2, 1979, P. 237–250

unde dezechilibrul $U = em$ se introduce în g.mm sau kg · μm, iar viteza de rotație în min^{-1}.

Viteza periferică a punctului cu rază e este:

$$e_\omega = e \cdot 10^{-3} \pi n/30 \text{ mms}^{-1}. \quad (3)$$

Reprezentînd ecuația (3) într-un sistem de coordonate log e, log n, pentru e_ω ca parametru, găsim o familie de drepte (fig. 1). Parametrul

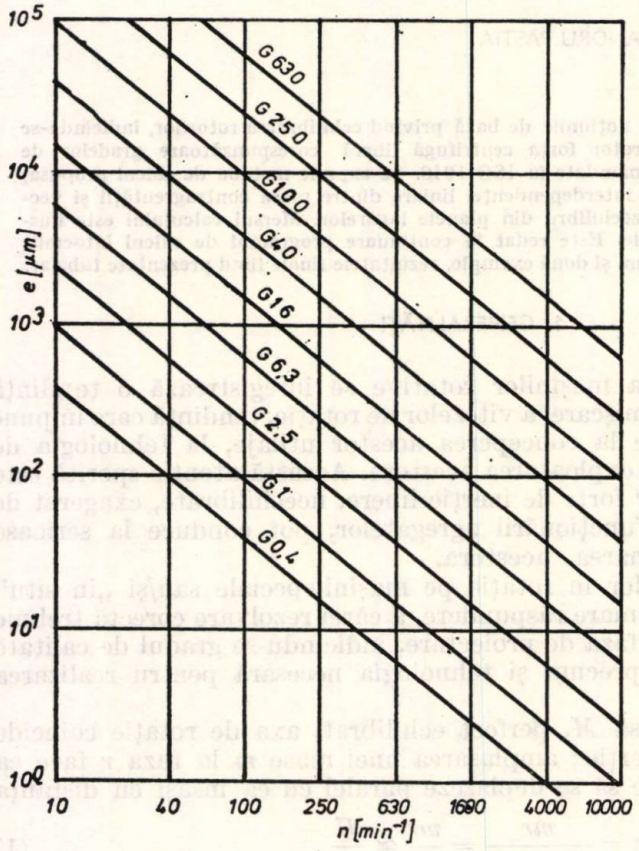


Fig. 1. — Variația excentricității (dezechilibrului specific) funcție de turație și grad de calitate după ISO 1940.

e_ω reprezintă gradul de calitate al echilibrării, în conformitate cu recomandarea ISO 1940, grad pentru care sînt indicate și valorile corespunzătoare diferitelor clase de mașini rotative.

Introducînd expresia excentricității e din relația (3) în formula forței centrifuge libere (2a), obținem

$$F = 1{,}0674 \cdot 10^{-5} ne_\omega M. \quad (4)$$

Pentru a avea o imagine despre mărimea forțelor centrifuge libere, funcție de viteza de rotație, masă de rotor și gradul de calitate al echili-

brării, a fost construită diagrama din figura 2, pe baza relației (4). Aici, într-un sistem de coordonate logaritmic, dreptele sînt trasate pentru mase constante de rotor. Cele șapte valori alese ale masei în interiorul fiecărui

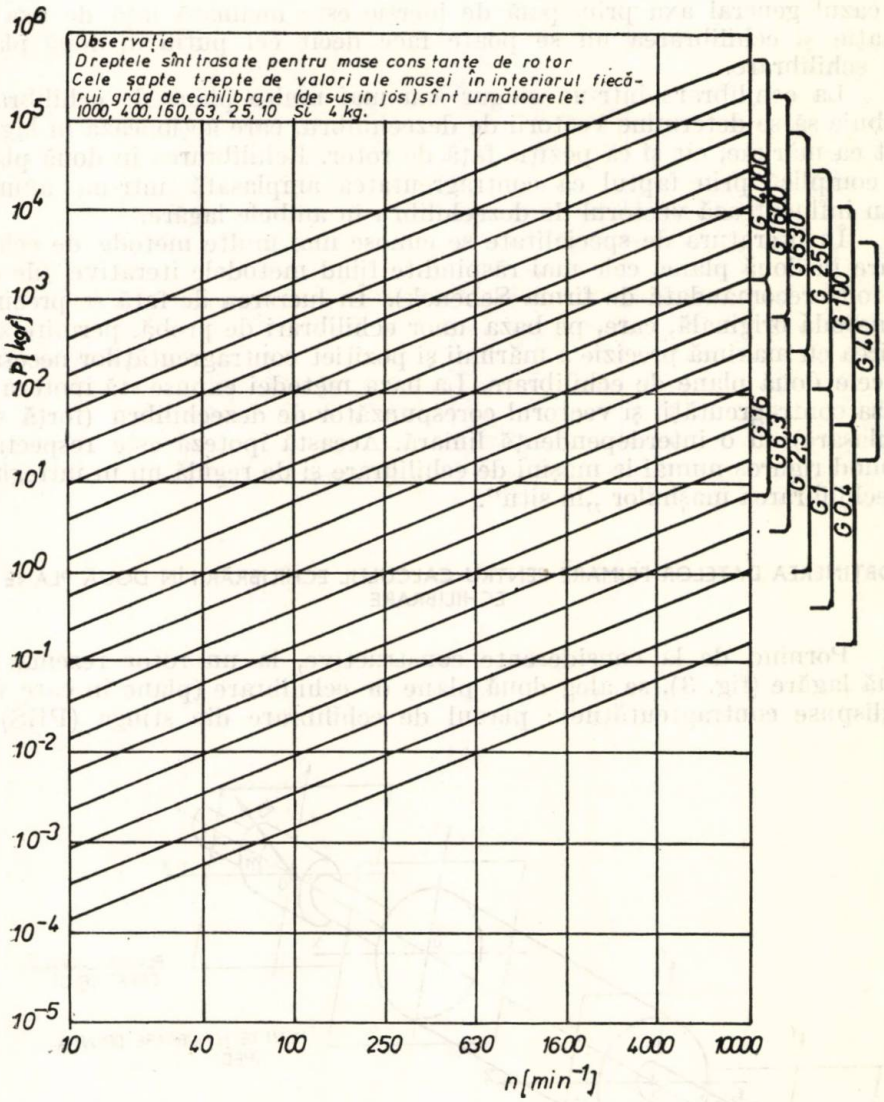


Fig. 2. — Variația forțelor de inerție libere funcție de turație, pentru diferite mase de rotor și grade de calitate.

grad de calitate (de sus în jos) sînt următoarele: 1000, 400, 160, 63, 25, 10 și 4 kg. De exemplu, pentru o masă de rotor $M = 63$ kg, la o turație de $n = 630$ min^{-1} și un grad de calitate de $G250$, forța centrifugă liberă are valoarea de $F = 105{,}9$ kgf.

În cazul unui disc echilibrarea constă într-o astfel de amplasare a unei contragreutăţi, încît vectorul de forţă produs de aceasta să fie egală şi de sens contrar cu forţa de inerţie liberă, încă neechilibrată. Această echilibrare are loc într-un singur plan, în planul discului. La un rotor caracterizat prin dimensiuni axiale sensibil mai mari decît cele radiale, în cazul general axa principală de inerţie este înclinată faţă de axa de rotaţie şi echilibrarea nu se poate face decît cel puţin în două plane de echilibrare.

La echilibrare într-un singur sau mai multe plane de echilibrare, trebuie să se determine vectorii de dezechilibru, care acţionează în lagăre atît ca mărime, cît şi ca poziţie faţă de rotor. Echilibrarea în două plane se complică prin faptul că contragreutatea amplasată într-un anumit plan influenţează vectorul de dezechilibru în ambele lagăre.

În literatura de specialitate se cunosc mai multe metode de echilibrare în două plane, cele mai răspîndite fiind metodele iterative (de ex. metoda recomandată de firma Schenck). În lucrarea de faţă se prezintă o metodă originală, care, pe baza unor echilibrări de probă, permite stabilirea cu maximă precizie a mărimii şi poziţiei contragreutăţilor necesare în cele două plane de echilibrare. La baza metodei expuse stă ipoteza că masa contragreutăţii şi vectorul corespunzător de dezechilibru (forţă sau deplasare) au o interdependenţă liniară. Această ipoteză este respectată în mod riguros numai la maşini de echilibrare şi de regulă nu în întregime la echilibrarea maşinilor „in situ".

2. OBŢINEREA DATELOR PRIMARE PENTRU CALCULUL ECHILIBRĂRII ÎN DOUĂ PLANE DE ECHILIBRARE

Pornind de la considerente constructive, la un rotor rezemat pe două lagăre (fig. 3), se aleg două plane de echilibrare (plane în care vor fi dispuse contragreutăţile): planul de echilibrare din stînga (PES) şi

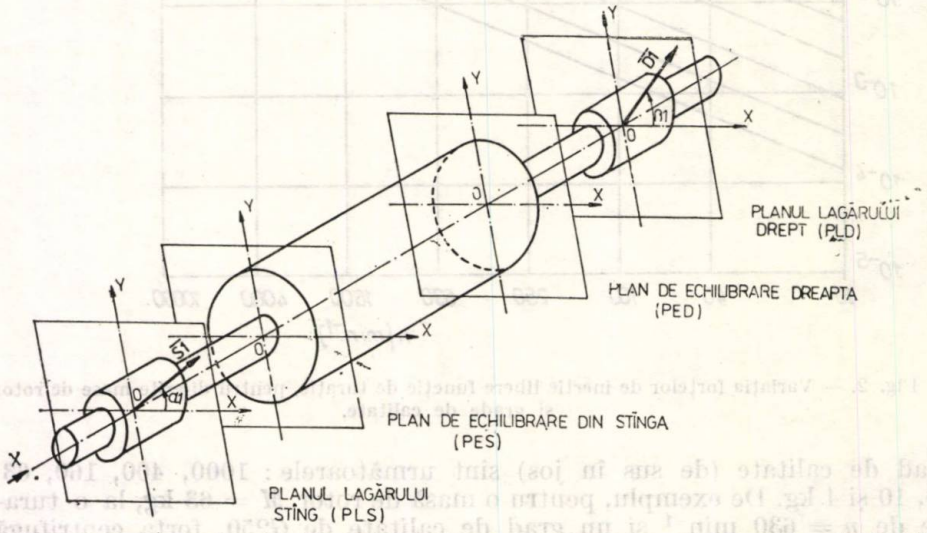


Fig. 3. — Dispunerea planelor de echilibrare (PES şi PED) la un rotor rezemat în două lagăre.

planul de echilibrare din dreapta (PED). Aceste plane vor fi perpendiculare pe axa rotorului, iar sistemele de axe rectangulare xOy, atașate rotorului, se vor suprapune în proiecție axială. Poziția vectorilor de dezechilibru S și D din PLS și PLD se va măsura în sens trigonometric, iar ca mărime — în unități convenționale. Diagramele vectoriale din PLS și PLD vor fi examinate din direcția săgeții X. Succesiunea măsurătorilor de efectuat va fi următoarea :

a) Se rotește rotorul cu o viteză constantă n min^{-1}, se stabilesc vectorii de dezechilibru $\bar{S}_1(S_1, \alpha_1)$ și $\bar{D}_1(D_1, \beta_1)$ în PLS și PLD.

b) Se fixează o contragreutate de probă de masă m_s în PES, de exemplu în poziția 0°. Se rotește rotorul cu viteza n min^{-1} și se determină cei doi vectori de dezechilibru $\bar{S}_2(S_2, \alpha_2)$ și $\bar{D}_2(D_2, \beta_2)$, în PLS și PLD.

c) Se fixează o contragreutate de probă de masă m_d în PED, se rotește rotorul cu o viteză n min^{-1}, se determină din nou cei doi vectori de dezechilibru $\bar{S}_3(S_3, \alpha_3)$ și $\bar{D}_3(D_3, \beta_3)$ în PLS și PLD.

d) Se determină prin calcul mărimea și poziția contragreutăților de echilibrare necesare în PES și PED.

e) După amplasarea contragreutăților în PES și PED se face o măsurătoare de control. Din cauza impreciziei tehnologice inevitabile (erori de măsurare, erori de execuție și de amplasare a contragreutăților etc.) se vor identifica totuși în ambele lagăre niște vectori de dezechilibru, evident mult mai mici decît cei inițiali. Dacă gradul de calitate realizat al echilibrării nu depășește valoarea impusă, echilibrarea se consideră terminată. În caz contrar se fac corecțiile necesare.

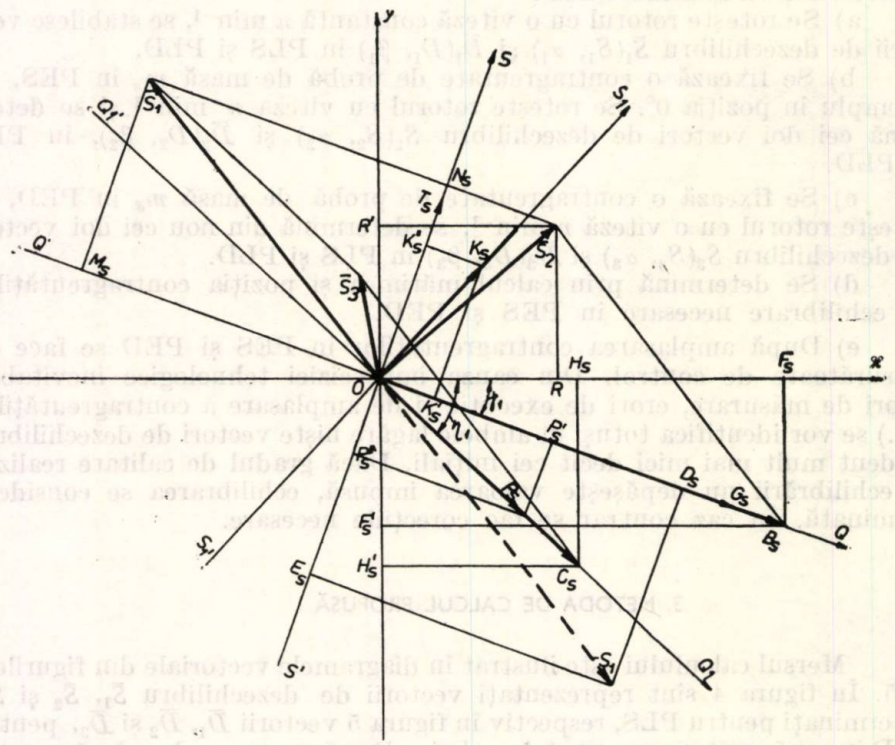
3. METODA DE CALCUL PROPUSĂ

Mersul calculului este ilustrat în diagramele vectoriale din figurile 4 și 5. În figura 4 sînt reprezentați vectorii de dezechilibru $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ și $\bar{S}_3$, determinați pentru PLS, respectiv în figura 5 vectorii $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ și $\bar{D}_3$, pentru PLD în conformitate cu punctele a, b și c. După cum se vede, dacă rotorul ar fi perfect echilibrat ($\bar{S}_1 = \bar{D}_1 = 0$), contragreutatea m_s ar da naștere vectorului de dezechilibru $\overline{OB}_s = \bar{S}_2 - \bar{S}_1$. Admitem ipoteza că dacă m_s ar fi plasată pe o altă direcție, care formează unghiul α cu direcția anterioară, în cazul unui rotor perfect echilibrat am obține un vector de dezechilibru, care ar forma de asemenea unghiul α cu direcția inițială a vectorului $\overline{OB}_s$. Vom considera din această cauză un sistem de coordonate cartezian QOS, semiaxa pozitivă OQ fiind definită de sensul vectorului $\overline{OB}_s$.

Din figura 4 rezultă în continuare că dacă am lua pentru echilibrare un vector $-\bar{S}_1$ cu componenta OD_s orientată după semiaxa OQ și componenta OE_s, orientată după semiaxa OS', vectorul de dezechilibru $\bar{S}_1$ din PLS ar fi echilibrat. În cazul general însă această măsură ar conduce la un dezechilibru și mai mare în PLD decît cel inițial.

Pentru a vedea influența unei contragreutăți amplasate într-un plan asupra celuilalt, ne folosim de rezultatele măsurătorilor de la punctul c), unde contragreutatea de probă din PED dă naștere unui vector de

dezechilibru $\bar{S}_3(S_3, \alpha_3)$. Se observă că orice contragreutate plasată în PED pe direcţia aleasă la punctul c), în cazul unui rotor perfect echilibrat, dă naştere unui vector în PLS, coliniar cu $\overline{OC}_s$. În acelaşi timp contragreutatea m_d va da naştere unui vector $\overline{OB}_d = \bar{D}_3 - \bar{D}_1$ şi în PLD (analog cu $\bar{S}_2 - \bar{S}_1$).



S_1 - vector dezechilibru inițial
S_2 - vector dezechilibru cu m_s în PES
S_3 - vector dezechilibru cu m_d în PED
OB_s - vector produs de m_s în PLS
OC_s - vector produs de m_s în PLS

Fig. 4. — Diagrama vectorială în PLS în cazul echilibrării în două plane.

Putem spune deci că vectorul $\overline{OB}_d$ se transferă în PLS şi se transformă în vectorul $\overline{OC}_s$. Cunoscînd $\overline{OB}_d$ şi $\overline{OC}_s$ în urma măsurătorilor, putem afirma că un vector oarecare $\bar{V}_1$ din PLD se transferă în PLS dînd naştere la vectorul :

$$\bar{V}_2 = \frac{|\overline{OC}_s|}{|\overline{OB}_d|} \bar{V}_1 = a_{d-s} \bar{V}_1,$$

unde mărimea scalară $a_{d-s} = |\overline{OC}_s| / |\overline{OB}_d|$ o vom numi coeficient de transfer al unui vector din dreapta în stînga. Analog cu aceasta se poate defini coeficientul de transfer din stînga în dreapta : $a_{s-d} = |\overline{OC}_d| / |\overline{OB}_s|$.

Rezultă că în PLS apar alte două direcţii principale : Q_1Q_1' pe care acţionează vectorul $\overline{OC}_s$(mărimea lui fiind determinată prin coeficientul de transfer a_{d-s}) şi S_1S_1' perpendiculară pe prima. Repetînd acelaşi raţionament şi pentru PLD, vom obţine şi aici două sisteme de coordonate ZOW şi Z_1OW_1 (vezi fig. 5).

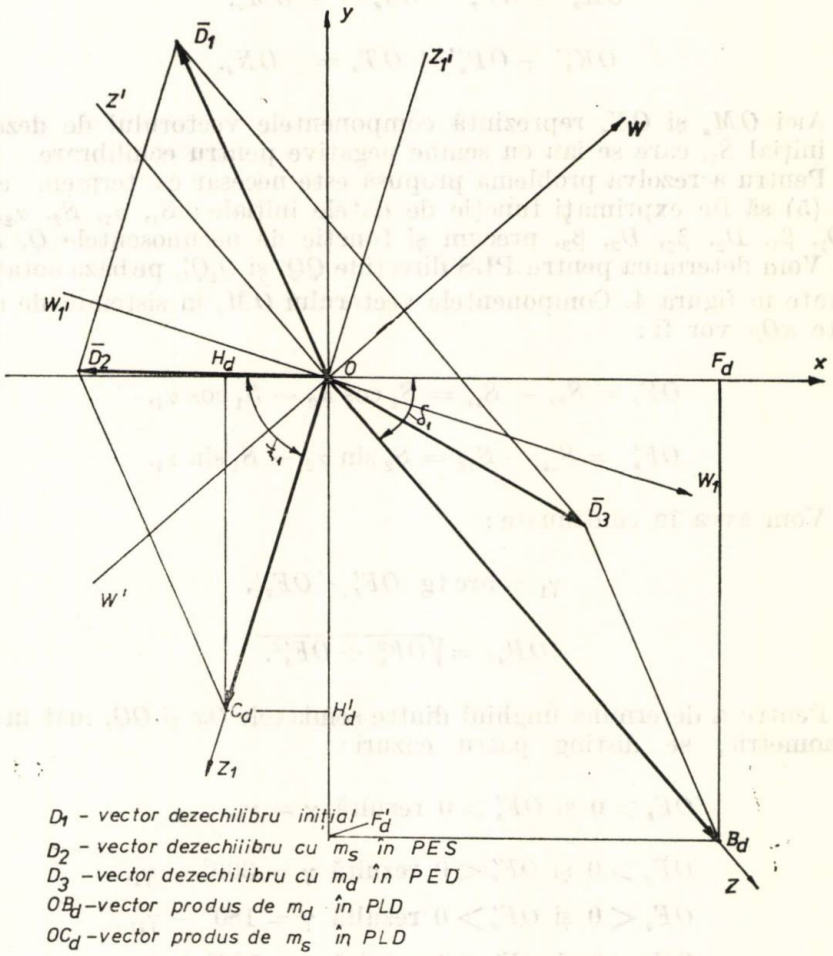


Fig. 5. — Diagrama vectorială în PLD în cazul echilibrării în două plane.

În locul contragreutăţii m_s vom amplasa masa M_s în PES, care în PLS generează un vector de dezechilibru $\bar{S}$, cu componentele $Q = OG_s$ şi $S = OT_s$, orientate după semiaxele OQ şi OS, iar în PED contragreutatea M_d, care în PLD va da naştere vectorului D cu componentele Z şi W, orientate după OZ şi OW.

Componenta Z din dreapta se va transfera în PLS după direcţia S_1S_1', ca mărime va fi egală cu $OK_s = Za_{d-s}$, şi va avea componentele OK_s' şi OK_s'' în sistemul de coordonate QOS. Pe de altă parte componenta W se transferă în PLS după direcţia Q_1Q_1', iar ca mărime va fi egală cu $OP_s = Wa_{d-s}$ şi va avea componentele OP_s' şi OP_s'' în sistemul de coordonate QOS.

Rezultă că pentru echilibrarea rotorului în PES trebuie să avem respectate următoarele condiţii:

$$\begin{aligned} OK_s' + OP_s' + OG_s &= -OM_s, \\ OK_s'' + OP_s'' + OT_s &= -ON_s. \end{aligned} \tag{5}$$

Aici OM_s şi ON_s reprezintă componentele vectorului de dezechilibru iniţial $\bar{S}_1$, care se iau cu semne negative pentru echilibrare.

Pentru a rezolva problema propusă este necesar ca termenii ecuaţiilor (5) să fie exprimaţi funcţie de datele iniţiale: S_1, α_1, S_2, α_2, S_3, α_3, D_1, β_1, D_2, β_2, D_3, β_3, precum şi funcţie de necunoscutele Q, S, Z şi W. Vom determina pentru PLS direcţiile QQ' şi Q_1Q_1', pe baza notaţiilor adoptate în figura 4. Componentele vectorului $\overline{OM}_s$ în sistemul de coordonate xOy vor fi:

$$OF_s = S_{2x} - S_{1x} = S_2 \cos \alpha_2 - S_1 \cos \alpha_1,$$

$$OF_s' = S_{2y} - S_{1y} = S_2 \sin \alpha_2 - S_1 \sin \alpha_1.$$

Vom avea în continuare:

$$\gamma_1 = \text{arc tg } |OF_s' / OF_s|,$$

$$|\overline{OB}_s| = \sqrt{OF_s^2 + OF_s'^2}.$$

Pentru a determina unghiul dintre semiaxele Ox şi OQ, luat în sens trigonometric, se disting patru cazuri:

$$OF_s > 0 \text{ şi } OF_s' > 0 \text{ rezultă } \gamma = \gamma_1,$$

$$OF_s > 0 \text{ şi } OF_s' < 0 \text{ rezultă } \gamma = 360^\circ - \gamma_1,$$

$$OF_s < 0 \text{ şi } OF_s' > 0 \text{ rezultă } \gamma = 180^\circ - \gamma_1,$$

$$OF_s < 0 \text{ şi } OF_s' < 0 \text{ rezultă } \gamma = 180^\circ + \gamma_1.$$

Găsim că unghiul dintre vectorul $\bar{S}_1$ şi axa pozitivă OQ este $\gamma - \alpha_1$, deci componentele vectorului $\bar{S}_1$ vor fi:

$$OM_s = S_1 \cos(\gamma - \alpha_1),$$

$$ON_s = S_1 \cos(\gamma - \alpha_1 + 90^\circ).$$

Componentele vectorului OC_s în sistemul xOy :

$$OH_s = S_{3x} - S_{1x} = S_3 \cos \alpha_3 - S_1 \cos \alpha_1,$$

$$OH'_s = S_{3y} - S_{1y} = S_3 \sin \alpha_3 - S_1 \sin \alpha_1.$$

Fie $\eta_1 = \text{arc tg } |OH'_s/OH_s|$ și $|\overline{OC}_s| = \sqrt{\overline{OH_s^2} + \overline{OH'^2_s}}$, distingîndu-se și aici cele patru combinații posibile între OH_s și OH'_s.

Înlocuind toate elementele găsite mai sus în ecuațiile (5a), după efectuarea transformărilor necesare găsim următorul sistem de ecuații :

$$\begin{aligned} Q + Za_{d-s}\cos(\gamma - \eta) + Wa_{d-s}\sin(\gamma - \eta) &= -S_1\cos(\gamma - \alpha_1), \\ S - Za_{d-s}\sin(\gamma - \eta) + Wa_{d-s}\cos(\gamma - \eta) &= -S_1\cos(\gamma - \alpha_1 + 90°). \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru PLD (fig. 5) se definesc sistemele de axe ZOW și Z_1OW_1, caracterizate prin unghiurile :

$$\delta_1 = \text{arctg } |OF'_d / OF_d|,$$

$$\xi_1 = \text{arctg } |OH'_d / OH_d|,$$

$$OF_d = D_{3x} - D_{1x} = D_3 \cos \beta_3 - D_1 \cos \beta_1,$$

$$OF'_d = D_{3y} - D_{1y} = D_3 \sin \beta_3 - D_1 \sin \beta_1,$$

$$OH_d = D_{2x} - D_{1x} = D_2 \cos \beta_2 - D_1 \cos \beta_1,$$

$$OH'_d = D_{2y} - D_{1y} = D_2 \sin \beta_2 - D_1 \sin \beta_1.$$

Unghiurile δ și ξ se determină funcție de semnele algebrice ale componentelor de mai sus ale vectorilor $\overline{OB}_d$ și $\overline{OC}_d$.

Din formularea condițiilor de echilibru și pentru PLD se obțin alte două ecuații :

$$\begin{aligned} Z + Qa_{s-d}\cos(\delta - \xi) + Sa_{s-d}\sin(\delta - \eta) &= -D_1\cos(\delta - \beta_1), \\ W - Qa_{s-d}\sin(\delta - \xi) + Sa_{s-d}\cos(\delta - \xi) &= D_1\sin(\delta - \beta_1), \end{aligned} \tag{7}$$

care, împreună cu sistemul (6), definesc soluțiile căutate :

$$Q = \frac{-S_1 \cos A + a_{d-s}D_1 \cos B + a_{d-s}a_{s-d}S_1 \cos C - a^2_{d-s}a_{s-d}D_1 \cos D}{M},$$

$$S = \frac{S_1 \sin A - a_{d-s}D_1 \sin B + a_{d-s}a_{s-d}S_1 \sin C - a^2_{d-s}a_{s-d}D_1 \sin D}{M},$$

$$Z = \frac{-D_1 \cos E + a_{s-d} S_1 \cos F + a_{s-d} a_{d-s} D_1 \cos G - a_{s-d}^2 a_{d-s} S_1 \cos H}{M},$$

$$W = \frac{D_1 \sin E - a_{s-d} S_1 \sin F + a_{s-d} a_{d-s} D_1 \sin G - a_{s-d}^2 a_{d-s} S_1 \sin H}{M}, \tag{8}$$

unde

$$A = \gamma - \alpha_1, \qquad E = \delta - \beta_1,$$

$$B = \gamma + \delta - \eta - \beta_1, \qquad F = \gamma + \delta - \xi - \alpha_1,$$

$$C = \delta + \alpha_1 - \xi - \eta, \qquad G = \gamma + \beta_1 - \xi - \eta,$$

$$D = \beta_1 - \xi, \qquad H = \alpha_1 - \eta,$$

$$M = [1 - a_{s-d} a_{d-s} \cos(\gamma + \delta - \eta - \xi)]^2 + a_{s-d}^2 a_{d-s}^2 \sin^2(\gamma + \delta - \eta - \xi).$$

Poziția vectorului rezultant, necesar pentru echilibrare în PLS $|\bar{S}| = \sqrt{Q^2 + S^2}$, va fi definit în sistemul de coordonate QOS prin unghiul $\alpha' = \text{arc tg}\,|S/Q|$, iar unghiul α, în sens trigonometric, funcție de poziția vectorului $\bar{S}$. Pentru vectorul rezultant necesar în PLD $|\bar{D}| = \sqrt{Z^2 + W^2}$, definit ca poziție prin unghiul $\beta' = \text{arctg}\,|W/Z|$ sînt valabile cele de mai sus.

Rezultă în final masa contragreutăților necesare în cele două plane de echilibrare:

$$M_s = \frac{m_s}{|\overline{OB_s}|}\,|\bar{S}| \text{ și } M_d = \frac{m_d}{|\overline{OB_d}|}\,|\bar{D}|.$$

Contragreutatea de probă m_s, amplasată pe semiaxa Ox a dat naștere vectorului $\overline{OB_s}$ care formează unghiul γ cu Ox, iar contragreutatea finală M_s, amplasată la un unghi α față de Ox va da naștere unui vector $\bar{S}$ care face tot unghiul α cu semiaxa Ox. Prin analogie, contragreutatea M_d va trebui amplasată la unghiul β față de semiaxa Ox.

4. PROGRAMUL DE CALCUL

Programul de calcul a fost întocmit în limbaj FORTRAN. Programul principal coordonează calculele necesare pentru rezolvarea sistemului de ecuații (6), (7), obținîndu-se componentele Q, S și Z, W pentru PLS, respectiv PLD, în sistemele carteziene QOS, respectiv ZOW (fig. 6). În cursul calculelor se apelează la subrutinele CIT(PI), PSI(PI) și SCRIE(PI), oprindu-se execuția după obținerea datelor necesare. Programul mai calculează unghiurile γ(GAMA), δ(DELTA), contragreutățile M_s(MS) și M_d(MD) precum și unghiurile de amplasare ale lor față de sistemul de coordonate xOy.

Subrutina CIT(PI) citește datele de intrare (m_s, m_d, coordonatele polare ale vectorilor $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$, $\bar{S}_3$, $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$, $\bar{D}_3$,) obținute experimental, transformînd gradele sexagesimale în radiani.

Subrutina PSI(PI) calculează coordonatele polare ale unui vector cînd se cunosc coordonatele carteziene ale lui.

Subrutina SCRIE(PI) tipărește coordonatele carteziene și cele polare ale vectorilor de echilibrare în PLS și PLD, precum și mărimea și poziția contragreutăților în PES și PED în sistemul de coordonate xOy.

Cele trei subrutine sînt redate în fig. 7*a*, *b* și *c*.

Redăm rezultatele obținute în două cazuri, ilustrate sub forma tabelelor din fig. 8*a* și *b*. În prima parte sînt tipărite datele de plecare obținute experimental, iar în tabel sînt prezentate separat pentru PES și PED elementele finale ale echilibrării : componentele Q,S, Z, W, unghiurile γ, δ, mărimea contragreutăților M_s, M_d precum și poziția acestora în sistemul xOy, caracterizată prin unghiurile α și β. Menționăm în încheiere că sistemul de ecuații (6), (7) poate fi particularizat cu ușurință pentru cazul echilibrării într-un singur plan, de exemplu pentru rotori (discuri) în consolă.

Primită la redacție la 6 octombrie 1978

```
      COMPILER OPTIONS - NAME= MAIN,OPT=00,LINECNT=80,SIZE=0000K,
                         SOURCE,EBCDIC,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOEDIT,NOID,NOXREF
ISN 0002          COMMON/BL1/V(2,3),U(2,3),C(3,4)/BL2/B(2)
ISN 0003          COMMON GR,GR1
ISN 0004          PI=ATAN(1.)*4
ISN 0005          DO 35 K12=1,3
ISN 0006          CALL CIT(PI)
ISN 0007          K=0
ISN 0008          DO 10 I=1,2
ISN 0009          DO 10 J=2,3
ISN 0010          K=K+1
ISN 0011          X=V(I,J)*COS(U(I,J))-V(I,1)*COS(U(I,1))
ISN 0012          Y=V(I,J)*SIN(U(I,J))-V(I,1)*SIN(U(I,1))
ISN 0013          CALL PS(X,Y,PI,C(2,K),C(1,K))
ISN 0014       10 CONTINUE
ISN 0015          B(1)=C(1,2)/C(1,4)
ISN 0016          B(2)=C(1,3)/C(1,1)
ISN 0017          EP=B(1)*B(2)
ISN 0018          EA=C(2,1)+C(2,4)
ISN 0019          ETA=EA-(C(2,2)+C(2,3))
ISN 0020          A1=(1-EP)*COS(ETA)+1.
ISN 0021          A2=EP*SIN(ETA)
ISN 0022          DE=A1*A1+A2*A2
ISN 0023          K=0
ISN 0024          DO 20 I=1,2
ISN 0025          ETA1=C(2,I+(I-1)*(I+1))-U(I,1)
ISN 0026          ETA2=EA-(C(2,I+1)+U(3-I,1))
ISN 0027          T1=B(I)*V(3-I,1)*COS(ETA2)-V(I,1)*COS(ETA1)
ISN 0028          T2=V(I,1)*SIN(ETA1)-B(I)*V(3-I,1)*SIN(ETA2)
ISN 0029          E3=C(2,1+(2-I)*3)+U(I,1)-C(2,3-C(2,2)
ISN 0030          E4=U(3-I,1)-C(2,4-I)
ISN 0031          T3=EP*(V(I,1)*COS(E3)-B(I)*V(3-I,1)*COS(E4))
ISN 0032          T4=EP*(V(I,1)*SIN(E3)-B(I)*V(3-I,1)*SIN(E4))
ISN 0033          C(3,1+K)=(T1+T3)/DE
ISN 0034          C(3,I+1+K)=(T2+T4)/DE
ISN 0035          K=K+1
ISN 0036       20 CONTINUE
ISN 0037          CALL SCRIE(PI)
ISN 0038       35 CONTINUE
ISN 0039          STOP
ISN 0040          END
```

Fig. 6. — Programul principal de calcul în limbaj FORTRAN.

```
      COMPILER OPTIONS - NAME= MAIN,OPT=00,LINECNT=80,SIZE=0000K,
                         SOURCE,EBCDIC,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOEDIT,NOID,NOXREF
ISN 0002          SUBROUTINE CIT (PI)
                C  DATELE DE INTRARE SE INTRODUC PE DOUA CARTELE PE PRIMA MASA CONTRA GREUTATII
                C     PE A DOUA  S1,D1,S2,D2,S3,D3,ALFA1,BETA1,ALFA2,BETA2,ALFA3,BETA3
ISN 0003          COMMON/BL1/V(2,3),U(2,3),C(3,4)
ISN 0004          COMMON GR,GR1
ISN 0005          READ(1,1) GR,GR1
ISN 0006        1 FORMAT(2F6.2)
ISN 0007          WRITE(3,6)
ISN 0008        6 FORMAT('1'///' ',33X,'DATELE EXPERIMENTALE'/' ',31X,24('*'))
ISN 0009          WRITE(3,5) GR,GR1
ISN 0010        5 FORMAT(' '///' ',15X,'MS MIC=',F6.1,25X,'MD MIC=',F6.1)
ISN 0011          READ(1,2) ((V(I,J),I=1,2),J=1,3),((U(I,J),I=1,2),J=1,3)
ISN 0012        2 FORMAT(12F6.1)
ISN 0013          WRITE(3,3)
ISN 0014        3 FORMAT(' '//' ',5X,'COMPONENTELE VECTORULUI DIN STINGA',5X,
                  C'COMPONENTELE VECTORULUI DIN DREAPTA'/' '/' ',3X,
                  C'MODULUL VEC.S',9X,'UNGHIUL VEC.S',9X,'MODULUL VEC.D',4X,
                  C'UNGHIUL VEC. D'/' ')
ISN 0015          DO 17 I=1,3
ISN 0016          WRITE(3,4) (I,V(I,J),U(I,J),J=1,2)
ISN 0017        4 FORMAT(' ',4X,'S',I1,2X,F6.1,12X,F6.1,11X,'D',I1,2X,F6.1,12X,F6.1)
ISN 0018          X=1.
ISN 0019          U(I,J)=(U(I,J)*(ATAN(X)*4))/180.
ISN 0020          U(2,I)=(U(2,I)*(ATAN(X)*4))/180.
ISN 0021       10 CONTINUE
ISN 0022          RETURN
ISN 0023          END
```

Fig. 7 *a*

```
      COMPILER OPTIONS - NAME= MAIN,OPT=00,LINECNT=80,SIZE=0000K,
                         SOURCE,EBCDIC,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOEDIT,NOID,NOXREF
ISN 0002            SUBROUTINE PSI(A,B, ,ETA,Q)
ISN 0003            Q=SQRT(A*A+B*B)
ISN 0004            X=1.
ISN 0005            KY=1
ISN 0006            KX=1
ISN 0007            IF(A)20,10,30
ISN 0008         10 ETA=ATAN(X)*2
ISN 0009            IF(B.LT.0) ETA=ATAN(X)*2+ATAN(X)*4
ISN 0011            GO TO 70
ISN 0012         20 KX=-1
ISN 0013         30 CONTINUE
ISN 0014            IF(A-B)50,40,60
ISN 0015         40 K=(1-KX)/2
ISN 0016            ETA=K*ATAN(X)*4
ISN 0017            GO TO 70
ISN 0018         50 KY=-1
ISN 0019         60 CONTINUE
ISN 0020            K1=TABS((1+KX)/2-KY)
ISN 0021            ETA=K1*(ATAN(X)*4)+ATAN(B/A)
ISN 0022         70 CONTINUE
ISN 0023            RETURN
ISN 0024            END
```

Fig. 7 *b*

```
      COMPILER OPTIONS - NAME= MAIN,OPT=00,LINECNT=80,SIZE=0000K,
                         SOURCE,EBCDIC,NOLIST,NODECK,LOAD,NOMAP,NOEDIT,NOID,NOXREF
ISN 0002            SUBROUTINE SCRIE(PI)
ISN 0003            COMMON/BLI/V(2,3),U(2,3),C(3,4)/BL2/B(2)
ISN 0004            COMMON G8,GR1
ISN 0005            WRITE(3,1) (B(I),I=1,2)
ISN 0006          1 FORMAT(' '///' ',18X,
                     C'DATELE PENTRU ECHILIBRAREA UNUI ROTOR IN DOUA',
                     C' PLANE DE ECHILIBRARE'/16X,68('*')///' ',
                     C26X,'COEFICIENTII DE TRANSFER SINT ',6X,'AS-D=',
                     CF8.6,6X,'AD S=',F8.6,/' '24X,35('*')//)
ISN 0007            X=1.
ISN 0008            Q=(C(2,1)*180)/(ATAN(X)*4)
ISN 0009            CALL PSI(C(3,1),C(3,2),PI,Q1,Z)
ISN 0010            Q1=(Q1*180)/(ATAN(X)*4)
ISN 0011            Z1=(Z*GR)/C(1,1)
ISN 0012            WRITE(3,2) C(3,1),C(3,2),Q,Z,Z1,Q1
ISN 0013          2 FORMAT(' ',99('*')/' ','*',6X,2('*',13X),2('*',15X),'*',14X,
                     C'*',16X,'*'/' ','* PES * Q=',F9.5,' * S=',F9.5,' * GAMA=',F8.4,
                     C' * /S/=',F9.5,' * MS=',F9.5,' * ALFA=',F9.5,' *'/' ',
                     C'*',5X,2('*',13X),2('*',15X),'*',14X,'*',16X,'*'/' ',99('*'))
ISN 0014            Q=(C(2,4)*180)/(ATAN(X)*4)
ISN 0015            CALL PSI(C(3,2),C(3,4),PI,Q1,Z)
ISN 0016            Q1=(Q1*180)/(ATAN(X)*4)
ISN 0017            Z1=(Z*GR1)/C(1,4)
ISN 0018            WRITE(3,3) C(3,3),C(3,4),Q,Z,Z1,Q1
ISN 0019          3 FORMAT(' ','*',5X,2('*',13X),2('*',15X),'*',14X,'*',16X,'*'/' ',
                     C'* PED * Z=',F9.5,' * W=',F9.5,' * DELTA=',F7.3,' * /D/=',F9.5,
                     C' * MD=',F9.5,' * BETA=',F9.5,' *'/' ','*',5X,
                     C2('*',13X),2('*',15X),'*',14X,'*',16X,'*'/' ',99('*'))
ISN 0020            RETURN
ISN 0021            END
```

Fig. 7 *c*
Subrutinele CIT (PI), PSI(PI) și SCRIE(PI).

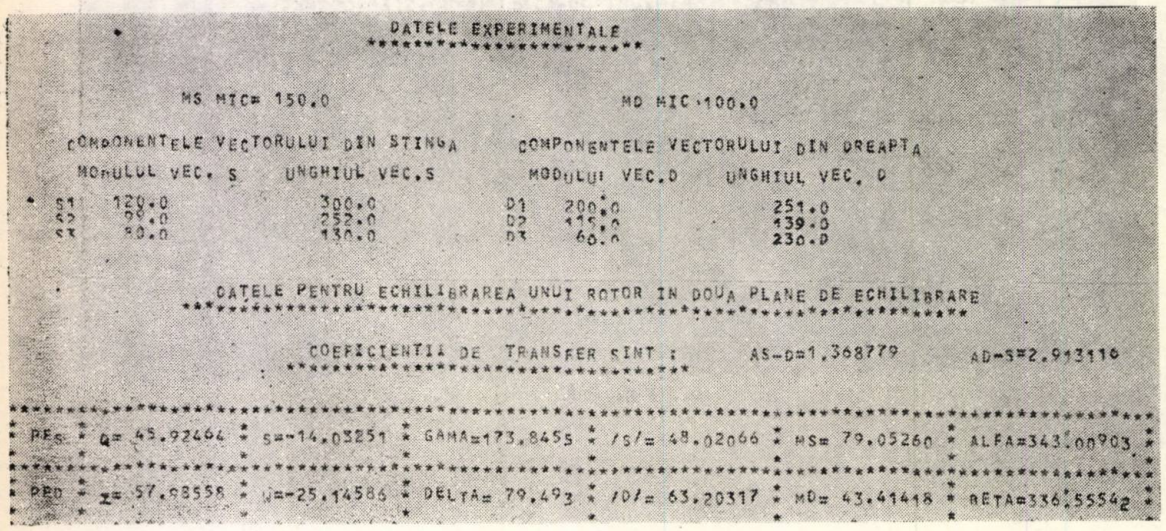


Fig 8 *a*

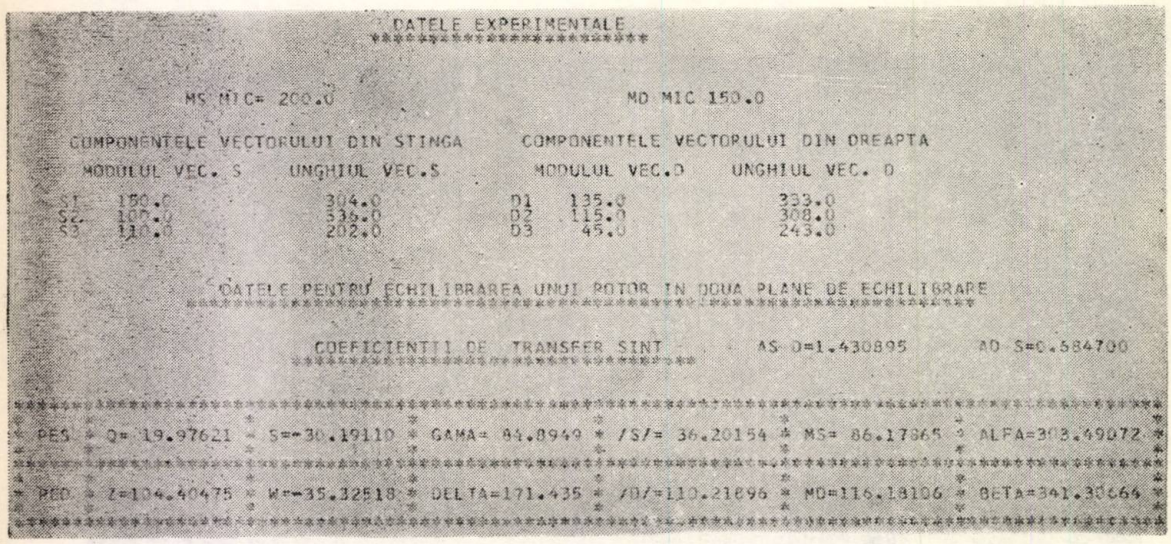


Fig. 8 *a, b.* — Calculul echilibrării în două cazuri concrete.

SOLICITĂRI STATICE ÎN MOTORUL LINIAR CU PISTON, AVÎND CURSA PISTOANELOR VERTICALĂ

de CONSTANTIN ACKER
Institutul politehnic Iaşi

Se înlătură confuzia frecventă între motorul liniar cu piston şi motorul tip bielă-manivelă „cu biela scurtă" egală cu manivela, relevîndu-se calităţi total diferite ale celor două tipuri de motoare, din punctul de vedere al solicitărilor statice.

Unul dintre motivele pentru care motorul liniar cu piston nu a ajuns încă şi la noi în ţară pe planşeta proiectantului — fie şi pentru construcţia unor prototipuri româneşti —(cu toate rezultatele experimentale impresionante obţinute cu acest motor, relatate din abundenţă în lucrări de specialitate apărute în ţară şi peste hotare), este acela că în lipsa cunoşterii mecanismului producerii solicitărilor, în special statice, din motorul liniar cu piston, specialiştii consideră acest motor drept motor tip bielă-manivelă „cu biela scurtă" egală cu manivela, de unde, teoretic, rezultă solicitări prea mari în lagărul ce leagă pistonul (sau tija pistonului) de bielă, implicînd prin aceasta temerea de deteriorare a mecanismului acestui motor în timpul funcţionării sale, firește toate acestea în lipsa unei documentaţii asupra dimensionării din punct de vedere al rezistenţei pentru piesele componente respective.

Solicitarea notată mai jos prin $\bar{L}_2$ este aceea al cărei modul maxim nu este cunoscut, constituind esenţa temerilor formulate mai sus.

Am procedat în consecinţă la scrierea ecuaţiilor de echilibru static pentru acest motor după cum urmează (fig. 1, 2, 3 redau succint schema de principiu a motorului liniar cu piston, cunoscută din publicaţiile apărute în ţară şi peste hotare):

I. *pentru forţele aplicate tijei Tx, cu pistoane la extremităţi şi avînd axa de simetrie longitudinală pe OX*, folosind polul de reducere 0 (fig. 3), în care planele XOY şi $X_iO_iY_i$, $i = 1, 2, 3$, conţin centrul de masă al piesei rigide $ABBC$, mai clar vizibilă în figurile 1, 2, forma acestei piese completîndu-se de regulă cu încă „un cot" şi un pinion 4 (fig. 1, 2) astfel încît să se realizeze o distribuţie simetrică a maselor în raport cu mijlocul (sau centrul geometric al barei AB din componenţa acestei piese completate rigide (fig. 4); reperul $XOYZ$ este solidar cu batiul);

II. *pentru forţele aplicate piesei ABBC completată ca în figura 4*, folosind drept pol de reducere mijlocul H (cen-

trul geometric) al porțiunii PA din componența acestei piese $QPABBC$, rigidă în totalitatea ei (fig. 4);

III. *pentru forțele aplicate tijei Ty, avînd axa de simetrie longitudinală pe Oy (și prevăzută cu sau fără pistoane la extremități)*, folosind polul de reducere 0;

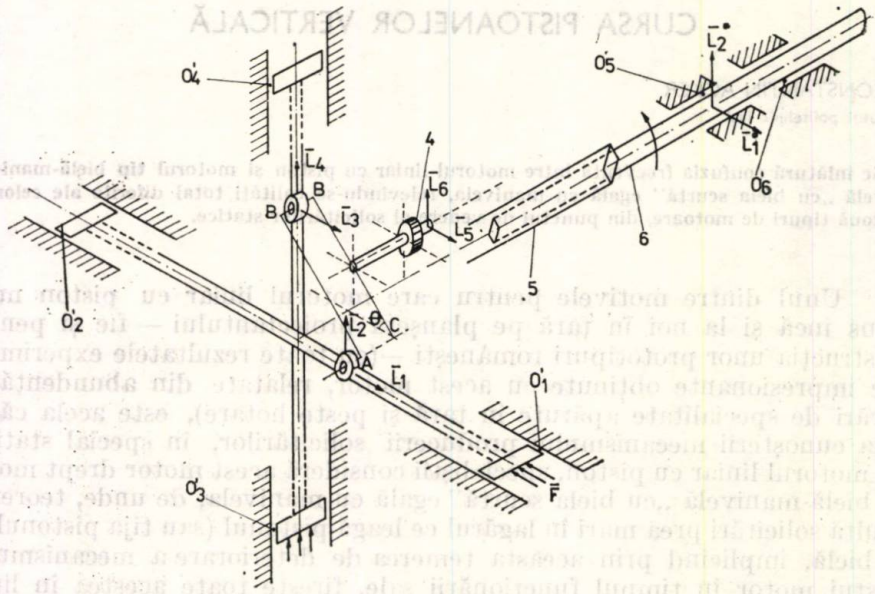


Fig. 1

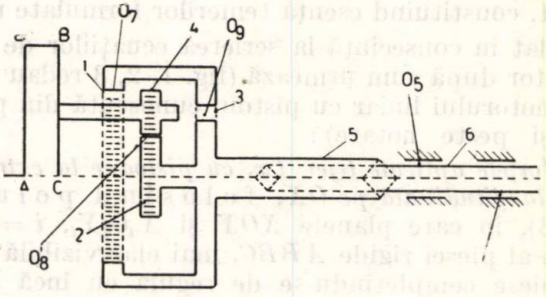


Fig. 2

IV. *pentru forțele aplicate arborelui motor (considerat împreună cu tot ce se rotește solidar cu acesta)*, folosind polii O'_9, O'_7 sau O'_8 (fig. 2, 3), după cum cuplarea arborelui motor se face prin manivela 3, prin coroana dințată interior 1, respectiv prin pinionul 2 (fig 2).

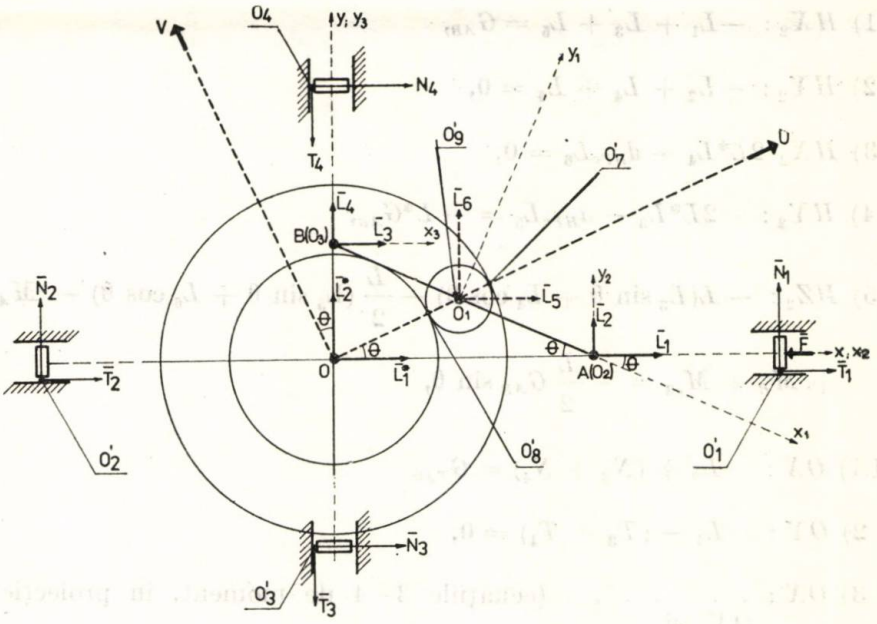


Fig. 3

Menționăm că am considerat cazul în care sînt active doar pistoanele de la extremitățile tijei Tx, deci caz în care avem un singur element conducător al mecanismului respectiv.

Precizăm, de asemenea, că vom presupune v e r t i c a l ă cursa activă a pistoanelor de la extremitățile tijei Tx (axa Ox o considerăm verticală ascendentă).

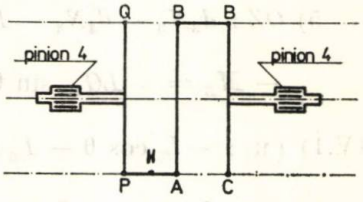


Fig. 4

Cu aceste precizări, în cazul în care arborele motor este cuplat prin manivela 3 (fig. 2), obținem sistemul (S) al ecuațiilor de echilibru static de mai jos :

I. 1) OX : $(T_1 + T_2) + L_1 = F + G_{Tx}$,

2) OY : $(N_1 + N_2) + L_2 = 0$,

3) OX : . . . . . (ecuațiile de moment 3—4, în proiecție pe OX și

4) OY : . . . . . .pe OY, se obțin identice precedentelor 1—2),

5) OZ : $d_1N_1 - d_2N_2 + L(N_1 + N_2)\cos\theta + r_p(T_1 + T_2) + L_2L\cos\theta + M_A = 0$,

II.1) $HX_2: -L_1 + L_3 + L_5 = G_{AB}$,

2) $HY_2: -L_2 + L_4 + L_6 = 0$,

3) $HX_2\ 2L^*L_4 + d_{HPc}L_6 = 0$,

4) $HY_2: -2L^*L_3 - d_{HPc}L_5 = -L^*G_{AB}$,

5) $HZ_2: -L(L_3 \sin\theta + L_4 \cos\theta) - \frac{L}{2}(L_5 \sin\theta + L_6 \cos\theta) - M_A +$

$+ M_B + M_{c3} = -\frac{L}{2} G_{AB} \sin\theta$,

III.1) $OX: -L_3 + (N_3 + N_4) = G_{Ty}$,

2) $OY: -L_4 - (T_3 + T_4) = 0$,

3) OX: . . . . . (ecuaţiile 3—4 de moment, în proiecţie pe OX şi

4) OY: . . . . . pe OY, se obţin identice precedentelor 1—2),

5) $OZ: d_3N_3 - d_4N_4 - L(N_3 + N_4)\sin\theta + r_p(T_3 + T_4) + L_3L\sin\theta -$

$- M_B = -LG_{Ty}\sin\theta$,

IV.1) $(\bar{u}): -L_5\cos\theta - L_6\sin\theta + L_1^*\cos\theta + L_2^*\sin\theta = G_{ax}\cos\theta$,

2) $(\bar{v}): L_5\sin\theta - L_6\cos\theta - L_1^*\sin\theta + L_2^*\cos\theta = -G_{ax}\sin\theta$,

3) $(\bar{u}): -L_1^*\sin\theta + L_2^*\cos\theta = \frac{G_{ax}}{d_{P_cP_L}}[z_c(ax) + d_{pc}]\cdot\sin\theta$,

4) $(\bar{v}): -L_1^*\cos\theta - L_2^*\sin\theta = \frac{G_{ax}}{d_{P_cP_L}}[z_c(ax) + d_{pc}]\cdot\cos\theta$,

5) $(\bar{k}): -r_{c3}(L_5\cos\theta + L_6\sin\theta) + r_{c3}(L_1^*\cos\theta + L_2^*\sin\theta) +$

$+\frac{L}{2}(L_1^*\sin\theta - L_2^*\cos\theta) - M_{Lax} - M_{c3} = G_{ax}\left(\frac{L}{2}\sin\theta + r_{c3}\cos\theta\right)$.

Dacă arborele motor se cuplează prin coroana dinţată interior 1, modificările în sistemul (S) al ecuaţiilor de echilibru static, pentru motorul liniar cu piston, sînt puţine şi anume :

în ecuația II_5 apare în membrul I, în plus, termenul

$$-r(L_5 \sin \theta - L_6 \cos \theta),$$

iar ecuația IV_5 devine (folosind polul de reducere O_7')

$$-\left(\frac{L}{2} + r\right)(-L_1^* \sin \theta + L_2^* \cos \theta) - M_{Lax} - M_{0_7'} = G_{ax}\left(\frac{L}{2} + r\right)\sin \theta.$$

Dacă arborele motor este cuplat prin pinionul 2, modificările în sistemul de ecuații (S) de mai sus sînt de asemenea puține, anume: în ecuația II_5 apare în membrul I, în plus, termenul

$$r(L_5 \sin \theta - L_6 \cos \theta),$$

iar ecuația IV_5 devine (folosind polul de reducere O_8')

$$-\left(\frac{L}{2} - r\right)(-L_1^* \sin \theta + L_2^* \cos \theta) - M_{Lax} - M_{0_8'} = G_{ax}\left(\frac{L}{2} - r\right)\sin \theta.$$

În figurile 1, 3, în afară de forța $\bar{F}$, considerată forță concentrată aplicată pistonului din dreapta și avînd ca dreaptă suport axa de simetrie longitudnală a tijei Tx, se relevă forțele de legătură ce intervin în ecuațiile I — II — III — IV și anume:

a) $\bar{L}_1$ și $\bar{L}_2$ în articulația cilindrică A (fig. 1), concomitent cu momentul rezistent din acest lagăr $\bar{M}_A$, de modul maxim $\mu^{**} r_A \sqrt{L_1^2 + L_2^2}$ (μ^{**} = coeficient de frecare în lagăr și r_A = raza secțiunii axului articulației din A);

b) $\bar{L}_3$ și $\bar{L}_4$ în articulația cilindrică B (fig. 1), o dată cu momentul rezistent din acest lagăr $\bar{M}_B$, de modul maxim $\mu^{***} r_B \sqrt{L_3^2 + L_4^2}$ (μ^{***} = coef. de frecare în lagăr și r_B = raza secțiunii axului articulației din B);

c) $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ ca reacțiuni la simpla rezemare a pistoanelor tijei Tx în cilindrii respectivi, cu punctele de aplicație la distanțele (nedeterminate) d_1, respectiv d_2 de dreapta suport a forței $\bar{L}_2$, precum și forțele respective de frecare $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, de moduli maximi μN_1 și μN_2 (μ = coeficient de frecare la alunecare a pistoanelor în cilindri);

d) $\bar{N}_3$ și $\bar{N}_4$ ca reacțiuni la simpla rezemare a pistoanelor tijei Ty în cilindrii respectivi, cu punctele de aplicație la distanțele (nedeterminate) d_3 și d_4 față de dreapta suport a forței $\bar{L}_3$, precum și forțele de frecare corespunzătoare $\bar{T}_3$ și $\bar{T}_4$, de moduli maximi μN_3 și μN_4 (μ = coeficient de frecare la alunecare a pistoanelor în cilindri, considerat cu aceeași valoare ca aceea de la punctul precedent c);

e) $\bar{L}_5$ și $\bar{L}_6$ în butonul manivelei 3 (fig. 2), sau în punctele de angrenare O_7' sau O_8' (fig. 2, 3), la antrenarea arborelui motor respectiv prin manivela 3, prin angrenarea coroanei dințate interior 1, sau prin angrenarea pinionului 2 (fig. 2); concomitent s-a considerat — în cazul cuplării arborelui motor prin manivela 3 — momentul rezistent din lagărul manivelei

3 notat $\bar{M}_{c3}$, de modul maxim $\mu'' r_{c3}\sqrt{L_5^2 + L_6^2}$ (μ'' = coeficient de frecare în lagărul 3 și r_{c3} = raza secțiunii axului din lagărul 3), sau momentul rezistent la rostogolire $\bar{M}_{0_7'}$, sau $\bar{M}_{0_8'}$, de modul maxim $s^* \sqrt{(L_5 \cos\theta + L_6 \sin\theta)^2}$ (fig. 3) în cazul antrenării arborelui motor prin coroana dințată interior 1, respectiv prin pinionul 2 (fig. 2) (s^* = coeficient de frecare la rostogolire);

f) $\bar{L}_1^*$ și $\bar{L}_2^*$ în lagărul arborelui motor și momentul rezistent din acest lagăr $\bar{M}_{Lax}$, de modul maxim $\mu^* r_{ax}\sqrt{L_1^{*2} + L_2^{*2}}$($\mu^*$ = coeficient de frecare în lagărul arborelui motor, r_{ax} = raza secțiunii arborelui motor).

Alte mărimi ce intervin în ecuațiile sistemului (S) sînt: greutățile pieselor componente $\bar{G}_{Tx}$, $\bar{G}_{AB}$, $\bar{G}_{Ty}$, $\bar{G}_{ax}$ proprii tijei Tx, piesei $QPABBC$, tijei Ty, respectiv arborelui motor (considerat împreună cu tot ce se rotește solidar cu acesta); L lungimea barei AB din componența piesei $QPABBC$; unghiul θ din figurile 1, 3: L^* semidistanța între axele de simetrie longitudinale ale tijelor Tx și Ty; $z_c(ax)$ cota, în reperul $XOYZ$, a centrului de greutate al arborelui motor, considerat împreună cu tot ce se rotește solidar cu acesta; d_{pc} distanța de la centrul de masă al piesei $QPABBC$ pînă la „planul" ce conține cupla cinematică 3 (sau butonul manivelei 3), respectiv pînă la „planul" ce conține dantura coroanei dințate interior 1 sau dantura pinionului 2, după modul de cuplare al arborelui motor; d_{HPc} distanța de la mijlocul H al porțiunii PA din componența piesei $QPABBC$ pînă la „planul" de cuplare al arborelui motor; $d_{P_cP_L}$ distanța de la „planul" de cuplare al arborelui motor pînă la „planul" lagărului în care se sprijină arborele motor; r_p raza secțiunii pistoanelor; r raza secțiunii pinionului 4(fig. 1,2).

Din ecuațiile IV_3, IV_4 urmează

$$(1) \qquad L_1^* = -\frac{G_{ax}}{d_{P_cP_L}}[z_c(ax) + d_{pc}], \quad L_2^* = 0,$$

ecuațiile IV_1, IV_2 dau atunci

$$(2) \qquad L_5 = -G_{ax}\left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{P_cP_L}}\right), \quad L_6 = 0,$$

ecuațiile II_3, II_4 conduc, în continuare, la

$$(3) \qquad L_3 = \frac{G_{AB}}{2} + G_{ax} \cdot \frac{d_{HPc}}{2L^*} \cdot \left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{P_cP_L}}\right), \quad L_4 = 0,$$

iar ecuațiile II_1, II_2 dau

$$(4) \quad L_1 = -\frac{G_{AB}}{2} + G_{ax} \cdot \left(\frac{d_{HPc}}{2L^*} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{P_cP_L}}\right), \quad L_2 = 0;$$

de asemenea, din ecuațiile I_1, I_2 urmează

$$(5)\quad T_1 + T_2 = F + G_{Tx} + \frac{G_{AB}}{2} - G_{ax}\cdot\left(\frac{d_{HPc}}{2L^*} - 1\right)\cdot\left(1 + \frac{z_c(ax)+d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$N_1 + N_2 = 0,$$

iar ecuațiile III_1, III_2 conduc la

$$(6)\quad N_3+N_4=G_{Ty}+\frac{G_{AB}}{2}+G_{ax}\cdot\frac{d_{HPc}}{2L^*}\cdot\left(1+\frac{z_c(ax)+d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),\quad T_3+T_4=0.$$

Observații.

1) Schimbînd semnul termenilor ce conțin F în ecuațiile sistemului (S), sau direct în rezultatele menționate, obținem situația solicitărilor pe intervalul $\theta\in(180°, 360°)$, anume singură suma $T_1 + T_2$ își schimbă valoarea, celelalte rezultate rămînînd nemodificate — toate acestea cînd pistoanele tijei Tx lucrează în 2 timpi—; dacă pe intervalul $\theta\in(180°, 360°)$ pistoanele tijei Tx nu resimt presiunea gazelor din camerele de ardere, atunci suma $T_1 + T_2$ își scimbă de asemenea valoarea (de data aceasta prin anularea lui F), celelalte rezultate păstrîndu-se nemodificate.

2) Solicitările, cu direcția perpendiculară pe tija Tx (care este element conducător), în lagărul arborelui motor, în lagărul cuplei cinematice 3 (respectiv la contactul între pinionul 4 cu coroana dințată interior 1, sau cu pinionul 2), în lagărele A și B (fig. 1), precum și sumele $N_1 + N_2$ și $T_3 + T_4$, *au valori nule*, iar celelalte mărimi obținute (în cea mai mare parte) *au valori mărginite*, ele fiind funcții exclusiv de greutățile proprii ale pieselor componente din mecanismul motorului liniar cu piston și de unele dimensiuni (mici) definite mai sus.

3) Valorile mărginite ale modulilor forțelor de legătură obținute rezultă constante (nedepinzînd de poziția mecanismului respectiv), ele putînd deci fi încă reglate (simplu) prin parametrii tehnici ce intervin în expresiile lor, încît precizînd convenabil acești parametri — anume $z_c(ax)$ (<0), d_{pc}, d_{PcP_L}, d_{HPc}, L^* și valorile greutăților proprii ale celor 4 piese Tx, $QPABBC$, Ty și arborele motor (socotit împreună cu tot ce se rotește solidar cu acesta) — putem ajunge la niște valori neînsemnate ale solicitărilor (de exemplu, dacă plasăm centrul de greutate al arborelui motor în primul lagăr în care acesta se sprijină, atunci realizăm î n p l u s

$$L_5 = 0,\ L_1^* = G_{ax},\ L_3 = -L_1 = \frac{G_{AB}}{2},\ N_3 + N_4 = G_{Ty} + \frac{G_{AB}}{2}\Big),$$

ceea ce explică „lipsa solicitărilor" în motor, constatată experimental și menționată de S. S. Balandin în cartea sa [1], contribuindu-se astfel și la explicarea randamentului mecanic (94%) și a fiabilității înalte pe care le prezintă motorul liniar cu piston.

4) Calităţi ca cele explicate mai sus, precum şi gabaritul extrem de scăzut, incomparabil mai mic decît al motorului tip bielă-manivelă, puterea specifică de 3000 CP/m^3, materialele cu totul frecvent folosite pe care le reclamă construcţia sa, mai buna şi mai economica organizare a procesului producţiei sale comparativ cu cea existentă, micile modificări în procesul tehnologic existent pe care le reclamă punerea producţiei sale în flux continuu, ş.a., recomandă insistent acest motor specialiştilor în domeniul construcţiei motoarelor cu piston, din ţară.

Primită la redacţie la 10 august 1978

BIBLIOGRAFIA

1. S. S. Balandin, *Motoare cu piston fără bielă*, Moscova, 1968.
2. L. Leonidov, *Un motor remarcabil*, Revista Sputnik, *2*, 99 (1970).
3. V. Vilcovici, Şt. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Bucureşti, 1968.

CALCULUL GEOMETRIC NELINIAR AL STRUCTURILOR SPAȚIALE FORMATE DIN BARE

de VALERIU BĂNUȚ

Institutul de construcții București

În lucrare se prezintă aspectele teoretice și practice ale calculului geometric neliniar — calculul de ordinul II — al structurilor spațiale formate din bare. Se stabilește expresia matricei de rigiditate secantă și a matricei de rigiditate tangentă pentru elementul de bară. În final, se prezintă rezultatele calculului practic al unei structuri metalice, punîndu-se în evidență influența schimbării geometriei structurii asupra mărimii eforturilor.

1. INTRODUCERE

Structurile de rezistență în formă de cadre sînt calculate în mod obișnuit ca structuri plane — totdeauna în sens transversal și uneori în sens longitudinal. Pentru majoritatea construcțiilor un asemenea calcul este satisfăcător.

Există însă structuri de rezistență, ca, de exemplu, turnurile pentru susținerea cazanelor în termocentrale, turnurile pentru susținerea coșurilor de evacuarea gazelor nocive din industria chimică, platformele de foraj marin etc. la care datorită conformației lor, calculul spațial este absolut necesar. În plus, unele dintre aceste structuri, pe lîngă faptul că sînt foarte înalte, au de suportat forțe verticale și orizontale mari.

În asemenea condiții influența schimbării geometriei structurii asupra mărimii eforturilor devine importantă și trebuie luată în considerație pe baza unui calcul corespunzător.

Calculul de ordinul II este în general puțin utilizat chiar și pentru structurile plane. Un asemenea calcul pentru structurile spațiale este foarte puțin tratat în literatura de specialitate și cu atît mai puțin folosit în practica proiectării. Așa cum va rezulta din cele prezentate în această lucrare, calculul spațial de ordinul II se impune ca o necesitate pentru anumite tipuri de structuri, deși la inconvenientele calculului structurilor plane se adaugă și faptul că matricea de rigiditate pentru elementul spațial are dimensiuni de 12×12 și ca atare implică un cost mai mare al calculului prin utilizarea de periferice.

Programul de calcul întocmit utilizează o metodă iterativă și operează în memoria internă de 128 K. Performanțele și rezultatele obținute în asemenea condiții cu programul denumit CASPAN sînt prezentate în partea finală a lucrării.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 2, 1979, P. 259–271

2. MATRICELE DE RIGIDITATE ALE BAREI ÎN CALCULUL SPAȚIAL DE ORDINUL II

Se consideră bara $i - j$ din figura 1, cu sistemul local de axe și sistemul local de coordonate, reprezentînd deplasările nodurilor.

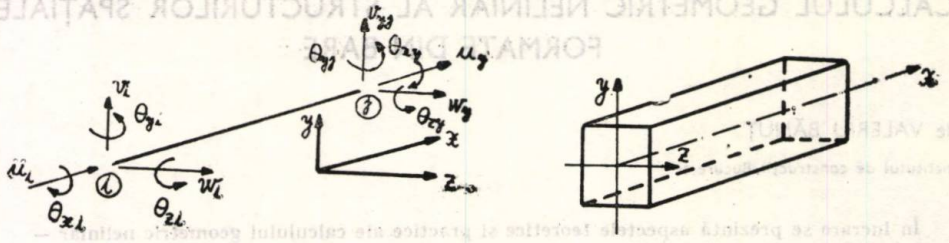


Fig. 1

Vectorul deplasărilor nodurilor se notează cu $\boldsymbol{u}$, iar vectorul eforturilor se notează cu $\boldsymbol{S}$. Expresiile acestor vectori sînt:

$$\boldsymbol{u}^T = \{u_i v_i w_i \theta_{xi} \theta_{yi} \theta_{zi}\ u_j v_j w_j\ \theta_{xj} \theta_{yj} \theta_{zj}\},$$

$$\boldsymbol{S}^T = \{N_i T_{yi} T_{zi} M_{xi} M_{yi} M_{zi} N_j T_{yj} T_{zj} M_{xj} M_{yj} M_{zj}\}. \tag{1}$$

Deplasările secțiunii curente, de abscisă x, se aleg de următoarea formă:

$$\begin{aligned} u_x &= \alpha + \alpha_1 x, \\ v_x &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3, \\ w_x &= \delta + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3, \\ \theta_x &= \varphi + \varphi_1 x, \end{aligned} \tag{2}$$

unde u_x reprezintă translația secțiunii transversale pe direcția axei x, v_x — translația pe direcția axei y, w_x — translația pe direcția axei z, iar θ_x — rotirea secțiunii prin torsionarea barei.

Alegerea cîmpului de deplasări sub forma (2) este în concordanță cu legea de variație a eforturilor în lungul barei în cazul încărcării cu forțe numai în secțiunile de la capete.

Referitor la convenția de semne adoptată în figura 1 este de observat că pentru încovoierea în planul xy bara este privită de la nodul i către nodul j, în timp ce pentru încovoierea în planul xz bara trebuie privită de la nodul j către nodul i.

Constantele din expresiile (2) se determină din condițiile de capăt·

Efectul deformațiilor axiale și de torsiune:
— pentru $x = 0$ rezultă

$$\alpha = u_i \text{ și } \varphi = \theta_{xi},$$

— pentru $x = l$ rezultă

$$\alpha_1 = \frac{u_j - u_i}{l} \text{ și } \varphi_1 = \frac{\theta_{xj} - \theta_{xi}}{l}.$$

Efectul încovoierii în planul xy:
— pentru $x = 0$ rezultă

$$\beta = v_i \text{ și } \beta_1 = \theta_{zi},$$

— pentru $x = l$ rezultă (3)

$$\beta_2 = \frac{3(v_j - v_i) - l(2\theta_{zi} + \theta_{zj})}{l^2} \text{ și } \beta_3 = \frac{2(v_i - v_j) + l(\theta_{zi} + \theta_{zj})}{l^3}.$$

Efectul încovoierii în planul xz:
— pentru $x = 0$ rezultă

$$\delta = w_i \text{ și } \delta_1 = \theta_{yi},$$

— pentru $x = l$ rezultă

$$\delta_2 = \frac{3(w_i - w_j) - l(\theta_{yi} + 2\theta_{yj})}{l^2} \text{ și } \delta_3 = \frac{2(w_j - w_i) + l(\theta_{yi} + \theta_{yj})}{l^3}.$$

Cu aceste expresii ale constantelor cîmpul de deplasări (2) capătă forma:

$$u_x = (1 - \xi)\, u_i + \xi u_j \text{ unde } \xi = \frac{x}{l},$$

$$v_x = (1 - 3\xi^2 + 3\xi^3)v_i + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\, l\theta_{zi} + (3\xi^2 - 2\xi^3)\, v_j -$$

$$- (\xi^2 - \xi^3)\, l\theta_{zj}, \tag{4}$$

$$w_x = (3\xi^2 - 2\xi^3)w_i - (\xi^2 - \xi^3)\, l\theta_{yi} + (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\, w_j +$$

$$+ (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\, l\theta_{yj},$$

$$\theta_x = (1 - \xi_{xi})\, \theta + \xi\theta_{xj}.$$

Energia de deformație, în cazul barei solicitate spațial, are expresia :

$$W = \frac{E}{2}\int_v \varepsilon_x^2 \, dV + \frac{G}{2}\int_v \gamma_x^2 \cdot dV, \tag{5}$$

ε_x și γ_x fiind deformațiile specifice, liniară și respectiv, unghiulară.

În calculul de ordinul II relația deformație specifică-deplasare este :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 - y\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2},$$
$$\gamma_x = r\frac{\partial \theta_x}{\partial x}. \tag{6}$$

Introducînd (6) în (5), neglijînd termenii de ordinul IV și ținînd seama că $\int_A y \cdot dA = S_z = 0$, $\int_A z \cdot dA = S_y = 0$, $\int_A yz \cdot dA = I_{yz} = 0$, $\int_A y^2 \cdot dA = I_z$, $\int_A z^2 \cdot dA = I_y$ și $\int_A r^2 \cdot dA = J$, energia de deformație capătă forma :

$$W = \frac{EA}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dx +$$
$$+ \frac{EA}{2}\int_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EI_z}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right)^2 dx + \tag{7}$$
$$+ \frac{EI_y}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{GJ}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Aplicînd energiei de deformație prima teoremă a lui Casigliano, se obțin eforturile pe direcțiile tuturor coordonatelor funcție de deplasări, respectiv relația efort-deplasare :

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = S_i, \qquad i = 1,12. \tag{8}$$

Forma matriceală a relației efort-deplasare este

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}_s \cdot \boldsymbol{u}, \tag{9}$$

unde $\boldsymbol{k}_s$ reprezintă matricea de rigiditate secantă.

Această matrice poate fi scrisă în modul următor :

$$\boldsymbol{k}_s = \boldsymbol{k}_E + \boldsymbol{k}_{GS}, \tag{10}$$

unde $\boldsymbol{k}_E$ este matricea de rigiditate corespunzătoare calculului de ordinul I și are forma (11), iar $\boldsymbol{k}_{GS}$ este matricea de rigiditate geometrică secantă care conține efectul neliniarității geometrice.

$$
\boldsymbol{k}_E = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12\,EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\
 & & \frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
 & & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4\,EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
 & & & & & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
 & & & & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
 & & & & & & & & \frac{12\,EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{l}
\end{bmatrix}
$$

Simetrică

(11)

Elementele matricei $\boldsymbol{k}_{GS}$ diferite de zero au expresiile (12) și respectă proprietatea $k_{ij} = k_{ji}$,

$$k_{12} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{3(v_j - v_i)}{5} - \frac{l(\theta_{zi} + \theta_{zj})}{20}\right] \quad \text{cu} \quad k_{12} = -k_{18} = -k_{27} = k_{78},$$

$$k_{13} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{3(w_j - w_i)}{5} - \frac{l(\theta_{yi} + \theta_{yi})}{20}\right] \quad \text{cu} \quad k_{13} = -k_{19} = -k_{37} = k_{79},$$

$$k_{15} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l(w_i - w_j)}{20} - \frac{l^2(4\theta_{yi} - \theta_{yj})}{60}\right. \quad \text{cu} \quad k_{15} = -k_{57},$$

$$k_{16} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l(v_j - v_i)}{20} - \frac{l^2\,(4\theta_{zi} - \theta_{zj})}{60}\right] \qquad k_{16} = -k_{67},$$

$$k_{1,11} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l\,(w_i - w_j)}{20} + \frac{l^2\,(\theta_{yi} - 4\theta_{yi})}{60}\right] \quad \text{cu } k_{1,11} = -k_{7,11}, \qquad (12)$$

$$k_{1,12} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l\,(v_j - v_i)}{20} + \frac{l^2\,(\theta_{zi} - 4\theta_{zj})}{60}\right] \quad \text{cu} \quad k_{1,12} = -k_{7,12},$$

$$k_{22} = \frac{EA}{l^2} \cdot \frac{3(u_j - u_i)}{5} \quad \text{cu} \quad k_{22} = -k_{28} = k_{33} = -k_{39} = k_{77} = k_{88}$$

$$k_{26} = \frac{EA}{l^2} \cdot \frac{l(u_j - u_i)}{20} \quad \text{cu} \quad k_{26} = k_{2,12} = -k_{35} = -k_{3,11} = k_{59} = -$$

$$-k_{68} = -k_{8,12} = k_{9,10},$$

$$k_{55} = \frac{EA}{l^2} \cdot \frac{l^2(u_j - u_i)}{15} \quad \text{cu } k_{55} = k_{66} = k_{11,11} = k_{12,12},$$

$$k_{5,11} = -\frac{EA}{l^2} \cdot \frac{l^2(u_j - u_i)}{60} \quad \text{cu} \quad k_{5,11} = k_{6,12}.$$

Aplicînd relației (8) încă odată prima teoremă a lui Castigliano, se obține

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \cdot \partial u_j} = \frac{\partial S_i}{\partial u_j} = k_{ij}, \; i = 1,12; \qquad (13)$$

ceea ce reprezintă relația dintre variația eforturilor și variația deplasărilor. Matriceal, această relație are forma

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{k}_T \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u}, \qquad (14)$$

unde $\boldsymbol{k}_T$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă. Această matrice se poate exprima, ca și matricea de rigiditate secantă, în modul următor:

$$\boldsymbol{k}_T = \boldsymbol{k}_E + \boldsymbol{k}_{GT}, \tag{15}$$

unde $\boldsymbol{k}_E$ are tot forma (11), iar $\boldsymbol{k}_{GT}$ este matricea de rigiditate geometrică tangentă. Elementele sale diferite de zero au forma (16).

$$k_{12} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{6(v_j - v_i)}{5} - \frac{l(\theta_{zi} + \theta_{zj})}{10}\right],$$

$$k_{13} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{6(w_j - w_i)}{5} + \frac{l(\theta_{yi} + \theta_{yj})}{10}\right],$$

$$k_{15} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l(w_i - w_j)}{10} - \frac{l^2(4\theta_{yi} - \theta_{yj})}{30}\right],$$

$$k_{16} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l(v_j - v_i)}{10} - \frac{l^2(4\theta_{zi} - \theta_{zj})}{30}\right],$$

$$k_{1,11} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l(w_i - w_j)}{10} - \frac{l^2(4\theta_{yj} - \theta_{yi})}{30}\right], \tag{16}$$

$$k_{1,12} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{l(v_j - v_i)}{10} - \frac{l^2(4\theta_{zj} - \theta_{zi})}{30}\right],$$

$$k_{22} = \frac{EA}{l^2}\left[\frac{6(u_j - u_i)}{5}\right],$$

$$k_{26} = \frac{EA}{l^2} \cdot \frac{l(u_j - u_i)}{10},$$

$$k_{55} = \frac{EA}{l^2} \cdot \frac{2l^2(u_j - u_i)}{15},$$

$$k_{5,11} = \frac{-EA}{l^2} \cdot \frac{l^2(u_j - u_i)}{30}.$$

În același mod se poate stabili expresia matricei de rigiditate secantă și de rigiditate tangentă la bara dublu articulată, bară utilizată în

alcătuirea sistemelor planare. Expresiile matricelor $\boldsymbol{k}_{GS}$ și $\boldsymbol{k}_{GT}$ pentru aceste bare sînt date în (17) și (18).

$$\boldsymbol{k}_{GS} = \frac{EA}{l^2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{v_j - v_i}{2} & \frac{w_j - w_i}{2} & 0 & \frac{v_i - v_j}{2} & \frac{w_i - w_j}{2} \\ \frac{v_j - v_i}{2} & \frac{u_j - u_i}{2} & 0 & \frac{v_i - v_j}{2} & \frac{u_i - u_j}{2} & 0 \\ \frac{w_j - w_i}{2} & 0 & \frac{u_j - u_i}{2} & \frac{w_i - w_j}{2} & 0 & \frac{u_i - u_j}{2} \\ 0 & \frac{v_i - v_j}{2} & \frac{w_i - w_j}{2} & 0 & \frac{v_j - v_i}{2} & \frac{w_j - w_i}{2} \\ \frac{v_i - v_j}{2} & \frac{u_i - u_j}{2} & 0 & \frac{v_j - v_i}{2} & \frac{u_j - u_i}{2} & 0 \\ \frac{w_i - w_j}{2} & 0 & \frac{v_i - v_j}{2} & \frac{w_j - w_i}{2} & 0 & \frac{u_j - u_i}{2} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\boldsymbol{k}_{GT} = \frac{EA}{l^2}\begin{bmatrix} 0 & v_j - v_i & w_j - w_i & 0 & v_i - v_j & w_i - w_j \\ v_j - v_i & u_j - u_i & 0 & v_i - v_j & u_i - u_j & 0 \\ w_j - w_i & 0 & u_j - u_i & w_i - w_j & 0 & u_i - u_j \\ 0 & v_i - v_j & w_i - w_j & 0 & v_j - v_i & w_j - w_i \\ v_i - v_j & u_i - u_j & 0 & v_j - v_i & u_j - u_i & 0 \\ w_i - w_j & 0 & u_i - u_j & w_j - w_i & 0 & u_j - u_i \end{bmatrix}. \quad (18)$$

3. EXEMPLE DE CALCUL

Programul de calcul CASPAN operează în memoria centrală de 128K și permite, teoretic, rezolvarea structurilor cu următoarele caracteristici :

Lățimea benzii	30	36	42	48	54	60	66
Număr de noduri	88	75	65	58	52	48	45

Pentru testarea posibilităților programului s-au rezolvat mai multe structuri printre care și cadrul metalic din figura 2, cu 42 de noduri și

lățimea benzii de 54. Timpul de calcul pentru 4 cicluri iterative a fost de 21 minute, în fiecare ciclu de calcul fiind listate deplasărilor nodurilor și eforturile pentru fiecare capăt de bară.

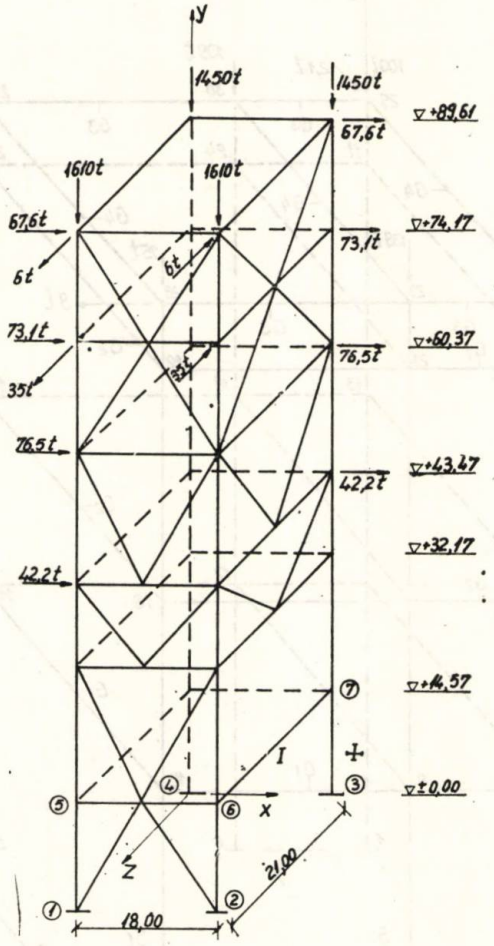


Fig. 2

Analiza comportării structurilor spațiale la încărcări orizontale variabile, utilizînd calculul de ordinul II, s-a realizat pentru cadrul din figura 3. Acest cadru a fost calculat pentru forțele orizontale din figura 3 (notate generic cu H) precum și pentru forțe orizontale de 1.5 H și $2H$. Forma secțiunilor barelor cadrului este dată în figura 4. Timpul de calcul pentru o singură ipoteză a fost de 14 minute, fiind necesare cîte șase cicluri de calcul.

În tabelele 1 și 2 se prezintă variația deplasrilor u_x și u_z pentru cîteva noduri și, respectiv, variația momentelor de torsiune și a momen-

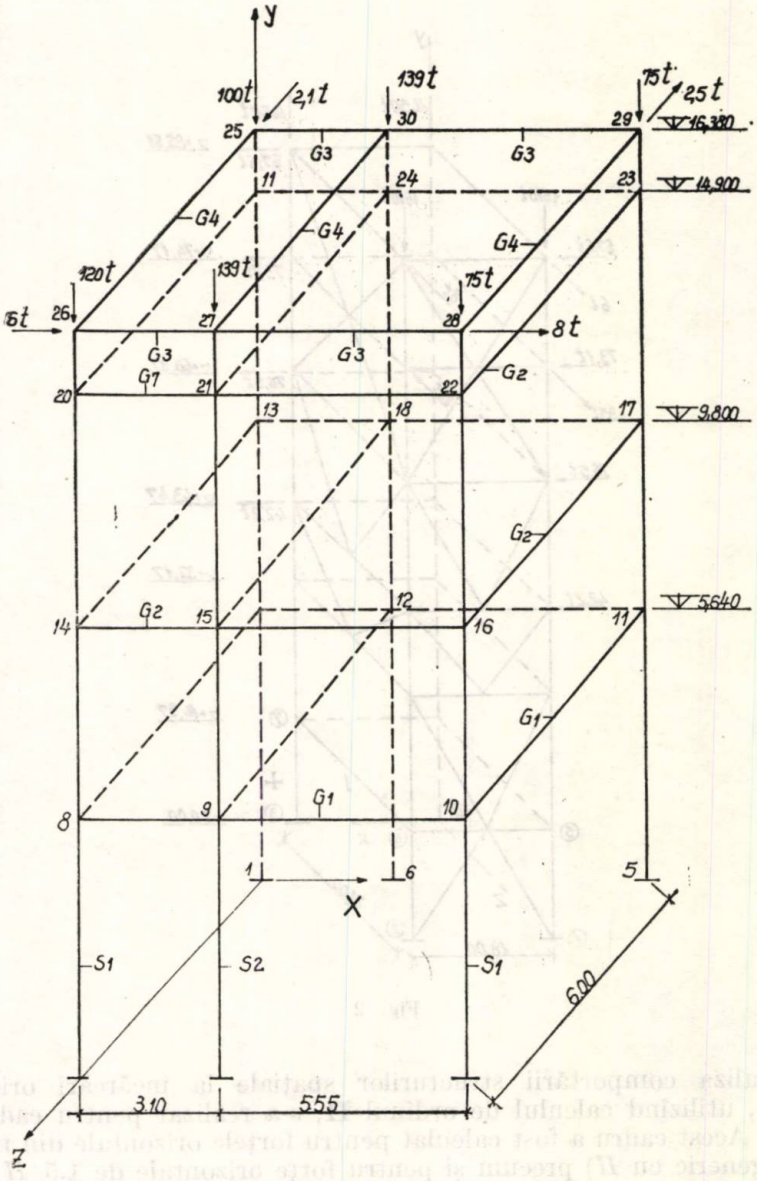

y
100t
2,1t
139t
75t
2,5t
25
30
29
16,380
G3
G3
11
24
23
14,900
G4
G4
G4
120t
139t
75t
15t
26
27
28
8t
G3
G3
G7
21
22
G2
20
13
18
17
9,800
G2
G2
14
15
12
16
11
5,640
G1
8
9
G1
10
1
6
5
X
S1
S2
S1
6,00
3,10
5,55
Z

Fig. 3

Tabela 1

Nodul	Deplasarea	Deplasările în ciclurile de calcul 1 și 6					
		H		1,5 H		2 *H*	
		1	6	1	6	1	6
8	U_x	1,29	1,42	1,67	1,87	2,23	2,49
	U_z	0,58	0,66	1,02	1,16	1,37	1,59
16	U_x	2,49	2,75	3,240	3,57	4,33	4,83
	U_z	−1,50	−1,71	−0,20	−0,26	−0,27	−0,45
22	U_x	4,03	4,45	5,29	5,84	7,076	7,91
	U_z	−2,38	−2,70	−0,20	−0,29	−0,28	−0,55
28	U_x	4,14	4,58	5,45	6,01	7,29	8,16
	U_z	−2,45	−2,78	−0,20	−0,28	−0,28	−0,54
30	U_x	0,83	0,84	2,06	2,18	2,76	2,82
	U_z	0,32	0,40	1,98	2,29	2,82	3,07

Tabela 2

Bara	Capătul	*H*			1,5*H*			2*H*		
		MTX	*MIY*	*MIZ*	*MTX*	*MIY*	*MIZ*	*MTX*	*MIY*	*MIZ*
1−7	1	−1,076	5,740	2,420	−1,029	9,931	6,809	−1,436	13,612	8,804
	7	1,076	2,922	1,313	1,029	4,840	4,084	1,436	6,639	5,290
7−13	7	−1,303	3,477	1,257	−1,227	6,274	3,984	−1,717	8,620	5,227
	13	1,303	2,545	0,843	1,227	4,540	3,064	1,717	6,232	4,037
13−19	13	−1,248	2,685	1,019	−1,195	4,541	3,312	−1,669	6,269	4,338
	19	1,248	4,489	1,846	1,195	7,962	5,241	1,669	10,995	6,791
19−25	19	−0,504	−1,893	−2,001	−0,317	−3,581	−3,323	−0,444	−4,960	−3,963
	25	0,504	3,975	−2,756	0,317	6,836	−1,157	0,444	9,448	−0,388

telor încovoietoare pe stîlpul 1−25 pentru cele trei ipoteze de încărcăare. În figura 5 s-a reprezentat variația momentelor încovoietoare *MY* și *MZ* pentru capetele 25,13 și 7 (pe bara 7−13) pentru cele trei ipoteze de încărcare, valorile corespunzînd celui de-al șaselea ciclu de calcul.

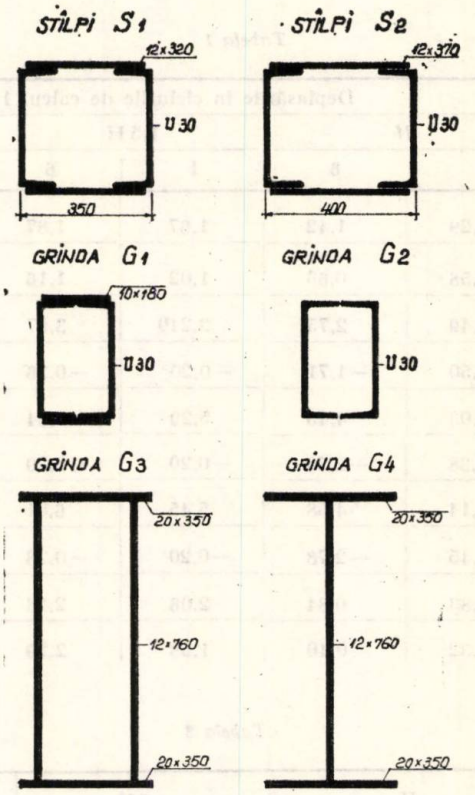


Fig. 4

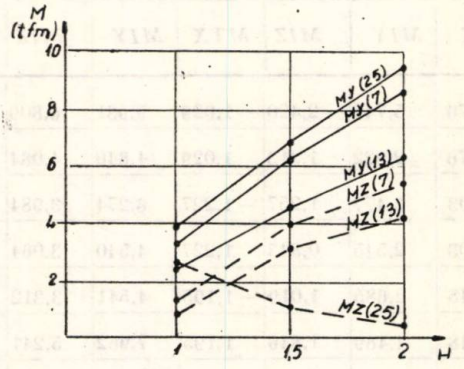


Fig. 5

4. CONCLUZII

— Din analiza rezultatelor obținute pe al doilea exemplu de calcul se constată că pe măsură ce forțele orizontale cresc proporțional, situație posibilă în realitate, deplasările și eforturile nu urmează aceeași lege de variație.

— În unele secțiuni eforturile scad, iar în altele cresc cu mai mult decît raportul forțelor orizontale. Acest fapt ar putea explica comportarea unor structuri în timpul cutremurelor sub efectul torsiunii. Pentru confirmarea sau infirmarea acestei concluzii este necesară analiza unui număr mai mare de structuri și de tipuri diferite.

— Calculul spațial de ordinul II oferă posibilitatea unei analize mai cuprinzătoare a structurilor și, în consecință, o verificare mai corectă a secțiunilor transversale la solicitări compuse.

Primită la redacție la 26 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. V. BĂNUȚ, H. POPESCU, *Stabilitatea structurilor elastice*, Edit. Academiei, 1975.
2. AL. GHEORGHIU, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, 1975.
3. S. J. PRZEMIENIECKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
4. J. J. JONATOWSKI, CH. BIRNSTIEL, *Inelastic stiffned suspension space structure*, J. St. Div. ASCE, June, 1970.
5. K. A. NOOR, *Nonlinear analysis of space trusses*, J. St. Div., ASCE, March, 1974.
6. CHU KUANG-HAN, R. H. RAMPETSREITER, *Large deflection buckling of space frames*, J. St. Div. ASCE, December, 1972.

CALCULUL DEFORMAȚIILOR MARI ALE PLĂCILOR FOLOSIND METODA RELAXĂRII DINAMICE

de MARCEL D. STERE

Descrierea folosirii metodei relaxării dinamice pentru studiul deformațiilor mari ale plăcilor. Sînt prezentate detalii ale acestei metode numerice și se face o comparație a rezultatelor obținute cu diverse metode numerice pentru un caz particular de calcul. Metoda relaxării dinamice este un procedeu iterativ de soluționare a formei cu diferențe finite a ecuațiilor diferențiale ce descriu comportarea structurii solicitate și este deosebit de eficientă pentru soluționarea ecuațiilor neliniare. O aplicare a acestei metode este realizată pentru analiza deformațiilor unei plăci plane solicitată de o presiune uniform distribuită.

NOTAȚII PRINCIPALE

MRD	— metoda relaxării dinamice,
MDF	— metoda diferențelor finite,
MEF	— metoda elementelor finite,
x, y, z	— sistemul de coordonate cartezian,
a, b, h	— dimensiunile plăcii,
u, v, w	— deplasările structurii,
$\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$	— componentele vitezelor,
ρ_u, ρ_v, ρ_w	— densitățile fictive,
c_u, c_v, c_w	— factorul de amortizare,
Δt	— incrementul de timp,
n, r	— indici în procesul iterativ,
$\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$	— dimensiunea rețelei de idealizare,
μ_n, μ_1	— valorile proprii minimă și maximă ale matricei,
E	— modulul de elasticitate,
ν	— constanta lui Poisson,
ITMAX	— numărul maxim de iterații,
$Q(q)$	— sarcina uniform distribuită,
N_x, N_y, N_τ	— forța de membrană pe unitatea de lungime,
M_x, M_y, M_{xy}	— momentele pe unitatea de lungime,
$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	— rigiditatea cilindrică a plăcii,
ε	— precizia (prestabilită) pentru soluție.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 2. 1979, P. 273–286

1. INTRODUCERE

La numeroase structuri reale din plăci se produc deformaţii mari care nu mai pot fi descrise în mod satisfăcător cu teoria deformaţiilor mici. Cînd se produc aceste deformaţii, tensiunile de membrană devin importante şi teoria deformaţiilor mici poate supraestima deplasările şi tensiunile chiar peste 100% la numeroase probleme practice, ducînd astfel la supradimensionări nenecesare (9).

Calculul deformaţiilor mari ale plăcilor s-a dovedit totdeauna a fi dificil de efectuat datorită termenilor neliniari incluşi în ecuaţii [1], [2], [3], [5], [6], [9].

Deşi ecuaţiile pentru deplasările mari ale plăcilor au fost deduse de Karman încă din 1910 [16], numai recent problema a putut fi tratată satisfăcător pentru toate cazurile întîlnite în practică. Există o serie de soluţii obţinute folosind metoda Bubnov-Galerkin, metoda energetică Ritz, metoda seriilor trigonometrice duble, metoda Kantorovici-Vlasov, metode variaţionale diverse, metoda diferenţelor finite, metoda elementelor finite sau alte procedee utilizate pentru diverse cazuri particulare de geometrie sau încărcare [1], [2], [3], [7], [8], [9], [15], [19].

În domeniul soluţiilor în cazul deplasărilor mari ale plăcilor nu există o mare apropiere între soluţiile obţinute cu diverse abordări. Discrepanţele existente necesită continuarea cercetărilor pentru a se obţine o soluţie satisfăcătoare. O astfel de încercare se face în prezenta lucrare utilizînd metoda relaxării dinamice (MRD).

Modul direct de calcul folosit de MRD [4], [12], [13] permite includerea simplă a termenilor neliniari şi constituie o tehnică deosebit de eficace pentru numeroase probleme practice. Abordarea prin MRD permite soluţionarea relativ simplă a deformaţiilor mari ale plăcilor, a plăcilor de grosime variabilă sau a celor ortotrope precum şi includerea uşoară a imperfecţiunilor geometrice ale plăcilor. MRD are o mare generalitate în privinţa considerării de frontieră şi a celor mai variate condiţii de încărcare [11], [12], [13], [14], [19].

2. METODA DE ANALIZĂ

2.1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Analiza deformaţiilor mari, într-un caz mai general, efectuată cu considerarea deplasărilor iniţiale de la forma geometrică ideală, a fost realizată de către K. R. Rushton [4].

În lucrare se va studia cazul unei plăci pătrate, simplu rezemate, solicitată de presiunea uniform distribuită, pentru care există în literatură numeroase soluţii [1], [5]. Soluţia calculată se va compara cu cele obţinute analitic, cu MDF şi cu MEF pe baza unor criterii care să permită evaluarea performanţelor MRD [10], [11].

2. 2. ECUAȚII DE BAZĂ

Plăcile a căror grosime nu depășește 1/5 din cea mai mică dimensiune de bază sînt denumite plăci subțiri [1]. Ipotezele principale ale teoriei plăcilor subțiri sînt considerate valabile [1], [3].

Se alege sistemul de coordonate reprezentat în figurile 1.2.1 și 1.2.2.

Ecuațiile ce descriu deformațiile elastice mari ale plăcilor, formulate de von Karman [16] sînt:

$$(w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy}) - (F_{,yy}\, w_{,xx} - F_{,xy}\, w_{,xy} + F_{,xx}\, w_{,yy}) = \frac{q}{D},$$

$$F_{,xxxx} + 2F_{,xxyy} + F_{,yyyy} = Eh[(w_{,xy})^2 - w_{,xx}\, w_{,yy}]. \qquad (2.2.1)$$

Aici F este funcția Airy definită astfel că:

$$N_x = F_{,yy},\ N_y = F_{,xx},\ N_{xy} = F_{,xy}. \qquad (2.2.2)$$

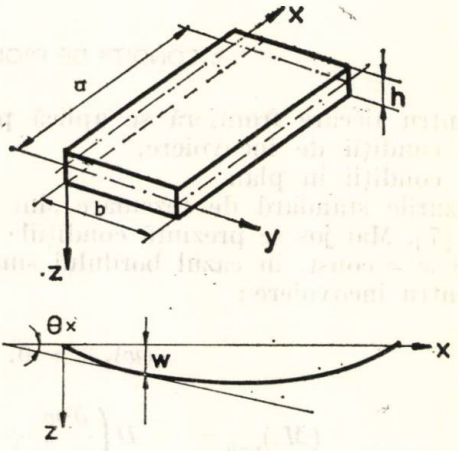


Fig. 1.2.1. — Sistemul de coordonate pentru placă. Secțiune prin suprafața mediană a plăcii.

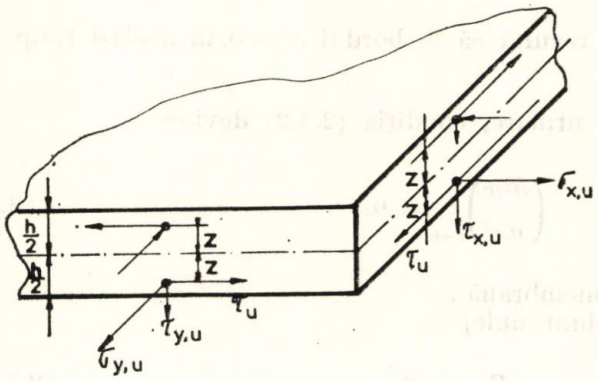


Fig. 1.2.2. — Tensiunile în elementul de placă.

Toate celelalte mărimi ce descriu starea de tensiune a plăcii pot fi exprimate în funcție de cele două variabile w și F. Relațiile fiind foarte bine cunoscute și pe larg tratate în literatură [3], [16], nu mai sînt reproduse în prezentul text.

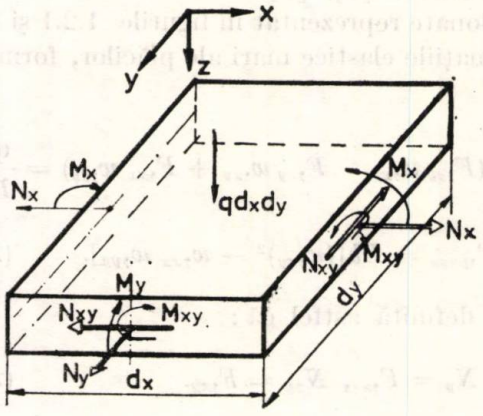


Fig. 1.2.3. — Condițiile de echilibru ale elementului de placă.

2.3. CONDIȚII DE FRONTIERĂ

Pentru fiecare frontieră se aplică patru condiții:
a) două condiții de încovoiere,
b) două condiții în plan.

Cazurile standard de rezemare sînt elegant prezentate de P. M. Varvak [7]. Mai jos se prezintă condițiile folosite în calcule, aplicate la frontieră $x = \text{const.}$ în cazul bordului simplu rezemat.

Pentru încovoiere:

$$(w)_{x=0} = 0, \tag{2.3.2}$$

$$(M_x)_{x=0} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0. \tag{2.3.1}$$

Din condiția (2.3.1) rezultă că la bordul $x = 0$ în același timp se realizează $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$, și, ca urmare, condiția (2.3.2) devine

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} = 0. \tag{2.3.3}$$

Pentru acțiunea de membrană:
(1) marginile libere (tensiuni nule)

$$F_{,yy} = 0, \tag{2.3.4}$$

(2) tensiuni tangențiale de membrană nule

$$F_{,xy} = 0. \tag{2.3.5}$$

Aceste ultime două condiții se referă la o placă izolată.

Condițiile de frontieră trebuie satisfăcute atît pe nodurile de frontieră, cît și pe nodurile fictive ale rețelei pentru diferențe finite folosite în calcul. Pentru punctele de frontieră relațiile de calcul se pot obține relații de calcul folosind descompunerea funcției săgeților în serie Taylor (fig. 2.3.1):

$$w_{m+1} = w_m + \frac{\Delta x}{1!}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_m + \frac{(\Delta x)^2}{2!}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_m + \frac{(\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_m + \dots \tag{2.3.6}$$

În cazul plăcii simplu rezemate, reținînd primii trei termeni ai șirului (2.3.6) se obține

$$w_{m+1} = \frac{\Delta x}{1!} \cdot \frac{w_{m+1} - w_{m-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{2}(w_{m+1} - w_{m-1}) \tag{2.3.7}$$

sau

$$w_{m+1} = -w_{m-1}$$

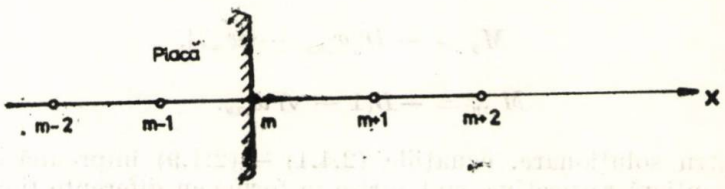


Fig. 2.3.1. — Notarea nodurilor la frontieră.

2.4. SOLUȚIONAREA PRIN MRD

MRD constituie o tehnică iterativă de soluționare a formei cu diferențe finite a ecuațiilor ce descriu comportarea structurii și s-a dovedit deosebit de adecvată în soluționarea ecuațiilor neliniare [4], [11], [12], [13], [14]. Conceptul de bază al metodei constă în faptul că termeni de amortizare și accelerație sînt adăugați la ecuațiile de echilibru. Printr-o alegere corespunzătoare a coeficienților de amortizare și densităților se obține convergența rapidă la soluția ecuațiilor statice. Scrierea sistemelor de ecuații și a condițiilor de frontieră într-o formă cu diferențe finite este urmată de soluționarea cu o metodă de integrare pas-cu-pas efectuată cu ajutorul CEN.

Ecuațiile de „mișcare" ale unui element de placă $dxdy$ pentru deplasările mari, cu adăugarea termenilor de amortizare vîscoasă, pot fi scrise în lungul celor trei axe x, y, z (fig. 1.2.1, 1.2.3) în următoarea formă:

$$N_{xx,x} + N_{xy,y} = \rho_u \cdot \ddot{u}_{,t} + c_u \dot{u}, \tag{2.4.1}$$

$$N_{y,y} + N_{xy,x} = \rho_v \cdot \dot{v}_{,t} + c_v \dot{v}, \tag{2.4.2}$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} + N_y w_{,yy} + q =$$

$$= \rho_w \dot{w}_{,t} + c_w \dot{w}, \tag{2.4.3}$$

unde s-a notat cu $(\cdot)$ diferențierea în raport cu timpul t.

Ecuațiile „tensiuni-deformații" care leagă forțele de membrană și momentele de termeni în deplasările u, v, w sînt:

$$N_x = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left[u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 + \nu\left(v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2\right)\right], \tag{2.4.4}$$

$$N_y = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left[v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 + \nu\left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2\right)\right], \tag{2.4.5}$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}\left[u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}\, w_{,y}\right], \tag{2.4.6}$$

$$M_x = -D[w_{,xx} + \nu w_{,yy}], \tag{2.4.7}$$

$$M_y = -D[w_{,yy} + \nu w_{,xx}], \tag{2.4.8}$$

$$M_{,xy} = -D(1-\nu)\, w_{,xy}. \tag{2.4.9}$$

Pentru soluționare, ecuațiile (2.4.1) — (2.4.9) împreună cu condițiile de frontieră respective, sînt scrise în forma cu diferențe finite, considerînd o rețea pentru diferențe finite în spațiu și timp (fig. 2.4.1).

Pentru exemplificare se scriu două din aceste expresii:

$$\left[\frac{N_{x,i+1,j} - 2N_{xi,j} + N_{x,i-1,j}}{\Delta x}\right]_{n+1/2} + \left[\frac{N_{xy,i,j+1} - 2N_{xy,i,j} + N_{xy,i,j-1}}{\Delta y}\right]_{n+1/2} =$$

$$= \rho_u\left(\frac{\dot{u}_{i,j,n+1} - \dot{u}_{i,j,n}}{\Delta t}\right) + \frac{c_u}{2}(\dot{u}_{i,j,n+1} + \dot{u}_{i,j,n}), \tag{2.4.10}$$

$$\left[\frac{M_{xi+1,j} - 2M_{xi,j} + M_{xi-1,j}}{(\Delta x)^2}\right]_{n+1/2} + \left[\frac{M_{yi,j+1} - 2M_{yi,j} + M_{yi,j-1}}{(\Delta y)^2}\right]_{n+1/2} +$$

$$+ \left[\frac{M_{xyi+1,j+1} - M_{xy,i-1,j+1} + M_{xyi-1'j-1} - M_{xy,i+1,j-1}}{2\cdot(\Delta x)(\Delta y)}\right]_{n+1/2} +$$

$$N_{xi,j,n+1/2} \cdot \left[\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}\right]_{n+1/2} +$$

$$N_{yi,j,n+1/2} \cdot \left[\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right]_{n+1/2} +$$

$$N_{xyi,j,n+\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1}}{2(\Delta x) \cdot (\Delta y)} \right]_{n+\frac{1}{2}} + Q_0 =$$

$$= \rho_w \left(\frac{\dot{w}_{i,j,n+1} - \dot{w}_{i,j,n}}{\Delta t} \right) + \frac{C_w}{2} (\dot{w}_{i,j,n+1} + \dot{w}_{i,j,n}). \qquad (2.4.11)$$

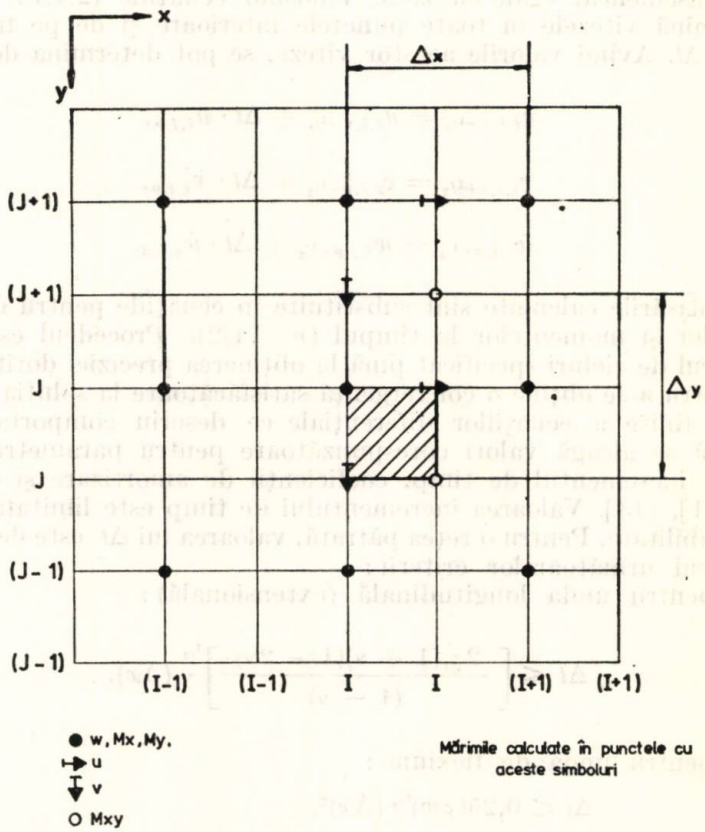


Fig. 2.4.1. — Rețeaua folosită pentru calculul plăcii.

Din relațiile de mai sus se determină expresiile pentru „vitezele" $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\dot{w}$. Pentru simplificarea scrierii ecuațiilor, în partea dreaptă se va folosi notația $A_{n+1/2}$ unde indicele $(n + 1/2)$ semnifică că valorile curente sînt determinate la timpul $(n + 1/2)\,\Delta t$.

Expresiile vitezelor sînt :

$$\dot{u}_{i,j,n+1} = \frac{1}{1 + 0{,}5\, c_u\, \Delta t} [(1 - 0{,}5 c_u\, \Delta t)\dot{u}_{i,j,n} + \Delta t \cdot A^u_{n+1}{}_{\frac{}{2}}], \qquad (2.4.12)$$

$$\dot{v}_{i,j,n+1} = \frac{1}{1 + 0{,}5c_v\Delta t}\left[(1 - 0{,}5c_v\Delta t)\,\dot{v}_{i,j,n} + \Delta t \cdot A^{v}_{n+\frac{1}{2}}\right], \quad (2.4.13)$$

$$\dot{w}_{i,j,n+1} = \frac{1}{1 + 0{,}5\,c_w\Delta t}\left[(1 - 0{,}5c_w\,\Delta t)\,\dot{w}_{i,j,n} + \Delta t \cdot A^{w}_{n+\frac{1}{2}}\right]. \quad (2.4.14)$$

Calculul se începe considerînd că vitezele la timpul $0\Delta t$ sînt egale cu zero și deplasările, momentele și forțele de membrană la timpul $1/2\ t$, sînt, de asemenea, egale cu zero. Folosind ecuațiile (2.4.12) — (2.4.14) se determină vitezele în toate punctele interioare și de pe frontieră la timpul $1.\Delta t$. Avînd valorile acestor viteze, se pot determina deplasările :

$$u_{i,j,n+1/2} = u_{i,j,n-1/2} + \Delta t \cdot \dot{u}_{i,j,n}, \quad (2.4.15)$$

$$v_{i,j,n+1/2} = v_{i,j,n-1/2} + \Delta t \cdot \dot{v}_{i,j,n}, \quad (2.4.16)$$

$$\dot{w}_{i,j,n+1/2} = w_{i,j,n-1/2} + \Delta t \cdot \dot{w}_{i,j,n}. \quad (2.4.17)$$

Deplasările calculate sînt substituite în ecuațiile pentru determinarea forțelor și momentelor la timpul $(n + 1/2)t$. Procedeul este repetat de numărul de cicluri specificat pînă la obținerea preciziei dorite [4].

Pentru a se obține o convergență satisfăcătoare la soluția formei cu diferențe finite a ecuațiilor diferențiale ce descriu comportarea plăcii trebuie să se aleagă valori corespunzătoare pentru parametrii de bază ai MRD : incrementul de timp, coeficienții de amortizare și densitățile fictive [11], [13]. Valoarea incrementului de timp este limitată de criteriul de stabilitate. Pentru o rețea pătrată, valoarea lui Δt este determinată cu ajutorul următoarelor criterii :

a) pentru unda longitudinală (extensională) :

$$\Delta t \leqslant \left[\frac{2\rho_t(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(1 - \nu)}\right]^{1/2} \cdot (\Delta x), \quad (2.4.18)$$

b) pentru unda de flexiune :

$$\Delta t \leqslant 0{,}25(\rho w)^{1/2}\,(\Delta x)^2. \quad (2.4.19)$$

În problemele de deplasări mari cea de-a doua condiție a fost găsită a fi o condiție critică. Prima condiție, în mod obișnuit, dă cel mai mare increment de timp permisibil [20].

În anumite probleme de deformații mari, dacă acest increment de timp duce la instabilitate, se va lua o valoare cu 20—30% mai mică. Se menționează că o incorectă alegere a incrementului de timp Δt, poate fi ușor detectată deoarece instabilitatea se pune în evidență după un număr mic de iterații de la începutul calculului.

În privința amortizării critice, se consideră atît oscilațiile flexionale, cît și cele extensionale care trebuie, ambele, să se amortizeze într-un număr apropiat de iterații. Coeficientul de amortizare critică poate fi

estimat pornind de la frecvența fundamentală a vibrației neamortizate. Totuși, la alegerea unei valori corespunzătoare pentru coeficientul de amortizare pot apare anumite dificultăți la început. Cîteva rulări de testare pe calculator, cu diferite valori ale coeficientului, sînt suficiente însă pentru selectarea unei valori corespunzătoare. Întîi se va considera amortizarea critică pentru oscilațiile flexionale. O soluție preliminară se obține pe calculator cu C_w egal cu zero și ρ_u/ρ_w și ρ_v/ρ_w foarte mari. Analizînd oscilațiile plăcii poate fi determinat modul fundamental și poate fi estimat numărul oscilațiilor pentru un ciclu complet al modului fundamental N_w. Cunoscînd modul fundamental al vibrației flexionale, coeficientul de amortizare critic poate fi calculat din relația

$$C_w = 4\pi\rho_w/N_w. \tag{2.4.20}$$

Calculele sînt continuate timp de $2N_w$ iterații. Un procedeu similar poate fi urmat pentru determinarea amortizării critice în direcțiile u și v. În problema deplasărilor mari $N_u \gg N_w$ astfel că sînt necesare mai multe iterații pentru amortizarea oscilațiilor extensionale decît cele necesare pentru anularea oscilațiilor flexionale. Totuși, prin introducerea densității reduse în direcțiile u și v, frecvența modurilor fundamentale corespunzătoare este redusă și numărul oscilațiilor necesare pentru vibrațiile flexionale și extensionale poate fi făcut aproximativ același. Limita la care densitatea poate fi redusă este definită de criteriul stabilității oscilațiilor extensionale. Ca ordin de mărime, la aplicațiile numerice efectuate, coeficienții de amortizare au valorile : $C_u = 0{,}01$, $C_v = 0{,}01$, $C_w = 0{,}03$ — — 0,08, iar densitățile relative ρ_v/ρ_w și ρ_u/ρ_w au valoarea 0,01.

Folosind schema logică standard [11], [12], [19] a fost scris un program codificat în FORTRAN și utilizat în soluționarea problemei descrise în § 2.5.

2.5. EXEMPLU NUMERIC

Algoritmul descris este utilizat la calculul unei plăci pătrate plane, simplu rezemată pe contur, solicitată de o presiune uniform distribuită. Datele numerice utilizate în exemplul analizat :

— material duraluminiu, $E = 720\,000$ daN/cm^2; $\nu = 0{,}3$,
— presiunea, $q = 0{,}01$ daN/cm^2;
— latura plăcii (pătrat), $a = 40$ cm;
— grosimea plăcii, $h = 0{,}2$ cm;
— condițiile de frontieră : simplu rezemat pe contur.

A fost analizat acest exemplu deoarece constituie o problemă bine cunoscută pentru care se dispune de numeroase soluții precise.

3. COMPARAȚIA CU ALTE SOLUȚIONĂRI

Pentru a se evalua rezultatele obținute prin MRD, problema propusă a fost analizată folosind patru procedee :

a) metoda analitică [1], [3];

b) metoda diferenţelor finite [7];
c) metoda elementelor finite [15];
d) metoda relaxării dinamice.

Comparaţia se face atît prin prisma preciziei rezultatelor, cît şi prin considerarea altor criterii care să permită aprecierea eficienţei procedeului [10]. Soluţiile obţinute cu primele trei metode sînt determinate cu teoria micilor deformaţii. Numai MRD a fost aplicată şi pentru cazul deformaţiilor mari. Detaliile asupra calculelor sînt omise şi sînt date numai valorile deplasărilor maxime.

3.1. SOLUŢIA CU METODA ANALITICĂ

În lucrările [1], [3] se dă relaţia pentru calculul săgeţii într-un punct oarecare al plăcii:

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(1 - \frac{\alpha_m \operatorname{th}\alpha_m + 2}{2 \operatorname{ch}\alpha_m} \operatorname{ch}\frac{2\alpha_m y}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_m}{2\operatorname{ch}\alpha_m} \cdot \frac{2y}{b} \operatorname{sh}\frac{2\alpha_m y}{b} \right) \sin\frac{m\pi x}{\alpha_m}, \qquad (3.1.1.)$$

unde $\alpha_m = \dfrac{m \cdot \pi b}{2\alpha}$.

Săgeata maximă are valoarea $w_{\max} = 0{,}19704533$ cm; valoare care va fi utilizată ca referinţă pentru teoria micilor deformaţii.

Aplicînd o relaţie de calcul prezentată în [1], se poate obţine cu teoria deformaţiilor mari $w_{\max} = 0{,}1313422$ cm, deci cu 31% mai mică decît cea determinată cu teoria micilor deformaţii.

3.2. SOLUŢIA CU MDF

Pentru cazul particular analizat se poate scrie un program deosebit de simplu şi eficace. Problema se rezolvă aplicînd de două ori, succesiv, procedeul de soluţionare a ecuaţiei lui Poisson. Sistemul de ecuaţii obţinut a fost soluţionat cu metoda Gauss-Seidel.

Tabelul 3.2.1

N	2	4	6	8	10	12	20
$w_{\max}^{MDF}$	0,18958	0,19551	0,196480	0,19679	0,19691	0,19660	0,16433
$\dfrac{w_{\max} - w_{\max}^{MDF}}{w_{\max}}$	0,03788	0,00779	0,00287	0,00123	0,000685	0,002260	0,16603

Considerînd ca valoare de referinţă, valoarea determinată în §3.1 pentru săgeata maximă, în tabelul 3.2.1 sînt date săgeţile calculate pentru diferite idealizări şi erorile relative ale acestor valori.

Se constată că eroarea cea mai mică se obţine pentru $N = 10$ şi anume 0,0685%. Deplasările sînt măsurate în centimetri.

3.3. SOLUŢIA PRIN MEF

S-a folosit un program general bazat pe teoria liniară (15). Rezultatele obţinute sînt sintetizate în tabelul 3.3.1.

Tabelul 3.3.1

N	2	4	8	10
w_{max}^{MEF}	0,248277	0,205478	0,199252	0,198251
$\frac{w_{max} - w_{max}^{MEF}}{w_{max}}$	0,26	0,0428	0,0112	0,00612

Practic, la o reţea 10×10 se obţine o precizie foarte bună. Se menţionează că, în calculul efectiv, datorită simetriei plăcii sa folosit numai un sfert de placă, cu introducerea corespunzătoare a condiţiilor de frontieră. Se subliniază însă numărul mare de ecuaţii ce intervin în soluţionare. Astfel, pentru $N = 8 \times 8$ (pentru un sfert de placă) sistemul de soluţionat are 88 de ecuaţii şi a necesitat 22 secunde pentru rezolvare.

3.4. SOLUŢIA PRIN MRD

Folosind algoritmul descris în § 2 a fost scris un program în limbaj FORTRAN şi utilizat pentru soluţionarea problemelor de încovoiere a plăcilor. Calculele au fost efectuate atît cu teoria liniară, cît şi cu cea neliniară. Analiza a fost realizată pentru mai multe reţele de idealizare. Rezultatele sînt sintetizate în tabelul 3.4.1. De asemenea, datele obţinute prin calcule şi o serie de date din literatură sînt reprezentate în figura 3.4.1.

Tabelul 3.4.1

N	abordarea neliniară					
	2	4	8	10	12	20
w_{max}^{MRD}	1,4396	1,3216	1,2272	1,20596	1,201476	1,19298
$\frac{w_{max}^{n} - w^{MRD}}{w_{max}^{n}}$	0,22	0,12	0,04	0,022	0,0182	0,011

Pentru datele de mai sus referirea s-a făcut la soluția $w_{max} = 1.18$, valoarea la care tind rezultatele obținute prin MRD în cazul abordării neliniare. Folosind o abordare liniară, cu MRD se obține $w_{max} = 1{,}968$, deci cu 66,7% mai mult față de rezultatul dat de teoria neliniară.

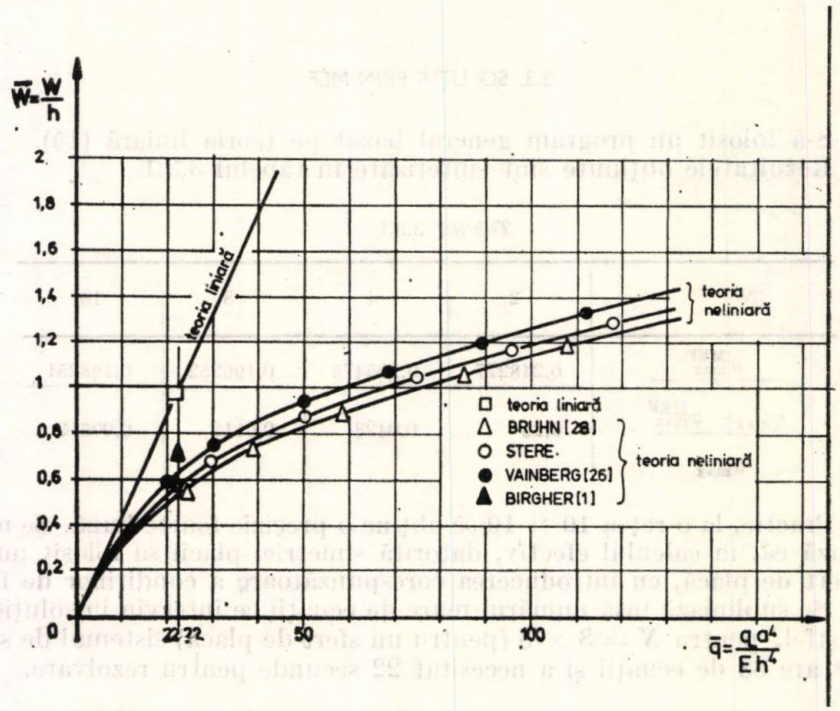


Fig. 3.4.1. — Deplasările punctului median al unei plăci pătrate, simplu rezemată, solicitată de o sarcină uniform distribuită.

4. CONCLUZII

Pentru deplasări mici ($w \leqslant 0{,}2$ h) teoria micilor deplasări a lui Kirchhoff dă rezultate de o precizie satisfăcătoare. Pentru deplasări mari ($w \geqslant 0{,}3 - 0{,}35$ h) forțele de membrană care apar duc la o sensibilă creștere a capacității portante. În aceste cazuri utilizarea teoriei deplasărilor mari devine obligatorie (în special, pentru $w_{max} > h$).

Deoarece soluționarea exactă a ecuațiilor lui Karman poate fi realizată numai în cîteva cazuri particulare, pentru problemele practice cele mai utile rămîn metodele numerice. Alături de MEF, MRD constituie o cale deosebit de eficace și atractivă pentru soluționarea problemelor neliniare ale mecanicii structurilor.

MRD a fost aplicată la o problemă pentru care sînt disponibile mai multe soluționări alternative. În tabelul 4.1 se face o comparație între parametrii de calcul ai celor trei metode de calcul utilizate pentru analiza exemplului de calcul considerat.

Se constată precizia bună obținută cu MRD și eficiența deosebită a procedeului dacă se consideră și ceilalți parametri ai procesului de calcul. Metodele utilizate duc la rezultate apropiate diferind, în special, prin timpul de calcul și volumul datelor de intrare. Deși MEF este, evident, mai generală fiind aplicabilă cu ușurință și la plăci de formă neregulată, MRD se dovedește deosebit de eficientă și practică pentru aplicații la formele uzuale de plăci. Alt avantaj al MRD îl constituie economia de memorie fiind necesară aproximativ 10% din cea cerută de soluționarea cu MDF sau MEF.

Tabelul 4.1

Compararea rezultatelor pentru abordarea liniară

Parametrul	Metoda de calcul		
	MDF	MEF	MRD
Numărul de iterații	100	—	600
Precizia de calcul	10^{-4}		10^{-4}
Timp de calculator (timpul total la CDC 3500)	13.2''	52''	1'4''
Numărul de instrucțiuni al programului	60	Program general	379
Memoria necesară (program)	24 K	62 K	24 K
Numărul parametrilor de intrare	6	60	12
Pregătirea datelor de intrare (minute)	5	20	8
w_{max} în centrul plăcii (cm) — pentru N = 8	0,19679	0,199252	0,1968
Eroarea față de valoarea „exactă" obținută pe cale teoretică, %	−1,23	+1,12	−1,29

În privința folosirii MRD trebuie subliniat că valorile inițiale ale coeficientului de amortizare devin mai puțin eficace cu creșterea deplasărilor și forțelor de membrană. Pentru a accelera convergența este necesară o reevaluare a coeficientului de amortizare, procedeu care se poate automatiza și include în mod corespunzător în programul de calcul.

Procedeul poate fi aplicat cu ușurință pentru materiale care ascultă de legi neliniare „tensiuni-deformații".

Folosirea MRD asigură o mai bună înțelegere a comportării la deformații mari a plăcilor și permite o mai rațională și economică proiectare a acestui tip de structură.

Primită la redacție la 28 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. Birger, Ia. G. Panovko, *Procinosti. Ustoicivosti, Kolebaniia*, Moskva, Izd-vo Mașinostroenie, 1968.
2. S. Levy, *Bending of rectangular plates with large deflection*, NACA Report *737* (1942).

3. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Kriger, *Theory of plates and shells*, New-York, McGraw-Hill, 1959.
4. K. R. Rushton, *Large deflexion of plates with initial curvature*, Int. J. Mech. Sci., **12**, 1037–1051 (1970).
5. — Royal Aeronautical Society, Data Sheets 69019 (1969), 70001 (1970).
6. A. I. Strelbitkaia et al., *Izghib priamougholnth plastin za predelom uprugosti*, Kiew, Izd-vo Naukova Dumka, 1971.
7. P. M. Varvak, *Razvitie i prilojenie metoda setok k rascëtu plastinok* (Pl, P2), Kiew, Izd-vo A. N. – USSR, 1949 și 1952.
8. D. W. Murray, E. L. Wilson, *Finite element large deflection of plates*, Proceed. ASCE, J. Engn. Mech. Div., **95**, *EM1*, feb., 143–165 (1969).
9. B. Aalami, *Large deflection of elastic plates under patch loading*, Proceed. ASCE, J. Struct. Div., **98**, *ST11*, 2567–2585 (1972).
10. M. D. Stere, *Metode numerice de analiză structurală*, St. cerc. mec., apl., **36**, *5*, 647–664 (1977).
11. M. D. Stere, *Asupra metodei relaxării dinamice*, St. cerc. mec. apl., **37**, *5* (1978).
12. K. R. Rushton, *Dynamic relaxation solution for the large deflection of plates with specified boundary stresses*, J. Strain Analysis, **4**, *2*, 75–80 (1969).
13. K. R. Rushton, *Large deflection of variable thickness plates*, Int. J. Mech. Sci., **10**, 723–735 (1968).
14. K. R Rushton, *Large deflection of plates with unsupported edges*, J. Strain Analysis, **7**, *1*, 44–53 (1972).
15. — *ASMEF-1* (Analiza structurilor prin metoda elementului finit), IMFCA (1975).
16. Th. von Karman, *Festigkeitsprobleme im Maschinenbau*, Encyclopaedie der Mathematischen Wissenschaften, Germany, **4**, 349 (1910).
17 C. T. Wang, *Non -linear large deflection boundary value problems of rectangular plates*, NACA TN 1425 (1948).
18. A. K. Basu, J. C. Chapman, *Large deflexion behaviour of transversely loaded rectangular orthotropic plates*, Proceed. Inst. Civ. Eng., **35**, sep., 79 (1966).
19. S. D. N. Murthy, A. N. Sherbourne, *Nonlinear bending of elastic plates of variable profile*, Proceed. ASCE. J. Eng. Mech. Div., **100**, *EM2*, 251–265 (1974).
20. G. E. Forsyth, W. R. Wasow, *Finite difference methods for partial differential equations*, New-York, John Wiley and Sons (1960).
21. V. A. Kisselev, *Rasciot plastin*, Moskva, Stroiizdat (1973).
22. K. R. Rushton, P. M. Hook, *Large deflection of plates and beams obeying non-linear stress*, J. of Strain Analysis, **9**, *3*, 178–184 (1974).
23. E. Reissner, *On the theory of bending of elastic plates*, J. of Mathematics and Physics, **23–24** (1945).
24. E. Reissner, *The effect of transverse shear deformation of the bending of elastic plates*, J. of Applied Mechanics, **12** (1945).
25. E. Reissner, *On bending of elastic plates*, Quarterly of Applied Mathematics, **5** (1947–1948).
26. R. Szilard, *Theory and analysis of plates. Classical and numerical methods*, New Jersey, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs (1974).
27. S. D. Ponomariov et al., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, București, Edit. tehnică, 1963.
28. E. F. Bruhn, *Analysis and design of flight vehicle structures*, Cincinnati, Tri-State Offset Company (1965).

CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE REALIZATE DIN MATERIALE CU COMPORTARE VÎSCOELASTICĂ

I. METODA FORȚELOR

de ȘTEFAN JERCA
Institutul politehnic Iași

Materialele de construcții moderne (plasticele armate) și unele materiale tradiționale (beton, beton armat, metale la temperaturi mari etc.) prezintă importante proprietăți vîscoelastice. Comportarea unor astfel de materiale este bine aproximată de modelele reologice compuse vîscoelastice.
Cu ajutorul calculului operațional (transformata Laplace) se elaborează metoda forțelor pentru calculul structurilor static nedeterminate realizate din material vîscoelastic, care generealizează metoda respectivă din calculul elastic liniar.
Un exemplu de calcul scoate în evidență importanța și generalitatea calculului propus.

1. INTRODUCERE

Printre materialele moderne ce se folosesc tot mai mult în construcții sînt materialele compozite de tipul plasticelor armate, mai ales poliesteri armați cu fibre de sticlă. Studiile de prognoză prevăd o creștere rapidă a producției de mase plastice atît în țara noastră, cît și în străinătate, astfel încît aceasta va depăși producția de oțel [5, 7, 9].

Comportarea sub sarcină a acestor materiale, precum și a unor materiale de construcții tradiționale (beton armat, metale la temperaturi înalte etc.) este caracterizată prin prezența unor importante deformații vîscoase și elastice și se poate aproxima prin modele reologice compuse vîscoelastice liniare [1, 2, 3, 8].

Transformatele directă și inversă Laplace oferă posibilitatea adaptării metodelor de calcul al structurilor static nedeterminate, care să folosească modele reologice vîscoelastice în locul modelului elastic liniar (Hooke).

2. RELAȚII FIZICE DE COMPORTARE A MATERIALELOR

Fenomenul complex al comportării materialelor sub sarcini, se aproximează prin diferite modele reologice compuse, obținute prin legarea în serie sau paralel a celor trei modele reologice fundamentale: elastic (Hooke), vîscos (Newton), și plastic (Saint-Venant) [1, 2, 3, 8].

Comportarea vîscoelastică a unor materiale se aproximează suficient de bine prin modele reologice compuse vîscoelastice, obținute prin

compunerea modelelor elastic şi vîscos. Ecuaţiile reologice de stare ale unor astfel de modele sînt ecuaţii diferenţiale liniare în raport cu timpul şi au următoarea formă generală :

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\sigma(t) = Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\varepsilon(t), \tag{1}$$

unde P şi Q sînt operatori liniari diferenţiali ce depind de modelul reologic. Forma lor generală este următoarea :

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = p_m\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m} + \ldots + p_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + p_0,$$

$$Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) = q_n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} + \ldots + q_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + q_0, \tag{2}$$

unde $p_m - p_0$ şi $q_n - q_0$ sînt coeficienţi fenomenologici presupuşi constanţi şi se determină experimental.

Prin încercări statice cu sarcini progresive de lungă durată a materialelor viscoelastice se obţine suprafaţa caracteristică (fig. 1) din care re-

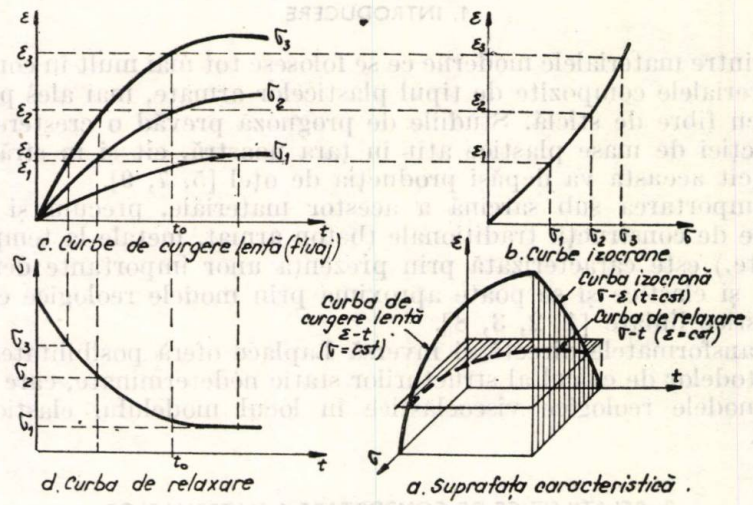


Fig. 1

zultă : curba caracteristică (izocronă) $\sigma - \varepsilon$ cînd timpul este constant, curba funcţiei de curgere lentă (fluaj) $\varepsilon - t$ cînd tensiunea este constantă şi curba funcţiei de relaxare $\sigma - t$ cînd deformaţia specifică este constantă.

Coeficienţii fenomenologici se pot determina din condiţia ca funcţia de curgere lentă obţinută din (1) să aproximeze cît mai bine curba funcţiei de curgere lentă determinată experimental [4].

În calculul structurilor din bare trebuie stabilite relaţiile fizice dintre eforturi şi deplasările relative corespunzătoare ale feţelor unui element infinitezimal de bară. Aceste relaţii se determină pentru fiecare solicitare în parte, folosind relaţiile de echivalenţă statică pe secţiune dintre eforturi şi tensiuni ($S - \sigma$), relaţiile dintre deplasările relative şi deformaţiile specifice ($\Delta - \varepsilon$) şi ecuaţia de stare a modelului reologic ($\sigma - \varepsilon$) (1).

Pentru solicitările de întindere-compresiune şi încovoiere pură, admiţîndu-se ipoteza lui Bernoulli, se obţin relaţiile:

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) N(t) = A \cdot Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \Delta_x,$$
$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) M(t) = I \cdot Q\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right) \Delta\varphi, \tag{3}$$

unde N şi M sînt forţa axială şi momentul încovoietor dintr-o secţiune curentă a barei, A şi I sînt aria şi momentul de inerţie principal în raport cu axa neutră a secţiunii transversale, iar Δ_x şi $\Delta\varphi$ sînt alungirea şi rotirea dintre feţele elementului infinitizimal.

Prin aplicarea transformatei directe Laplace, relaţiile diferenţiale (3) sînt duse în domeniul simbolic şi transformate în relaţii algebrice:

$$\Delta_x^* = \frac{P(s)}{Q(s) \cdot A} N^*,$$
$$\Delta\varphi^* = \frac{P(s)}{Q(s) \cdot I} M^*, \tag{4}$$

unde $P(s)$ şi $Q(s)$ sînt polinoame algebrice de gradul m, respectiv n în s parametrul transformatei Laplace, iar prin asteric s-a notat transformata Laplace a mărimii respective. La stabilirea acestor relaţii s-a admis că, eforturile, deplasările relative şi derivatele lor pînă la ordinele $m - 1$, respectiv $n - 1$, sînt nule la timpul $t = 0$. Relaţiile (4) sînt asemănătoare ca formă cu relaţiile corespunzătoare folosite în calculul liniar, pe care le generalizează.

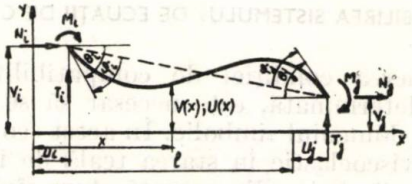


Fig. 2

Pentru calculul matriceal al structurilor, este necesar să se stabilească matricele de flexibilitate şi de rigiditate ale barei. În acest scop se consideră o bară dreaptă cu secţiunea constantă supusă la extremităţi la eforturile şi deplasările de capăt din figura 2.

Din cele trei ecuaţii de echilibru ale barei şi din relaţiile ce definesc starea de deformare, cărora li s-a aplicat transformata Laplace, rezultă pentru axa deformată ecuaţiile diferenţiale :

$$\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x} = \frac{P(s)}{Q(s)\cdot A}\cdot N^* + \frac{\alpha_t}{A}\int_A t^{0*}\,\mathrm{d}A,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2v^*}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{P(s)}{Q(s)\cdot I}\left[M_i^* - (M_i^* + M_j^*)\frac{x}{l}\right] - \frac{\alpha_t}{I}\int_A t^{0*}y\,\mathrm{d}A, \tag{5}$$

în care s-a ţinut seama şi de efectul variaţiei de temperatură. Din condiţiile la limită transformate Laplace,

$$u^*(0) = u_i^*\,;\ v^*(0) = v_i^*\ \text{şi}\ v^*(l) = v_j^*, \tag{6}$$

se determină constantele de integrare, iar din relaţiile

$$u^*(l) = u_j^*\,;\ \left.\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \varphi_i^*\ \text{şi}\ \left.\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = \varphi_j^* \tag{7}$$

se determină relaţia fizică a barei drepte din domeniul simbolic :

$$\begin{Bmatrix}\Delta l^*\\ \theta_i^*\\ \theta_j^*\end{Bmatrix} = \frac{P(s)}{Q(s)\cdot I}\begin{bmatrix}6 & I/A & 0 & 0\\ 0 & & 2 & -1\\ 0 & & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}N^*\\ M_i^*\\ M_j^*\end{Bmatrix} + \alpha_t l\begin{Bmatrix}t_m^{0*}\\ \Delta t^{0*}/2h\\ \Delta t^{0*}/2h\end{Bmatrix}, \tag{8}$$

în care s-a presupus o variaţie liniară a temperaturii pe secţiune. Forma matriceală a relaţiei (8) este

$$d_b^* = f_b\cdot p_b^* + d_b^{*\mathrm{temp}} \tag{9}$$

şi generalizează relaţiile corespunzătoare ale barei din material elastic liniar (acestea se obţin dacă se consideră $Q(s)/P(s) = E$).

3. STABILIREA SISTEMULUI DE ECUAŢII DE CONDIŢIE

Pentru impunerea condiţiei de compatibilitate geometrică la o structură static nedeterminată, este necesar să se stabilească principiul forţelor virtuale din domeniul simbolic. În acest scop se consideră o structură din material vîscoelastic în starea reală de încărcare şi deformare (fig. 3). Toate mărimile fizice din această stare sînt funcţii de timp.

Se ataşează aceeaşi structură în starea virtuală de încărcare şi deformare, realizată dintr-un astfel de material, încît toate mărimile fizice din această stare nu sînt funcţie de timp, de exemplu realizată din material elastic liniar (fig. 4).

Principiul forțelor virtuale, exprimat între cele două stări ale structurii prin relația

$$\bar{Q}^T \cdot D + \bar{R}^T \cdot D_{ced} - \Sigma \int \bar{S}^T \Delta - \Sigma \int \alpha_t \cdot t_m^0 \cdot \bar{N}\, dx - \Sigma \int \alpha_t \cdot \frac{\Delta t^0}{h} \cdot \bar{M} dx = 0. \tag{10}$$

sau $\bar{Q}^T \cdot D + \bar{R}^T \cdot D_{ced} - \bar{p}^T \cdot (d + d^{temp}) = 0,$

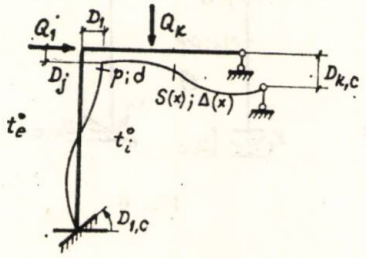


Fig. 3

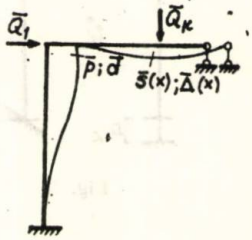


Fig. 4

reprezintă condiția necesară și suficientă ce asigură compatibilitatea deplasărilor reale $D - \Delta$ (sau d), dacă forțele virtuale $\bar{Q} - \bar{S}$(sau $\bar{p}$) sînt în echilibru. În aceste relații s-a ținut seama că structura reală este supusă la acțiunea sarcinilor exterioare, cedărilor de reazem și variației de temperatură.

Aplicînd transformata Laplace directă, relațiilor (10), se obține expresia principiului forțelor virtuale din domeniul simbolic [4]:

$$\bar{Q}^T \cdot D^* + \bar{R}^T \cdot D^*_{ced} - \Sigma \int \bar{S}^T \cdot \Delta^* - \Sigma \int \alpha_t \cdot t_m^{0*} \cdot \bar{N}\, dx - \Sigma \int \alpha_t \cdot \frac{\Delta t^{0*}}{h} \cdot \bar{M}\, dx = 0 \tag{11}$$

sau $\bar{Q}^T \cdot D^* + \bar{R}^T \cdot D^*_{ced} - \bar{p}^T (d^* + d^{*temp}) = 0,$

în care trebuie introduse relațiile fizice din domeniul simbolic (4), respectiv (9). Din aceste relații se pot obține formulele de calcul a deplasărilor punctuale la structuri din materiale vîscoelastice, dacă în starea virtuală încărcarea constă numai dintr-o sarcină unitară corespunzătoare deplasării [4].

Fie o structură de n ori static nedeterminată încărcată cu sarcini cedări de reazem și variație de temperatură (fig. 5).

Prin suprimarea celor n legături suplimentare și înlocuirea lor cu forțele de legătură corespunzătoare X, se obține sistemul de bază (fig. 6), pe care condiția de echilibru static conduce la relațiile:

$$M_x = \sum_{j=1}^{n} m_j X_j + M_p \tag{12}$$

sau $$p = B_x \cdot X + B_q \cdot Q, \tag{13}$$

unde M_x este momentul încovoietor dintr-o secțiune curentă, m_j și M_p sînt momentele din aceiași secțiune produse de $X_j = 1$ și de sarcini, p este vectorul eforturilor din capetele barelor, iar B_x și B_q sînt matricele coeficienților de influență a eforturilor (o coloană i din aceste matrice reprezintă eforturile din capetele barelor produse de $X_j = 1$, respectiv $Q_i = 1$).

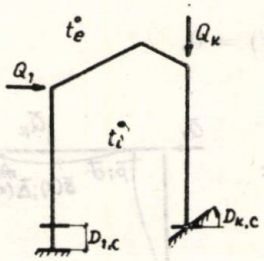


Fig. 5

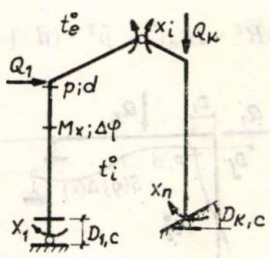


Fig. 6

Aplicînd transformata Laplace relației (12) și apoi introducînd-o în (4) se obține pentru condiția fizică din domeniul simbolic expresia :

$$\Delta_\varphi^* = \sum_{j=1}^{n} \frac{P(s)}{Q(s) \cdot I} m_j X_j^* + \frac{P(s)}{Q(s) \cdot I} M_p^*, \tag{14}$$

care este valabilă pentru orice valori ale necunoscutelor X^*. De asemenea, pentru întreaga structură condiția fizică din domeniul simbolic este :

$$d^* = F \cdot p^* + d^{*\text{temp}}, \tag{15}$$

unde F este matricea de flexibilitate asamblată a structurii, obținută prin așezarea pe diagonala principală a matricelor de flexibilitate a barelor. Aplicînd transformata Laplace relației (13) și apoi introducînd-o în (15) se obține :

$$d^* = F \cdot (B_x \cdot X^* + B_q \cdot Q^*) + d^{*\text{temp}}, \tag{16}$$

valabilă pentru orice valori X^*.

Valorile reale ale acestor necunoscute rezultă impunînd condiția de compatibilitate geometrică a deformatei sistemului de bază cu cea a structurii date. Această condiție se exprimă prin principiul forțelor virtuale din domeniul simbolic (11).

În acest scop se consideră sistemul de bază în starea virtuală încărcat pe rînd cu cîte o necunoscută $\bar{X}_i = 1$, $i = 1 - n$, sau cu toate necunoscutele $\bar{X}$ (fig. 7 și 8). În primul caz condiția de echilibru conduce la reacțiunile r_{ik} și la momentul încovoietor din secțiunea curentă m_i, iar în cel de-al doilea caz la reacțiunile și eforturile de capăt :

$$\bar{r} = B_r \cdot \bar{X} \text{ și } \qquad \bar{p} = B_x \cdot \bar{X}, \tag{17}$$

unde B_r este matricea coeficienţilor de influenţă a reacţiunilor (o coloană i din această matrice reprezintă reacţiunile produse de $\bar{X}_i = 1$).

Pentru lucrul mecanic virtual exterior din domeniul simbolic efectuat de forţele active şi reactive virtuale (fig. 7 sau fig. 8) pe transformatele Laplace ale deplasărilor reale corespunzătoare (fig. 6), rezultă expresiile :

$$L_{\text{ext},i} = 1 \cdot D^{*\text{ced}}_{Xi} + \sum_{(k)} r_{ik} \cdot D^{*\text{ced}}_{k}$$

sau

$$L_{\text{ext}} = \bar{X}^T \cdot D^{*\text{ced}}_{X} + \bar{r}^T \cdot D^{*\text{ced}}_{r} = \bar{X}^T \cdot (D^{*\text{ced}}_{X} + B^T_r \cdot D^{*\text{ced}}_{r}), \tag{18}$$

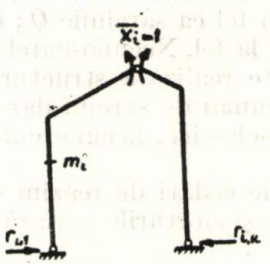


Fig. 7

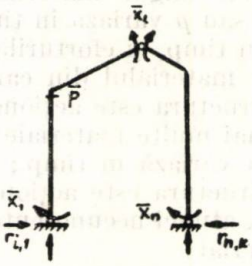


Fig. 8

unde s-a ţinut seama de (17) şi s-a descompus vectorul cedărilor de reazim în doi subvectori. De asemenea, pentru lucrul mecanic virtual interior din domeniul simbolic efectuat de eforturile virtuale (fig. 7 sau 8) pe transformatele Laplace ale deplasărilor reale corespunzătoare (fig. 6), rezultă expresiile :

$$L_{\text{int},i} = -\int m_i \Delta^* \varphi = -\sum_{j=1}^{n} \left(\int \frac{P(s)}{Q(s) \cdot I} \, m_i \, m_j \, \mathrm{d}x \right) X^*_j - \int \frac{P(s)}{Q(s)\, I} \, m_i \, M^*_p \, \mathrm{d}x$$

sau

$$L_{\text{int}} = -\bar{p}^T d^* = -\bar{X}^T B^T_x \, (F \cdot B_x \cdot X^* + F \cdot B_q \cdot Q^* + d^{*\text{temp}}), \tag{19}$$

unde s-a ţinut seama de relaţiile (14), (16) şi (17).

Condiţia de anulare a lucrului mecanic virtual total din domeniul simbolic, care asigură satisfacerea condiţiei de compatibilitate geometrică, conduce la sistemul ecuaţiilor de condiţie al metodei forţelor din domeniul simbolic :

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} \, X^*_j + \Delta^*_{ip} = 1 \cdot D^{*\text{ced}}_{Xi} + \sum_{(k)} r_{ik} \, D^{*\text{ced}}_{k} \quad \text{cu} \quad i = 1 - n, \tag{20}$$

unde s-a notat

$$\delta_{ij} = \int \frac{P(s)}{Q(s)\, I} \, m_i \, m_j \, \mathrm{d}x \quad \Delta^*_{ip} = \int \frac{P(s)}{Q(s)\, I} \, m_i \, M^*_p \, \mathrm{d}x \tag{21}$$

sau

$$B_x^T \cdot F \cdot B_x \cdot X^* + B_x^T \cdot F \cdot B_q \cdot Q^* + B_x^T \cdot d^{*\text{temp}} = D_x^{*\text{ced}} + B_r^T \cdot D_r^{*\text{ced}}, \quad (22)$$

unde s-a ţinut seama că necunoscutele $\bar{X}$ sînt liniar independente.

Prin rezolvarea sistemului (20) sau(22) se determină valorile necunoscutelor X^*, iar prin aplicarea transformatei Laplace inverse se obţin valorile din domeniul fizic real ale acestor necunoscute static nedeterminate cu ajutorul cărora se trasează diagramele de eforturi folosind relaţiile (12) sau (13).

Din analiza sistemului (20) sau (22) rezultă:

— dacă structura este acţionată numai de sarcini exterioare şi este realizată dintr-un singur material vîscoelastic, atunci necunoscutele X şi eforturile M_x sau p variază în timp la fel ca sarcinile Q; dacă sarcinile sînt constante în timp, şi eforturile sînt la fel. Necunoscutele X nu depind în acest caz de materialul din care este realizată structura;

— dacă structura este acţionată numai de sarcini dar este realizată din două sau mai multe materiale vîscoelastice, necunoscutele X şi eforturile M_x sau p variază în timp;

— dacă structura este acţionată de cedări de reazim şi/sau variaţii de temperatură, atunci necunoscutele X şi eforturile variază în timp, deci depind de material;

— generalizează sistemul corespunzător din calculul elastic liniar (se reduce la acesta dacă în matricea F se consideră $P(s)/Q(s) = 1/E$).

4. EXEMPLUL DE CALCUL

Se prezintă calculul cadrului portal cu stîlpii şi rigla realizate din materiale vîscoelastice diferite (fig. 9). Alegînd ca sistem de bază cadrul simplu rezemat, rezultă diagramele din figura 10.

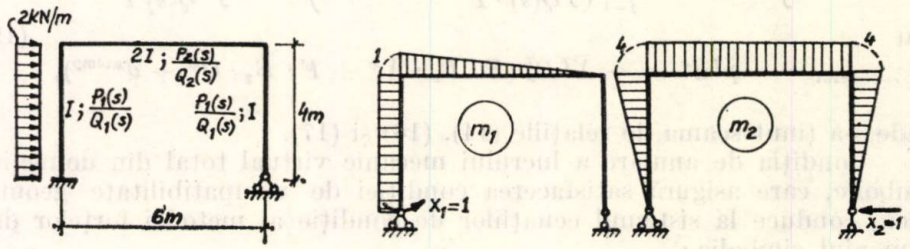


Fig. 9

Folosind regula Veresceaghin pentru evaluarea integralelor din relaţiile (21) rezultă, pentru coeficienţii şi termenii liberi ai sistemului (20), expresiile:

$$\delta_{11} = \frac{P_1(s)}{Q_1(s) \cdot I}(4 + u); \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{P_1(s)}{Q_1(s) \cdot I}(8 + 6u),$$

$$\delta_{22} = \frac{P_1(s)}{Q_1(s) \cdot I}\left(\frac{128}{3} + 48u\right); \quad \Delta_{1p}^* = -\frac{P_1(s)}{Q_1(s) \cdot I}\left(\frac{128}{3} + 16u\right) \cdot 1/s,$$

$$\Delta_{2p}^* = -\frac{P_1(s)}{Q_1(s) \cdot I}\left(\frac{320}{3} + 96u\right) \cdot 1/s, \tag{23}$$

unde $u = P_2(s) \cdot Q_1(s) / Q_2(s) \cdot P_1(s)$. (24)

Sistemul ecuațiilor de condiție din domeniul simbolic, are în acest caz următoarea formă:

$$(4 + u) \cdot X_1^* + (8 + 6u) \cdot X_2^* - \left(\frac{128}{3} + 16u\right)/s = 0,$$

$$(8 + 6U) \cdot X_1^* + \left(\frac{128}{3} + 48u\right) \cdot X_2^* -$$

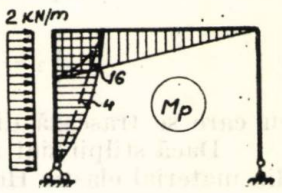


Fig. 10

$$-\left(\frac{320}{3} + 96u\right)/s = 0, \tag{25}$$

cu soluția

$$X_1^* = \left(16 + \frac{0{,}036}{u + 0{,}83} - \frac{74{,}709}{u + 10{,}72}\right)/s,$$

$$X_2^* = \left(-\frac{0{,}027}{u + 0{,}83} + \frac{8{,}919}{u + 10{,}72}\right)/s. \tag{26}$$

Dacă structura este realizată în întregime din același material elastic Hooke sau vîscoelastic, atunci $u = 1$ și din (26) rezultă

$$X_1^* = 9{,}644/s; \quad X_2^* = 0{,}746/s, \tag{27}$$

iar prin aplicarea transformatei Laplace inverse, se obține:

$$X_1 = 9{,}644, \quad X_2 = 0{,}746, \tag{28}$$

valori cu care se trasează diagramele de eforturi și care se obțin și prin calculul elastic liniar.

Dacă stîlpii sînt realizați din material elastic Hooke, iar rigla din material vîscoelastic Maxwell (fig. 11.), atunci

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{1}{E}; \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{1 + \tau s}{\eta s} \text{ și } u = 1 + \frac{1}{\tau s} \tag{29}$$

şi din (26) rezultă

$$X_1^* = \frac{16}{s} + \frac{0{,}019}{s + 0{,}546/\tau} - \frac{6{,}374}{s + 0{,}085/\tau}, \tag{30}$$

$$X_2^* = -\frac{0{,}014}{s + 0{,}546/\tau} + \frac{0{,}761}{s + 0{,}085/\tau}.$$

Prin aplicarea transformatei Laplace inverse acestor relaţii, rezultă

$$X_1 = 16 + 0{,}019\, e^{-0{,}546t/\tau} - 6{,}374\, e^{-0{,}085t/\tau},$$
$$X_2 = -0{,}014\, e^{-0{,}546t/\tau} + 0{,}761\, e^{-0{,}085t/\tau}, \tag{31}$$

cu care se trasează diagramele de eforturi (fig. 12).

Dacă stîlpii sînt realizaţi din material vîscoelastic Maxwell, iar rigla din material elastic Hooke, atunci

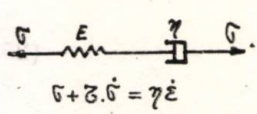


Fig. 11

$$\frac{P_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{1 + \tau s}{\eta s}; \quad \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{E}$$

$$\text{şi } u = \frac{\tau s}{1 + \tau s}, \tag{32}$$

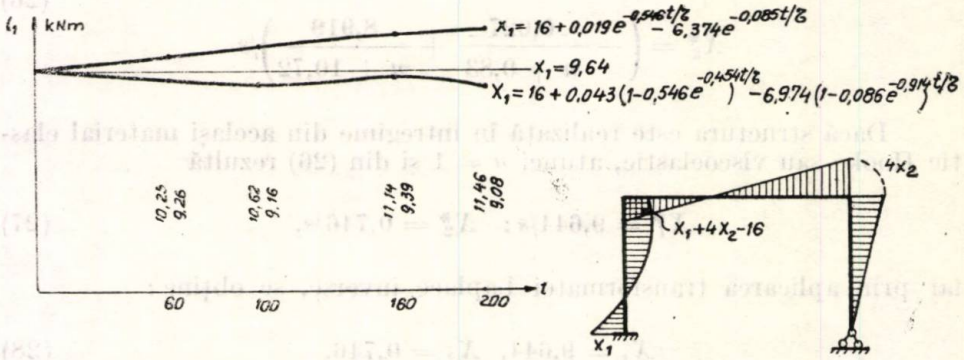


Fig. 12

$$X_1^* = \frac{16}{s} + \frac{0{,}0197}{\tau s(s + 0{,}454/\tau)} + \frac{0{,}0197}{s + 0{,}454/\tau} - \frac{6{,}374}{\tau s(s + 0{,}914/\tau)} -$$

$$- \frac{6{,}374}{s + 0{,}914/\tau}, \tag{33}$$

$$X_2^* = -\frac{0{,}0147}{\tau s(s + 0{,}454/\tau)} - \frac{0{,}0147}{s + 0{,}454/\tau} +$$

$$+ \frac{0{,}761}{\tau s(s + 0{,}914/\tau)} + \frac{0{,}761}{s + 0{,}914/\tau},$$

iar prin aplicarea transformatei Laplace inverse se obține

$$X_1 = 16 + 0{,}043\,(1 - 0{,}546\,e^{-0{,}454t/\tau}) - 6{,}974\,(1 - 0{,}086\,e^{-0{,}914t/\tau}),$$
$$X_2 = -0{,}032\,(1 - 0{,}546\,e^{-0{,}454t/\tau}) + 0{,}833(1 - 0{,}086\,e^{-0{,}914t/\tau}). \tag{34}$$

În figura 12 este reprezentată variația în timp a momentului încovoietor X_1 cînd $\tau = 50$ zile și pentru cele trei cazuri cercetate. De asemenea, este prezentată și diagrama de momente finale.

5. CONCLUZII

Prin folosirea calculului operațional este adaptată metoda forțelor pentru calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale vîscoelastice.

Sistemul ecuațiilor de condiție este stabilit atît sub formă ce se pretează la un calcul manual, cît și sub formă matriceală adecvată calculului automatizat.

Calculul structurilor, realizate din materiale elastic liniare, apare ca un caz particular al calculului prezentat.

Este prezentat un exemplu de calcul, care scoate în evidență importanța procedeului de calcul prezentat precum și generalitatea sa.

Primită la redacție la 15 aprilie 1977

BIBLIOGRAFIE

1. C. Avram, ș. a., *Rezistențele și deformațiile betonului*, Ed. teh. Buc. 1971.
2. D. R. Bland, *The Theory of Linear Viscoelasticity*, Oxford, 1960.
3. F. R. Eirich, *Rheology*, vol. I, II, III, Acad. Press, New York, 1956.
4. St. Jerca, *Calculul structurilor realizate din materiale cu comportare elastic neliniară sau vîscoelastică*, Teză de doctorat, Institutul de construcții București, 1976.
5. M. Mihalcu, *Materiale plastice armate*, Edit. tehnică, București, 1973.
6. Ch. Massonnet, ș.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Trad. l. franc. Edit. tehnică, București, 1974.
7. G. Nisim, *L'industria rumena della materie plastiche 206000 t prodate nel 1970*, Materie plastiche ed elastomeri, 1971.
8. M. Reiner, *Deformation, Strain and Flow*, London, 1960.
9. Cr. Simionescu, *Industria de materiale plastice, creație a politicii de idustrializare a Partidului Comunist Român*, Materiale plastice, 5 (1971).

COMBINAREA OPTIMĂ A SIGURANȚEI ȘI ECONOMIEI ÎN DIMENSIONAREA STRUCTURILOR[1)]

de DAN FRANGOPOL
Institutul de construcții București
JACQUES RONDAL
Universitatea de stat din Liège Belgia

Utilizînd conceptul probabilist al siguranței se stabilesc relații care furnizează valori optime pentru probabilitatea de cedare a unei structuri și pentru costul total probabil al structurii considerate.

1. Calitatea unei construcții se apreciază prin măsura în care aceasta satisface unele cerințe principale. O primă cerință are caracter funcțional; o construcție de calitate trebuie să răspundă în măsura necesară tuturor condițiilor cerute pentru buna sa funcționare, întrucît numai astfel construcția poate corespunde scopului pentru care se execută. O a doua cerință are caracter tehnic și privește în principal siguranța construcției; o construcție de calitate trebuie să satisfacă cerințele funcționale în condiții de siguranță corespunzătoare acestor funcțiuni. O a treia cerință are caracter economic; o construcție de calitate trebuie să răspundă cerințelor funcționale și de siguranță în condiții cît mai avantajoase din punct de vedere economic, fără însă ca avantajele economice să se realizeze în dauna funcționalității sau a siguranței.

Progresele obținute în ultimul deceniu în domeniul calculului structurilor permit în multe cazuri adoptarea unor soluții structurale funcționale care să confere siguranța necesară construcțiilor în condiții din ce în ce mai economice. Siguranța și economia construcțiilor sînt astăzi două cerințe esențiale, care trebuie realizate împreună în corecta înțelegere a corelării lor, fără exagerări nici de partea siguranței în dauna economiei, dar nici de partea economiei în dauna siguranței.

2. Dat fiind faptul că cerințele de realizare a unei siguranțe acceptabile și de economisire a cheltuielilor de investiție și a consumurilor de materiale au un caracter contradictoriu, problema dimensionării structurilor de rezistență ale construcțiilor trebuie privită ca o problemă de compromis, în sensul combinării optime a siguranței și economiei.

[1)] Text revăzut al comunicării „Considerations on Optimum Combination of Safety and Economy" prezentate la al X-lea Congres al Asociației Internaționale pentru Poduri și Structuri Inginerești (IABSE), Tokio, 6—11 septembrie 1976.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 38, NR. 2, 1979, P. 299—303

Criteriul cantitativ care trebuie satisfăcut pentru obținerea unor structuri optime din punct de vedere economic, se exprimă prin minimizarea costului total probabil al structurii respective C_t. Această mărime este dată de suma a doi termeni:

$$C_t = C_1 + C', \tag{1}$$

în care C_1 reprezintă costul de investiție, iar C' reprezintă costul total al urmărilor și remedierii defecțiunilor și/sau avariilor suferite de structură în decursul perioadei de exploatare prevăzute.

În cazul considerării pentru structură a unei singure stări limită, a cărei apariție implică consecințele economice exprimate prin costul C_2 și a cărei probabilitate de realizare este $P_{(-)}$, termenul C' din relația (1) se poate calcula sub forma produsului:

$$C' = C_2 \cdot P_{(-)}. \tag{2}$$

Ținînd seama de (2), relația (1) se scrie sub forma

$$C_t = C_1 + C_2 P_{(-)}. \tag{3}$$

În general, un spor de dimensionare generează o creștere a costului inițial C_1 și o scădere a costului C_2 implicat de consecințele apariției stării limită considerate.

Conform criteriului de optimalitate enunțat, obiectivul dimensionării este găsirea structurii căreia îi corespunde valoarea minimă a costului total probabil (3). Altfel exprimat, structura optimă din punct de vedere economic este cea pentru care siguranța (măsurată prin valoarea probabilității de supraviețuire $P_{(+)} = 1 - P_{(-)}$ fără atingerea stării limită considerate) minimizează valoarea costului C_t. Probabilitatea $P_{(-)}$ pentru care C_t este minim se numește probabilitate optimă sau probabilitate economică și se notează $P^*_{(-)}$. Expresia acestei probabilități este calculată în cele ce urmează.

3. Coeficientul de siguranță central θ, definit ca raportul dintre valoarea medie $\bar{R}$ a rezistenței structurii R în raport cu starea limită considerată și valoarea medie $\bar{S}$ a efectului încărcărilor S asupra structurii (deci $\theta = \bar{R}/\bar{S}$), se poate considera, fără riscul de a introduce erori semnificative pentru majoritatea tipurilor de repartiție ale variabilelor aleatoare R și S, ca o funcție liniară crescătoare de cologaritmul probabilității de apariție a stării limită respective:

$$\theta = \alpha_1 \cdot \operatorname{colog}_{10} P_{(-)} + \alpha_2, \tag{4}$$

în care α_1 este creșterea necesară coeficientului θ pentru a reduce de 10 ori probabilitatea $P_{(-)}$, iar α_2 este o constantă nenegativă.

Pe de altă parte, costul inițial C_1 este considerat, în general, ca o funcție liniară (evident crescătoare) de coeficientul de siguranță θ:

$$C_1 = \beta_1 \cdot \theta + \beta_2, \tag{5}$$

în care β_1 și β_2 sînt constante nenegative.

Intoducînd (4) în (5), se obține

$$C_1 = \gamma_1 \cdot \operatorname{colog}_{10} P_{(-)} + \gamma_2, \tag{6}$$

în care $\gamma_1 = \alpha_1 \cdot \beta_1$ reprezintă creșterea necesară costului inițial C_1 pentru a reduce de 10 ori probabilitatea $P_{(-)}$, iar $\gamma_2 = \alpha_2 \cdot \beta_1 + \beta_2$ este o constantă nenegativă.

Înlocuind (6) în (3), se obține expresia costului total probabil:

$$C_t = \gamma_1 \cdot \operatorname{colog}_{10} P_{(-)} + C_2 \cdot P_{(-)} + \gamma_2. \tag{7}$$

Valoarea optimă a probabilității $P_{(-)}$, notată $P_{(-)}^*$, rezultă din rezolvarea ecuației:

$$\frac{\partial C_t}{\partial P_{(-)}} = -\frac{\gamma_1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{P_{(-)}^*} + C_2 = 0, \tag{8}$$

în care s-a ținut seama că C_2 nu depinde de $P_{(-)}$ $\left(\text{deci } \frac{\partial C_2}{\partial P_{(-)}} = 0\right)$.

Prin urmare, din ecuația (8) se obține

$$P_{(-)}^* = \frac{\gamma_1}{C_2 \cdot \ln 10}. \tag{9}$$

Costul total probabil minim, notat C_t^*, corespunzător probabilității optime $P_{(-)}^*$, se obține înlocuind (9) în (7):

$$C_t^* = \gamma_1 \cdot \operatorname{colog}_{10} \frac{\gamma_1}{C_2 \cdot \ln 10} + \frac{\gamma_1}{\ln 10} + \gamma_2. \tag{10}$$

4. Dacă soluția, caracterizată prin costul total probabil C_t, nu este optimă (adică dacă $C_t \neq C_t^*$), atunci această soluție generează un spor de cost total probabil dat de diferența:

$$\Delta C = C_t - C_t^*. \tag{11}$$

Înlocuind în (11) costurile C_t și C_t^* prin expresiile (7), respectiv (10), și ținînd seama de (9), se obține, în final,

$$\Delta C = \gamma_1 \left[\log_{10} \frac{P_{(-)}^*}{P_{(-)}} + \frac{1}{\ln 10} \left(1 - \frac{P_{(-)}^*}{P_{(-)}} \right) \right]. \tag{12}$$

Figura 1 reprezintă variația raportului $\Delta C/\gamma_1$ în funcție de probabilitatea $P_{(-)}$, pe intervalul $[10^{-2}; 10^{-6}]$, în situația în care soluția optimă este caracterizată prin probabilitatea $P_{(-)}^* = 10^{-4}$ de apariție a stării limită considerate.

În tabelul 1 se prezintă pentru cîteva valori ale probabilității $P_{(-)}$ din intervalul $[10^{-1}; 10^{-7}]$ valorile corespunzătoare ale raportului; $\Delta C/\gamma_1$ în situația $P_{(-)}^* = 10^{-4}$.

Tabelul 1

Sporul de cost $\Delta C/\gamma_1$ în funcție de $P_{(-)}$ pentru $P^*_{(-)}=10^{-4}$.

$P_{(-)}$	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
$\text{colog}_{10} P_{(-)}$	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta C/\gamma_1$	430,86	40,99	2,91	0,00	0,61	1,57	2,57
	subdimensionare			soluția optimă	supradimensionare		

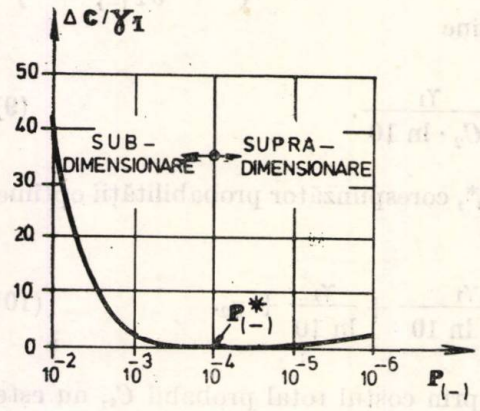


Fig. 1

Se menționează că pentru orice șir de probabilități cu valorile în progresie geometrică cu rația 0,1 de tipul: $10^3 p$; $10^2 p$; $10p$; p; $10^{-1}p$; $10^{-2}p$; $10^{-3}p$, ..., în care $p = P^*_{(-)} < 10^{-3}$, rezultatele prezentate în figura 1 și în tabelul 1 rămîn valabile.

5. Din examinarea rezultatelor prezentate în figura 1 și în tabelul 1, se pot trage următoarele concluzii:

a). Pentru aceeași valoare absolută a ecartului de siguranță în raport cu soluția optimă:

$$\Delta P = |\,\text{co}\log_{10} P_{(-)} - \text{colog}_{10} P^*_{(-)}\,| = \left|\log_{10} \frac{P^*_{(-)}}{P_{(-}}\right|, \qquad (13)$$

sporul costului total probabil ΔC corespunzător subdimensionării ($P_{(-)} > P^*_{(-)}$) este superior celui corespunzător supradimensionării ($P_{(-)} < P^*_{(-)}$);

b). Subdimensionarea implică un spor de cost total probabil mult mai accentuat decît supradimensionarea.

În consecință, este rațional ca în cazurile de incertitudine subiectivă ridicată asupra variabilelor aleatoare care condiționează siguranța structurii (în sensul că distribuțiile statistice ale diferitelor variabile aleatoare nu sînt cunoscute suficient din cauza lipsei de date statistice) să se adopte unele sporuri de dimensionare, fără ca astfel costul total probabil să varieze sensibil în raport cu soluția optimă (aproximativă) indicată de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Dicke, *Achievement of safety and economy in design and construction*, 10 th Congress IABSE, Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976.
2. D. Frangopol, *Etude probabiliste de la sécurité des constructions*, Thèse de Docteur en Sci. Appl., Univ. de Liège, 1976.
3. D. Frangopol, *Discussion sur l'optimisation probabiliste des constructions*, La Sécurité des Constructions, Editions Eyrolles, Paris, 1976.
4. D. Frangopol, J. Rondal, *Le dimensionnement probabiliste optimal des structures*, Annales de l'ITBTP, Série : Théories et Méthodes de Calcul, *218*, *363*, Juillet-Août (1978).
5. F. K. Ligtenberg, *What safety margin is necessary in a structure?*, Discussion No. 5, Tech. Committee No. 10, ASCE-IABSE Int. Conf. on Planning and Design of Tall Buildings, Vol. DS, Lehigh Univ., August, 1972.
6. N. C. Lind, A. G. Davenport, *Towards practical application of structural reliability theory*, Paper SP 31—3, Probabilistic design of reinforced concrete buildings, Detroit, 1972.
7. F. Moses, *Approaches to structural reliability and optimisation*, SM Study No. 1, Univ. of Waterloo, Ontario, 1969.
8. H. Sandi, *Contribuții la teoria dimensionării structurilor*, Teză de doctorat, Institutul de construcții București, 1966.

ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR APLICATE ÎN STUDIUL ŞI INTERPRETAREA FENOMENELOR DE CURGERE DIN LAGĂRELE HIDROSTATICE

M. A. DUMBRAVĂ
Institutul politehnic Bucureşti

Pe baza elementelor generale din teoria grafurilor este interpretat graful curgerii într-un lagăr hidrostatic radial. Utilizînd un exemplu numeric, se arată cele mai importante etape funcţionale, cu grafurile respective, din care rezultă cîteva concluzii interesante. Se mai calculează drumul de rezistenţă hidraulică minimă, respectiv maximă, din graf. Sînt desprinse cîteva rezultate interesante, privind aspecte practice importante.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare mai veche [4], au fost studiate posibilităţile pe care e oferă utilizarea grafurilor de fluenţă în studiul şi rezolvarea lagărelor hidrostatice radiale şi/sau axiale.

Prezenta lucrare îşi propune analiza grafului curgerii în lagărul hidrostatic radial, pe baza elementelor generale din teoria grafurilor. Pentru rezolvarea numerică a unui caz dat, s-a apelat la metoda bilanţului de debite [7,8], completată pentru calcul în orice regim de curgere. Calculul parametrilor de viscozitate a fost efectuat pe baza relaţiilor propuse în [2].

2. ELEMENTE TEORETICE

Se consideră cazul unui lagăr hidrostatic radial, cu şase degajări alimentat la presiune constantă, prin restrictori de tip capilar (fig. 1). Se asociază mulţimea $X = \{x_a, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, unde x_a corespunde punctului comun de alimentare la presiune p_a, x_0 corespunde mediului exterior lagărului, iar $x_i (i = 1, \ldots 6)$ celor şase degajări. Dacă se cunosc sensurile de curgere ale debitelor circumferenţiale $Q_{i,i+1}$, presiunile din lagăr şi debitele Q_i (fig. 1), se poate trasa un graf $G\ (X, \Gamma)$, unde Γ este aplicaţia :

$$\Gamma : X \to \mathscr{P}(X) \qquad (1)$$

care definește debitele principale din lagăr, de fapt circulația (curgerea) lubrifiantului între inelul colector de alimentare și mediul exterior lagărului. Se poate denumi această aplicație Γ ca fiind aplicația „curgere", iar graful corespunzător graful curgerii.

În figura 2 este reprezentat un graf de curgere, punctele A și O corespund elementelor x_a, x_0. Se constată ușor că ordinul acestui graf este

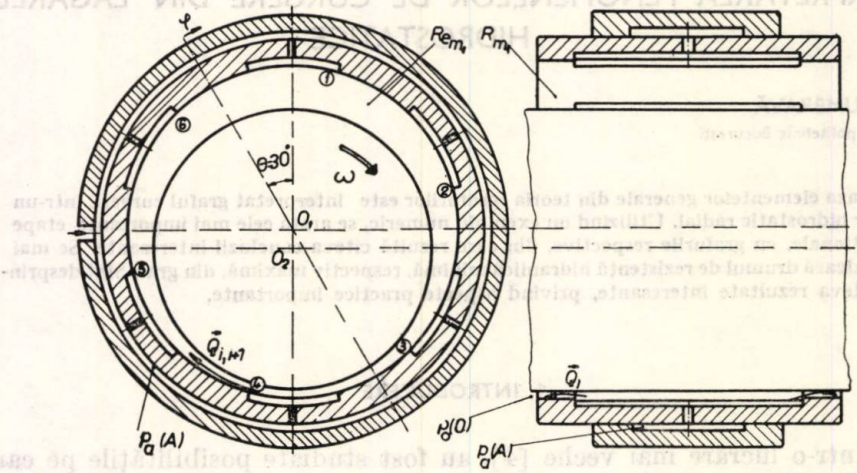


Fig. 1. — Lagăr hidrostatic radial cu șase degajări, cu alimentare la presiune constantă.

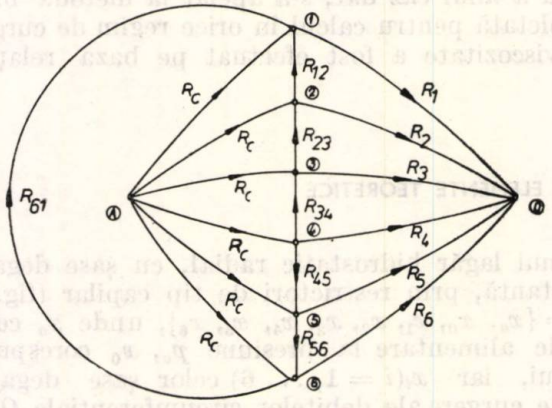


Fig. 2. — Graful curgerii într-un lagăr hidrostatic radial cu șase degajări (variantă).

opt ($|X| = \text{card } X = 8$), graful este orientat și antisimetric. Un graf de curgere nu poate avea bucle. Graful din figura 2 nu are circuite, nici drumuri hamiltoniene. Se va arăta în cele ce urmează că există grafuri de curgere cu circuite și/ sau drumuri hamiltoniene.

Se ştie că un drum elementar într-un graf orientat este un drum (succesiune de arce) care nu trece de două ori prin acelaşi vîrf. În cazul grafului din figura 2 se pot enumera următoarele drumuri elementare:

$$\{x_a, x_i, x_0\}, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

$$\{x_a, x_2, x_1, x_0\}, \{x_a, x_3, x_2, x_0\}, \{x_a, x_4, x_3, x_0\}, \tag{2}$$

$$\{x_a, x_3, x_2, x_1, x_0\}, \{x_a, x_4, x_3, x_2, x_0\},$$

$$\{x_a, x_4, x_3, x_2, x_1, x_0\}$$

şi cele care se obţin din aceasta prin înlocuirile $2 \to 6$, $3 \to 5$. În total 18 drumuri elementare, deci un număr egal de circuite potenţiale de curgere. Reamintim că această concluzie găseşte aplicaţie şi explică metoda de lucru propusă de cercetătorul indian Majumdar în lucrările sale privitoare la lagărele gazostatice.

Studiind incidenţele în graf, se constată că mulţimea arcelor incidente la x_0 spre exterior [10], [11], [12], notată $\omega^+(x_0) = \emptyset$, deci nod consumator (nod puţ), iar mulţimea arcelor incidente la x_a spre interior $\omega^-(x_a) = \emptyset$, deci nod sursă. Asupra acestei din urmă constatări se va reveni în paragraful următor.

Se poate studia stabilitatea grafului. Se reaminteşte [10], [11], [12] ce înseamnă o submulţime interior stabilă şi, respectiv, exterior stabilă. Submulţimea $S \subset X$ este interior stabilă dacă $S \cap \Gamma S = \emptyset$, unde $\Gamma S = \{\Gamma x \mid x \in S\}$, cu alte cuvinte nu există arc care să unească două vîrfuri din S. Dacă S nu este submulţime strictă a unei alte submulţimi interior stabile, se numeşte submulţime interior stabilă maximală. Fie σ familia submulţimilor interior stabile maximale S_i ale grafului. Numărul de stabilitate internă al grafului G va fi:

$$\alpha(G) = \max \mid S_i \mid, \quad S_i \in \sigma, \tag{3}$$

unde $\mid S_i \mid$ este cardinalul submulţimii S_i, deci numărul de vîrfuri din S_i.

Similar, se defineşte stabilitatea externă. O submulţime $T \subset X$ se numeşte exterior stabilă dacă $\forall x_i \notin T$, avem relaţia $T \cap (\Gamma x_i) \neq \emptyset$. O submulţime exterior stabilă care nu conţine strict o altă submulţime exterior stabilă se numeşte submulţime exterior stabilă minimală [10], [11], [12]. Fie τ familia submulţimilor exterior stabile minimale T_i ale grafului G. Numărul de stabilitate externă al grafului G va fi:

$$\beta(G) = \min_{T_i \in \tau} \mid T_i \mid. \tag{4}$$

O submulţime simultan interior şi exterior stabilă se numeşte nucleu al grafului G. Se poate lega noţiunea de stabilitate internă de numărul cromatic al grafului. Se reaminteşte ([12]) că un graf i-cromatic este un graf ale cărui vîrfuri se pot colora cu i culori diferite, fără ca două vîrfuri

adiacente să aibă aceeaşi culoare. Se ştie ([12]) că numărul cromatic este egal cu numărul minimal de submulţimi interior stabile care acoperă mulţimea vîrfurilor grafului.

Desigur că noţiunea de număr cromatic este valabilă în cazul grafurilor neorientate, astfel că se poate aplica doar grafului neorientat asociat grafului de curgere [12]. Notînd cu $\gamma(\vec{G})$ numărul cromatic al grafului neorientat $\vec{G}$ asociat grafului de curgere G, există relaţia importantă ([1], [12]):

$$\alpha(G) \cdot \gamma(\vec{G}) \geqslant |X|. \tag{5}$$

Deosebit de interesantă este problema matricelor asociate grafului G. Se defineşte matricea booleană [5], [6], [12] $B = (\beta_{i,j})_{s,s}$ asociată grafului astfel:

$$\beta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } x_j \in \Gamma x_i, \\ 0, \text{ dacă } x_j \notin \Gamma x_i \end{cases} \tag{6}$$

sau matrice de adiacenţă [10], [11].

În cazul grafului din figura 2, matricea booleană va avea următoarea formă:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

corespunzător vîrfurilor x_a, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_0 în această ordine. Această matrice stă la baza algoritmului Foulkes pentru descompunerea grafului in componente tari conexe, sau clase de echivalenţă în baza relaţiei de echivalenţă „$\equiv$", definită astfel: $x_i \equiv x_j$ dacă există un drum de la vîrful x_i la vîrful x_j şi înapoi (deci un circuit care să le conţină). Se constată că în cazul grafului din figura 2 nu se poate aplica algoritmul Foulkes.

Pornind tot de la matricea de adiacenţă B se poate ajunge la matricea drumurilor $B^* = (\beta^*_{i,j})_{s,s}$ prin aplicarea algoritmului Roy-Warshall. Se reaminteşte că matricea drumurilor se defineşte astfel [10]:

$$\beta^*_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ dacă există drum între } x_i \text{ şi } x_j, \\ 0 \text{ dacă nu există drum între } x_i \text{ şi } x_j. \end{cases} \tag{8}$$

Aplicînd algoritmul Roy-Warshall matricei booleene B se obține următoarea matrice a drumurilor B^* :

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

care se poate verifica foarte ușor pe figură.

O altă problemă foarte interesantă și utilă o constituie problema drumurilor optime într-un graf. Notînd cu U mulțimea arcelor unui graf G, se poate asocia fiecărui arc $u \in U$ un număr $l(u) \geqslant 0$ numit lungimea sa [12]. Fie μ un drum, atunci lungimea acestui drum se calculează astfel :

$$l(\mu) = \sum_{u \in \mu} l(u), \tag{10}$$

deci suma lungimilor arcelor care compune drumul. Pe baza acestor considerente se pot calcula drumul de lungime minimă într-un graf și cel de lungime maximă, dacă graful nu are circuite.

Se pune problema cum se definește lungimea unui arc al grafului de curgere. În acest scop se face apel la noțiunea de rezistență hidraulică convențională, definită astfel : dacă în angajarea i există presiunea p_i, iar în degajarea $i + 1$, preiunea p_{i+1} din extinderea echivalenței unui circuit hidraulic cu un circuit electric, se poate aplica relația de calcul similară legii lui Ohm (vezi și lucrarea [4]) astfel :

$$p_{i+1} - p_i = R_{i,i+1} \cdot Q_{i,i+1}, \tag{11}$$

unde $R_{i,i+1}$ este rezistența hidraulică convențională, deoarece include și efectul curgerii de tip Couette. În condițiile cînd $\omega = 0$ (cazul fus staționar) această rezistență devine rezistență hidraulică propriu-zisă. Pentru arcele (x_a, x_i) se definește rezistența hidraulică a restrictorului R_c, iar pentru arcele (x_i, x_0) rezistența hidraulică efectivă R_i. În acest fel grafului curgerii i s-au atașat lungimile arcelor ceea ce permite aplicarea unor algoritmi de tipul : Ford-Fulkerson, Bellman-Kalaba, Roy-Floyd etc. pentru calculul drumurilor optime.

3. APLICAȚII PE UN CAZ CONCRET

Se consideră lagărul din figura 1, caracterizat prin următoarele mărimi geometrice și funcționale : excentricitate relativă $\varepsilon = 0{,}3$, joc radial $\Delta r = 30$ μm, $D = 100$ mm, $k = 1$, $k_l = 0{,}8$, $k_b = 0{,}6$, uleiul cu

viscozităţile $\mu = 0{,}45\ 10^{-3} \frac{\text{daNs}}{\text{m}^2}$, $\nu = 0{,}5133\ 10^{-5}\ \text{m}^2/\text{s}$, $d_c = 0{,}5859\text{mm}$, $l_c = 23{,}44$ mm, unghiul de poziţie al liniei centrelor $\theta = \pi/6$ [7], [8]. Calculele au fost efectuate pentru 30 de valori ale turaţiei, de la 0 la 48 000 rot/min şi două presiuni de alimentare : $p_a = 20 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$ şi, respectiv, $60 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$.

S-au găsit şase cazuri tipice, reprezentate în figurile 3—8. Astfel, în figura 3 s-a reprezentat graful curgerii într-un caz tipic hidrostatic ($n = 0$), iar $p_a = 20 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$. Se observă că graful este asemănător celui din figura 2, deci rezultatele obţinute se vor menţine şi în acest caz.

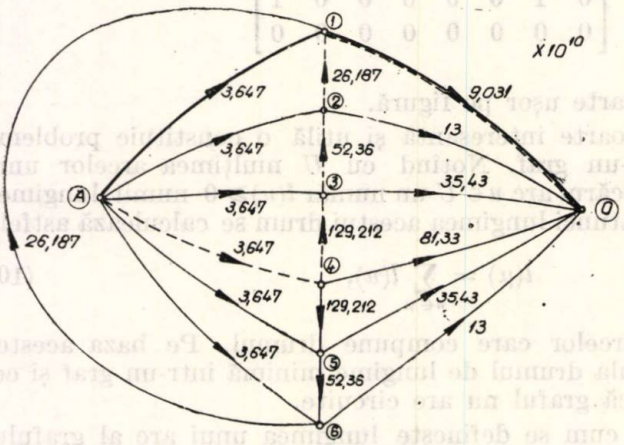


Fig. 3. — Graful curgerii în cazul hidrostatic ($n = 0$, $p_a = 20 \cdot 10^5\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$).

Aplicînd metoda lui Maghout completată [12] se obţin familiile submulţimilor interior şi exterior stabile, astfel :

$$\sigma = \{\{x_a, x_0\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_6\}, \}x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_4, x_6\}\}, \tag{12}$$

$$\tau = \{\{x_a, x_0\}, \{x_i, x_0\}, i = 1, \ldots, 6\},$$

deci $\alpha(G) = 3$, iar $\beta(G) = 2$, nucleul grafului fiind $\{x_a, x_0\}$. Rezultatele obţinute sînt uşor de explicat prin simetria curgerii în lagăr şi prin faptul că x_0 este vîrf consumator.

În scopul calculării distanţelor în graf, s-au notat pe arce valorile rezistenţelor hidraulice respective. Se aplică algoritmul Roy-Floyd, plecînd de la matricea distanţelor directe [10] :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9{,}031 \\ \infty & 26{,}187 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 13 \\ \infty & \infty & 52{,}36 & 0 & \infty & \infty & \infty & 35{,}43 \\ \infty & \infty & \infty & 129{,}212 & 0 & 129{,}212 & \infty & 81{,}33 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 52{,}36 & 35{,}43 \\ \infty & 26{,}187 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

După aplicarea algoritmului Roy-Floyd, în opt paşi, se obţine matricea distanţelor minime A^* :

$$A^*T_8(A)=\begin{bmatrix} 0 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 3{,}647 & 12{,}678 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 9{,}031 \\ \infty & 26{,}187 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 13 \\ \infty & 78{,}547 & 52{,}36 & 0 & \infty & \infty & \infty & 35{,}43 \\ \infty & 207{,}759 & 181{,}572 & 129{,}212 & 0 & 129{,}212 & 181{,}572 & 81{,}33 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 52{,}36 & 35{,}43 \\ \infty & 26{,}187 & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 13 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}. \quad (14).$$

Se constată că drumul de rezistenţă minimă între x_a şi x_0 este $A-1-0$ cu $l(A-1-0)=12{,}572\cdot 10^{10}$ Ns/m^5. Acest rezultat se confirmă şi prin aplicarea algoritmului Ford, drumul găsit fiind cel cu linie groasă din figura 3. Drumul de lungime (rezistenţă) maximă se obţine tot prin aplicarea algoritmului Ford (pentru maxim) şi rezultă drumul

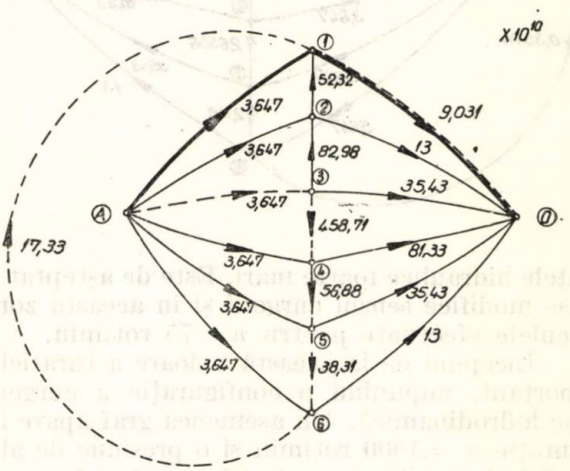


Fig. 4. — Graful curgerii într-un caz cu efecte combinate hidrostatic şi hidrodinamic ($n = 25$ rot/min, $p_a = 20\cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$).

punctat din figură, $A-4-3-2-1-0$, cu $l(A-4-3-2-1-0)=220{,}347\cdot 10^{10}\frac{N\,s}{m^5}$. Este uşor de constatat că există şi un drum simetric cu acesta, de aceiaşi lungime, anume $A-4-5-6-1-0$. Rezultatul este firesc, dacă se ia în consideraţie simetria curgerii într-un lagăr pur hidrostatic.

În figura 4 este reprezentat graful curgerii într-un lagăr hidrostatic de joasă turaţie ($n = 25^{rot}$/min), în care apar efecte hidrodinamice relativ modeste. Nu se schimbă nimic în ceea ce priveşte stabilitatea grafului, faţă de cazul static. Aplicînd algoritmul Ford se obţine acelaşi drum

minim (linie groasă pe figură), dar se modifică drumul de lungime maximă : $A - 3 - 4 - 5 - 6 - 1 - 0$, cu lungimea $l(A - 3 - 4 - 5 - 6 - 1 - 0) = 589{,}908\ 10^{10}\ \frac{Ns}{m^5}$, deci a crescut rezistența hidraulică maximă față de cazul static.

La o turație de 50 rot/min se obține același graf, dar calculul drumului de lungime maximă ne conduce la altă concluzie : $A - 3 - 2 - 1 - 0$, cu o valoare a rezistenței maxime $l(A - 3 - 2 - 1 - 0) = 13722{,}978\ 10Ns/m^5$. Explicația acestei valori foarte ridicate este imediată : la turația de 50 rot/min curgerile Poiseuille și Couette, de sens contrar, sînt aproape egale, deci debitele Q_{32} și Q_{21} sînt foarte mici, iar rezis-

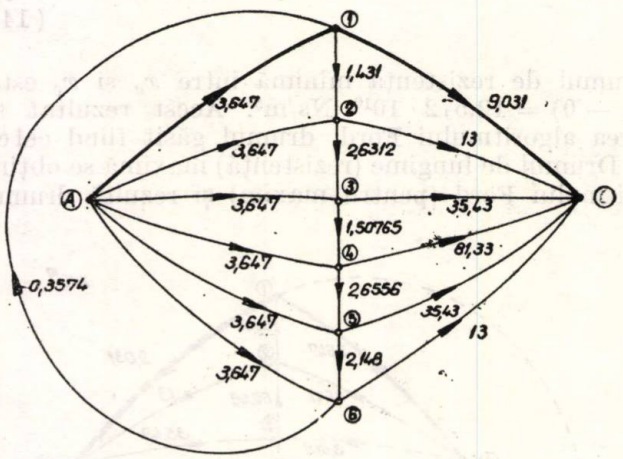


Fig. 5. — Graful curgerii într-un lagăr hidrostatic cu efecte hidrodinamice importante ($n = 1500$ rot/min, $p_a = 20 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$).

tențele hidraulice foarte mari. Este de așteptat ca la o turație mai ridicată, să se modifice sensul curgerii și în această zonă, concluzie confirmată de calculele efectuate pentru $n = 75$ rot/min.

Începînd de la această valoare a turației, efectul hidrodinamic este important, impunînd o configurație a curgerii care se apropie de cea tipic hidrodinamică. Un asemenea graf apare în figura 5, corespunzînd la o turație $n = 1500$ rot/min și o presiune de alimentare $p_a = 20\ 10^5 N/m^2$. Analizînd stabilitatea internă și externă a grafului se constată aceleași rezultate ca în cazul hidrostatic pur. De asemenea, se menține același drum de lungime minimă, în schimb nu se mai poate aplica varianta algoritmului Ford pentru maxim, deoarece se constată ușor că graful are un circuit : $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 1$, de fapt un circuit elementar. În plus, apar în graf drumuri hamiltoniene, cum ar fi, de exemplu, $A - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 1 - 0$.

Existența unui circuit este caracteristică lagărului hidrodinamic, deci din momentul în care graful curgerii într-un lagăr hidrostatic prezintă un circuit, înseamnă că efectele hidrodinamice sînt importante. Interpretarea fizică a circuitului este aceea că o parte din lubrifiant va fi recirculat, deci va modifica (în sens negativ) regiml termic al lagărului. Lubrifian-

tul care parcurge un drum hamiltonian, va traversa tot lagărul pînă să iasă pe la capetele acestuia, contribuind și el la modificarea regimului termic. Creșterea turației poate să ducă la blocarea sistemului de alimentare, prin efectul hidrodinamic care apare în lagăr (vezi și [3]). Un asemenea graf este redat în figura 6. Analizînd stabilitatea grafului, rezultă:

$$\sigma=\{\{x_a, x_0\}, \{x_a, x_3\}, \{x_1, x_4\}, \{x_2, x_5\}, \{x_3, x_6\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_4, x_6\}\}, \tag{15}$$

$$\tau = \{\{x_a, x_0\}, \{x_1, x_0\}, \{x_2, x_0\}, \{x_4, x_0\}, \{x_5, x_0\}, \{x_6, x_0\}\},$$

iar $\alpha(G) = 3$, $\beta(G) = 2$ și nucleul grafului va fi tot $\{x_a, x_0\}$.
Se constată din nou existența unui circuit și a drumurilor hamiltoniene în graf.

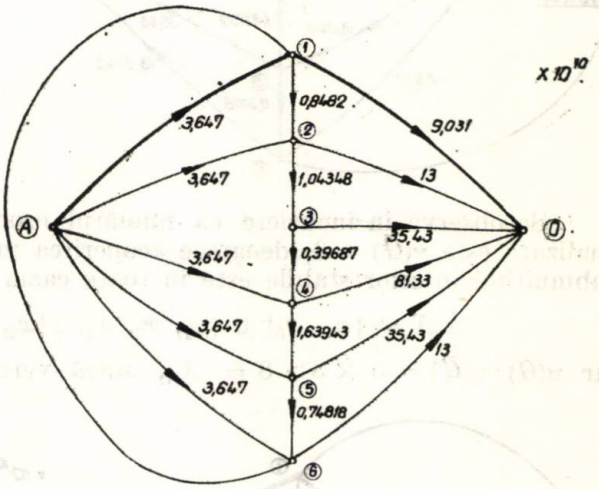


Fig. 6. — Graful curgerii într-un lagăr hidrostatic cu un restrictor blocat ($n = 12000$ rot/min, $p_a = 60 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$).

La o turație de 24000 rot/min graful curgerii capătă aspectul din figura 7, deci apare un debit de alimentare inversat. În acest graf apar și alte circuite, cm ar fi: $A-2-3-A$, $A-4-5-6-1-2-3-A$ etc. și drumuri hamiltoniene de forma $1-2-3-A-4-5-6-0$. Asemenea forme de curgere produc o amestecare în inelul comun de alimentare a lubrifiantului proaspăt cu cel recirculat, deci o înrăutățire a regimului termic. Astfel de situații sînt de evitat.

În anumite condiții funcționale, situația poate fi și mai dificilă, de exemplu cazul reprezentat în figura 8, pentru $n = 36000$ rot/min și $p_a = 20 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$. În acest caz două restrictoare au sensul de curgere inversat, iar degajarea 5 este la limita de cavitație, $p_5 \cong p_0$.

Se modifică destul de mult stabilitatea grafului, astfel:

$$\sigma_a = \{\{x_a, x_0\}, \{x_5, x_0\}, \{x_2, x_5\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_6\}, \{x_1, x_3, x_5\}, \{x_2, x_4, x_6\}\} \tag{16}$$

$$\tau = \{\{x_5, x_0\}, \{x_6, x_0\}\},$$

deci $\alpha(G) = 3$, $\beta(G) = 2$ dar nucleul grafului devine $\{x_5, x_0\}$. Este evident că funcționarea în aceste condiții este necorespunzătoare, cel puțin sub aspect termic, și al iminenței pericolului de cavitație.

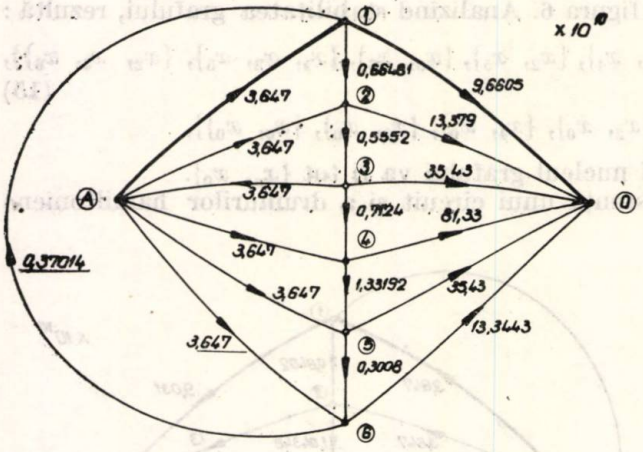


Fig. 7. — Graful curgerii într-un lagăr hidrostatic cu un debit de alimntare, inversat $\left(n = 24000 \text{rot/min}\right.$ $\left. p_a = 60 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$.

Se observă în încheiere că numărul cromatic al tuturor grafurilor analizate este $\gamma(\vec{G}) = 3$, deoarece acoperirea minimală a mulțimii X cu submulțimi interior stabile este în toate cazurile :

$$X = \{x_a, x_0\} \cup \{x_1, x_3, x_5\} \cup \{x_2, x_4, x_6\}, \tag{17}$$

iar $\alpha(G) \cdot \gamma(\vec{G}) = 3 \times 3 > 8 = |X|$, adică verifică relația (5).

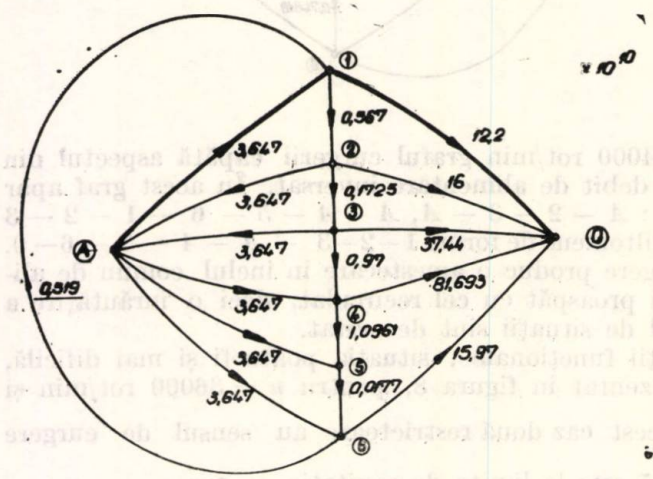


Fig. 8. — Graful curgerii într-un lagăr hidrostatic cu sistemul de alimentare perturbat, la limita de cavitație $\left(n = 36000 \text{ rot/min}\right.$ $\left. p_a = 20 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right)$.

4. CONCLUZII

Lucrarea de față s-a ocupat doar de analiza unui lagăr hidrostatic în condiții funcționale date, utilizînd elemente din teoria grafurilor. Se desprind unele constatări interesante : stabilitatea grafului este invariantă

față de genul curgerii (preponderent hidrostatic sau hidrodinamic), atîta timp cît alimentarea lagărului decurge normal. Creșterea rolului efectului hidrodinamic în lagăr este semnalată de apariția unui circuit în graful de curgere. Existența unui circuit și/sau a drumurilor hamiltoniene are un efect negativ asupra regimului termic al lagărului, situație care se înrăutățește și mai mult în cazul inversării debitelor de alimentare în zona maxim portantă.

În ceea ce privește drumul de rezistență hidraulică minimă, acesta se păstrează indiferent de condițiile de funcționare, constatare explicabilă prin faptul că în zona descărcată influența creșterii turației este mică. Se cuvine să se sublinieze faptul că nu s-a analizat rolul sistemului de alimentare și modul în care se modifică graful de curgere pentru diferite rezistențe hidraulice ale restrictorului. În cazul studiat s-a ales un restrictor capilar cu rezistență hidraulică relativ redusă, ceea ce a permis ca efectul hidrodinamic din lagăr să fie important începînd de la turații reduse. Se propune ca în lucrările ulterioare să intervină și aceste aspecte caracteristice unei faze de proiectare a lagărului hidrostatic.

Primită la redacție la 28 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. C. Berge, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei*, București, Editura tehnică, 1969.
2. M. Dumbravă, *Non-linear effects due to pressure gradients in turbulent externally-pressurized films*, „Super-laminar flows in bearings". Proc. of Inst. Mech. Eng., 1976.
3. M. Dumbravă. *Efectul limitativ al portanței hidrodinamice asupra alimentării unui lagăr hidrostatic*, St. cerc. mec. apl. **37**, *3* (1978).
4. M. Dumbravă, *Asupra posibilității aplicării grafurilor de fluență în studiul lagărelor hidrostatice*, Buletinul Institutului politehnic București (în curs de publicare).
5. H. Ionescu, C. Dinescu, V. Burlacu, *Teoria grafelor cu unele aplicații în economie*, București, Edit. Științifică, 1969.
6. T. Ionescu, *Grafuri, aplicații*, vol. I, II, București, Edit. didactică și pedagogică, 1973.
7. Gh. Manea, *Organe de mașini*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1970.
8. Gh. Manea, D. Hincu, V. Simionescu, M. Dumbravă, D. Atanasiu, *Aspecte teoretice caracteristice și metoda de calcul pentru lagărele hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide*. St. cerc. mec. apl., **32**, *1* (1973).
9. A. Roșu, *Teoria grafelor. Algoritmi. Aplicații.*, București, Edit. militară, 1974.
10. I. Tomescu, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Universitatea București, 1978 (litografiat).
11. I. Tomescu, *Teoria grafurilor*, cap III din *Matematici clasice și moderne* sub red. acad. C. Iacob, București, Edit. tehnică, 1978.
12. Gh. Vrinceanu, St. Mititielu, *Probleme de cercetare operațională*, București, Edit. tehnică, 1978.

fața de genul curgerii (preponderent hidrostatic sau hidrodinamic), atîta timp cît alimentarea lagărului decurge normal. Cuștinea rolului efectului hidrodinamic în lagăr este semnalată de apariția unui circuit în graful de curgere. Existența unui circuit și sau a drumurilor hamiltoniene are un efect negativ asupra regimului termic al lagărului, situație care se înrăutățește și mai mult în cazul inversării debitelor de alimentare în zona maximă portantă.

În ceea ce privește drumul de rezistență hidraulică minimă, acesta se păstrează indiferent de condițiile de funcționare, constatare explicabilă prin faptul că în zona descărcată influența cuștinei turației este mică. Se cuvine să se sublinieze faptul că un s-a analizat rolul sistemului de alimentare și modul în care se modifică graful de curgere pentru diferite rezistențe hidraulice ale restrictorului. În cazul studiat s-a ales un restrictor capilar cu rezistență hidraulică relativ redusă, ceea ce a permis ca efectul hidrodinamic din lagăr să fie important începînd de la turații reduse. Se propune ca în lucrările ulterioare să intervină și aceste aspecte caracteristice unei fâze de proiectare a lagărului hidrostatic.

Primită la redacție la 25 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. C. Bessie, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei*, București, Editura tehnică, 1969.
2. M. Dumbravă, *Non-linear effects due to pressure gradients in turbulent externally-pressurized films*, „Super-laminar flows in bearings", Proc. of Inst. Mech. Eng., 1976.
3. M. Dumbravă, *Efectul limitatiei al portanței hidrodinamice asupra alimentării unui lagăr hidrostatic*, St. cerc. mec. apl. 37, 4 (1978).
4. M. Dumbravă, *Asupra posibilității aplicării grafurilor de fluxuri în studiul lagărelor hidrostatice*, Buletinul Institutului politehnic București (în curs de publicare).
5. H. Ionescu, C. Dinescu, V. Burlacu, *Teoria grafelor cu unele aplicații în economie*, București, Edit. Științifică, 1969.
6. T. Ionescu, *Grafuri, aplicații*, vol. I, II, București, Edit. didactică și pedagogică, 1973.
7. Gh. Manea, *Organe de mașini*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1970.
8. Gh. Manea, D. Hincu, V. Simionescu, M. Dumbravă, D. Atanasiu, *Aspecte teoretice caracteristice și metoda de calcul pentru lagărele hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide*, St. cerc. mec. apl., 32, 1 (1973).
9. A. Roșu, *Teoria grafelor. Algoritmi. Aplicații*, București, Edit. militară, 1974.
10. I. Tomescu, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Universitatea București, 1978 (litografiat).
11. I. Tomescu, *Teoria grafurilor*, cap. III din *Matematici clasice și moderne* sub red. acad. E. Iacob, București, Edit. tehnică, 1978.
12. Gh. Vrînceanu, St. Mitrileu, *Probleme de cercetare operațională*, București, Edit. tehnică, 1978.

LAGĂRE RADIALE HIDROSTATICE ECHIPATE CU DROSELE DIN MATERIALE SINTERIZATE

de ŞTEFAN STANCIU
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se demonstrează avantajele utilizării droselelor din materiale sinterizate prin prisma analizei caracteristicilor lagărelor radiale hidrostatice pe care le echipează. Determinarea analitică a portanţei a debitului de scăpări precum şi a rigidităţii statice a fost făcută pe baza ecuaţiei de bilanţ de debite, aplicată fiecărei degajări a lagărului hidrostatic.

NOTAŢII

A — volumul relativ al porilor;
D — diametrul lagărului;
$F_{i,i}$ $F_{i,i-1}$, $F_{i,i+1}$ — coeficienţi în ecuaţia presiunilor;
$K = D/L$ — constanta lagărului;
$K_b = b_d/b$ — lungimea relativă a degajării hidrostatice;
$K_l = l_d/L$ — lăţimea relativă a degajării hidrostatice;
L — lungimea lagărului hidrostatic;
M — parametru de alimentare;
N — numărul buzunarelor lagărului hidrostatic;
Q — debitul total de scăpări;
R — capacitatea portantă (rezultanta presiunilor);
$\bar{R}$ — portanţa relativă;
$S = \eta\omega/p_a\psi^2$ — parametru adimensional;
S_p — suprafaţa porilor pastilei sinterizate;
S_r — suprafaţa relativă a porilor;
S_t — suprafaţa frontală a pastilei sinterizate;
T_i — termenul liber în ecuaţia presiunilor;
V_p — volumul porilor;
V_t — volumul total al pastilei sinterizate;
b — lungimea zonei de influenţă a degajării hidrostatice;
b_d — lungimea pragului circumferenţial;
d_e — diametrul granulei din materialul sinterizat;
e — excentricitatea fusului faţă de cuzinet;
h_0 — jocul radial în lagăr la excentricitate nulă;
k — permeabilitatea mediului poros;
l_d — lăţimea degajării hidrostatice;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 2, 1979, P. 317–329

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

p_i — presiunea din degajarea hidrostatică, i;
q — debitul prin drosel;
q_a — debitul de alimentare a degajării hidrostatice, i;
q_i — debitul axial corespunzător degajării, i;
$q_{i,i+1}$, $q_{i,i-1}$ — debite circumferenţiale;
u — grosimea pastilei sinterizate;
v — viteza de filtrare;
α — unghi curent;
β — unghiul liniei centrelor;
ε $= e/h_0$ — excentricitatea relativă;
ψ $= h_0/D$ — jocul radial relativ;
η — vîscozitatea dinamică a uleiului;
ω — viteza unghiulară a fusului;
$\mathrm{d}R/\mathrm{d}e$ — rigiditatea statică;
$\mathrm{d}R/\mathrm{d}\varepsilon$ — rigiditatea statică relativă.

Este cunoscut faptul că există o mare diversitate de restrictori cu rezistenţă hidraulică constantă, precum şi numeroase regulatoare de debit, concepute în scopul alimentării şi reglării debitului de ulei în buzunarele lagărelor hidrostatice.

Ideea utilizării droselor din materiale poroase nu este nouă, această soluţie fiind prezentată informativ în [7]; se remarcă, de asemenea, utilizarea frecventă a filtrelor fine din materiale metalice sinterizate, dispozitive care, prin construcţie, produc o importantă cădere de presiune, reglînd debitul care le parcurge, îndeplinind de fapt şi funcţiile pe care le au droselele lagărelor hidrostatice. Determinarea analitică şi verificarea experimentală a performanţelor lagărelor radiale hidrostatice (fără canale longitudinale de descărcare) echipate cu restrictori din materiale poroase reprezintă însă o noutate în materie.

Tehnologia de obţinere a droselelor (pastilelor) sinterizate este relativ simplă; costul de producţie a acestora este deosebit de scăzut, în special pentru serii mari de fabricaţie; pe de altă parte, nu se pun probleme de prelucrare (ca la droselul capilar drept) şi nici de montaj (ca în cazul regulatorului cu membrană sau a droselului capilar elicoidal).

Un aspect extrem de important — prin care droselele sinterizate se dovedesc deosebit de avantajoase — este faptul că nu sînt expuse pericolului obturării; la restrictorul capilar şi la cel de tip diafragmă o singură particulă (impuritate) aflată în ulei le poate obtura, provocînd scoaterea din uz a lagărului hidrostatic cu urmări serioase, eventual chiar griparea acestuia. Dat fiind faptul că la restrictorul poros suprafaţa frontală udată cu ulei este mare, de ordinul de mărime 1 ... 2 cm^2 (fig. 1), nu există pericolul obturării bruşte deşi dimensiunea unui por este mai mică decît a eventualei particule străine. Chiar dacă uleiul este prost filtrat, obturarea restrictorului se produce în timp, astfel încît siguranţa funcţionării lagărului este asigurată.

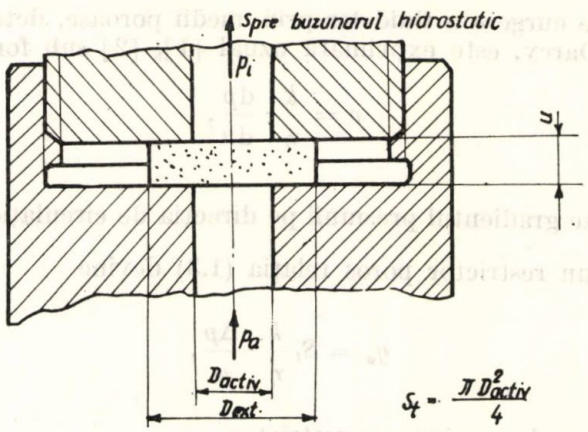


Fig. 1

1. LEGEA DE CURGERE PRIN MEDII POROASE

Permeabilitatea — ca parametru geometric complex al mediului poros — reprezintă factorul esențial al legii de curgere a fluidelor prin astfel de materiale. Se admite [6] că în cazul curgerii tridimensionale prin mediul poros cu granule sferice tangente (mediu poros fictiv) permeabilitatea se poate exprima astfel

$$k = \frac{S_r^2 \cdot d_e^2}{96(1 - A)}, \tag{1.1}$$

în care $S_r = S_p/S_t$, reprezintă raportul dintre aria frontală totală a porilor și aria suprafeței udate de ulei (fig. 1);

$A = V_p/V_t$, reprezintă raportul dintre volumul porilor și volumul total al pastilei sinterizate.

Pentru cazul unei compactități maxime a materialului sinterizat (caz teoretic) se indică valorile: $S_r = 0{,}093$ și $A = 0{,}259$, relația (1.1) luînd forma

$$k = 1215 \cdot 10^{-7} \cdot d_e^2. \tag{1.2}$$

Lucrări aprofundate privind curgerea prin medii poroase [2], [4], [6] relevă complexitatea acestora din punct de vedere geometric și imposibilitatea studiului la scară microscopică. Ca urmare se acceptă aplicarea legilor din mecanica fluidelor la scară macroscopică, cu utilizarea unor date obținute pe cale experimentală.

Debitul de fluid ce parcurge secțiunea S_t a unui mediu poros este dat de relația

$$q = S_t \cdot v, \tag{1.3}$$

în care v este viteza de filtrare sau viteza macroscopică de curgere, pe care ar avea-o fluidul dacă ar putea parcurge un mediu poros în linie dreaptă și în toată masa sa.

Legea de curgere a fluidelor prin medii poroase, determinată experimental de Darcy, este exprimată uzual [1], [2] sub forma

$$v = \frac{k}{\eta} \cdot \frac{dp}{du}, \tag{1.4}$$

în care $\frac{dp}{du}$ este gradientul presiunii pe direcţia de circulaţie a fluidului.

Pentru un restrictor poros relaţia (1.3) devine

$$q_a = S_t \frac{k}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{u}, \tag{1.5}$$

Δp fiind căderea de presiune pe restrictor.

Se remarcă dependenţa liniară a debitului de căderea de presiune şi deci, similitudinea cu restrictorul de tip tub capilar [5]. Acest aspect conduce la o abordare facială a calculului lagărului hidrostatic echipat cu restrictori poroşi.

Pentru un buzunar hidrostatic, debitul de alimentare prin restrictorul sinterizat este

$$q_a = S_t \frac{k}{u} \cdot \frac{p_a - p_i}{\eta}, \tag{1.6}$$

cu p_a a fost notată presiunea de alimentare aflată în amontele restrictorului, de valoare constantă.

Definim ca constantă a restrictorului poros mărimea

$$M = S_t \frac{k}{u} = 1215 \cdot 10^{-7} \cdot S_t \frac{d_e^2}{u}, \tag{1.7}$$

dependentă de geometria pastilei sinterizate, S_t/u, şi de diametrul granulei constituente d_e.

2. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR LAGĂRELOR HIDROSTATICE RADIALE ALIMENTATE PRIN RESTRICTORI POROŞI

Exprimînd analitic bilanţul de debite pentru fiecare degajare hidrostatică se obţine un sistem de ecuaţii a cărui rezolvare conduce la aflarea presiunilor din degajări.

Utilizînd notaţiile din figura 2, reprezentînd lagărul radial hidrostatic, se exprimă debitul axial de scăpări şi debitele circumferenţiale în vecinătatea buzunarului, i:

a) debitul axial,

$$q_i = \frac{K}{1 - K_l} \cdot \frac{h_0^3}{12\eta} p_i I_i, \tag{2.1}$$

în care a fost făcută notația

$$I_i = 2\int_{\frac{2\pi}{N}(i-1)}^{\frac{2\pi}{N}i} [1 + \varepsilon \cos(\alpha - \beta)]^3 \, d\alpha, \tag{2.2}$$

b) debitele circumferențiale, cu considerarea rotației fusului:

$$q_{i,i+1} = \frac{N \cdot K_l}{12\pi K(1 - K_b)} \cdot \frac{h_0^3}{\eta_l}(p_i - p_{i+1}) \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}^3 +$$

$$+ \frac{d\omega}{4} l_d h_0 \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}, \tag{2.3}$$

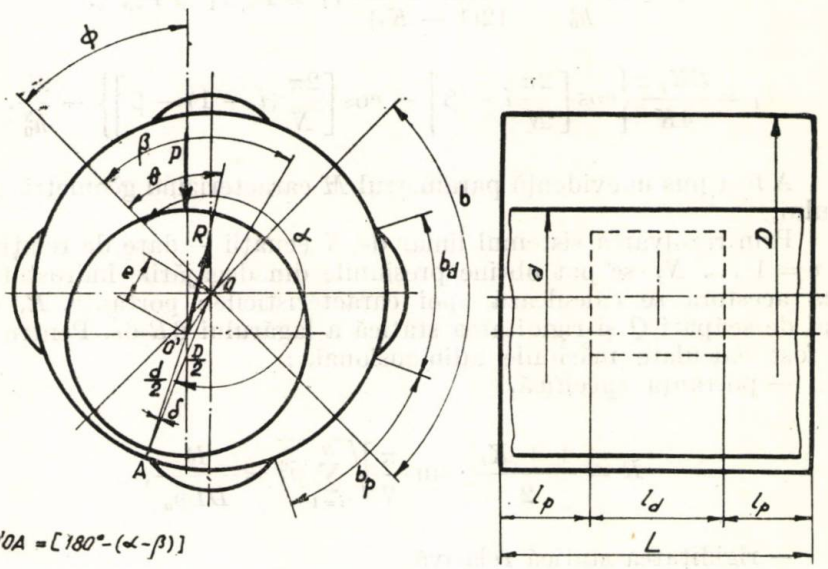


Fig. 2

$$q_{i,i-1} = \frac{N \cdot K_l}{12\pi K(1 - K_b)} \cdot \frac{h_0^3}{\eta_l}(p_i - p_{i-1}) \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \beta\right]\right\}^3 -$$

$$- \frac{d\omega}{4} l_d h_0 \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \beta\right]\right\}. \tag{2.4}$$

Debitul de alimentare a buzunarului hidrostatic i este dat de relațiile (1.6) și (1.7).

Ecuaţia de bilanţ de debite — numită şi ecuaţia presiunilor — scrisă pentru buzunarul i are forma generală

$$q_a - q_i - q_{i,i+1} - q_{i,i-1} = 0. \tag{2.5}$$

După transformări, relaţia (2.5) devine

$$-F_{i,i} \cdot p_i + F_{i,i+1} \cdot p_{i+1} + F_{i,i-1} \cdot p_{i-1} = T_i, \tag{2.6}$$

în care

$$F_{i,i+1} = \frac{NK_l}{12\pi K(1 - K_b)} \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left[\frac{2\pi}{N} i - \beta \right] \right\}^3, \tag{2.7}$$

$$F_{i,i-1} = \frac{NK_l}{12\pi K(1 - K_b)} \left\{ 1 + \varepsilon \cos \left[\frac{2\pi}{N} (i - 1) - \beta \right] \right\}^3, \tag{2.8}$$

$$F_{i,i} = \frac{M}{h_0^3} + \frac{K}{12(1 - K_l)} I_i + F_{i,i+1} + F_{i,i-1}, \tag{2.9}$$

$$T_i = \frac{SK_l \varepsilon}{4K} \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{N} i - \beta \right] - \cos \left[\frac{2\pi}{N} (i - 1) - \beta \right] \right\} - \frac{M}{h_0^3}. \tag{2.10}$$

A fost pus în evidenţă parametrul M caracterizînd geometria restrictorului.

Prin rezolvarea sistemul liniar de N ecuaţii — date de relaţia (2.6), cu $i = 1 \ldots N$, se pot obţine presiunile din degajările hidrostatice. Pe baza acestora se calculează apoi caracteristicile: portanţa R, debitul total de scăpări Q şi rigiditatea statică a lagărului $\mathrm{d}R/\mathrm{d}e$. Pentru studiu au fost calculate mărimile adimensionale:

— portanţa specifică,

$$\bar{R} = \frac{1 + K_l}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \bar{p}_i^2} = \frac{R}{DLp_a}, \tag{2.11}$$

— rigiditatea statică relativă,

$$\frac{\mathrm{d}\bar{R}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\Delta R}{\Delta e} \cdot \frac{h_0}{DLp_a}. \tag{2.12}$$

Determinările analitice şi verificările experimentale au fost făcute pe un lagăr cu patru degajări hidrostatice.

3. PERFORMANŢELE LAGĂRELOR HIDROSTATICE ECHIPATE CU DROSELE DIN MATERIALE METALICE SINTERIZATE

Pentru a studia influenţa parametrului de alimentare M asupra caracteristicilor lagărelor radiale hidrostatice au fost reprezentate diagra-

mele din figurile 3 — 5, la o scară convenabilă; urmărindu-le se pot desprinde următoarele aspecte:

a) portanța adimensională $\bar{R}$, respectiv portanța absolută R, tinde către aceeași valoare pentru drosele sinterizate cu rezistență hidraulică mică (valori mari ale parametrului M);

b) portanță maximă se obține utilizînd drosele cu rezistență hidraulică mare, la turații ridicate (fig. 4), la excentricități mari (fig. 3,4) și pentru lagăre cu joc radial redus (fig. 5);

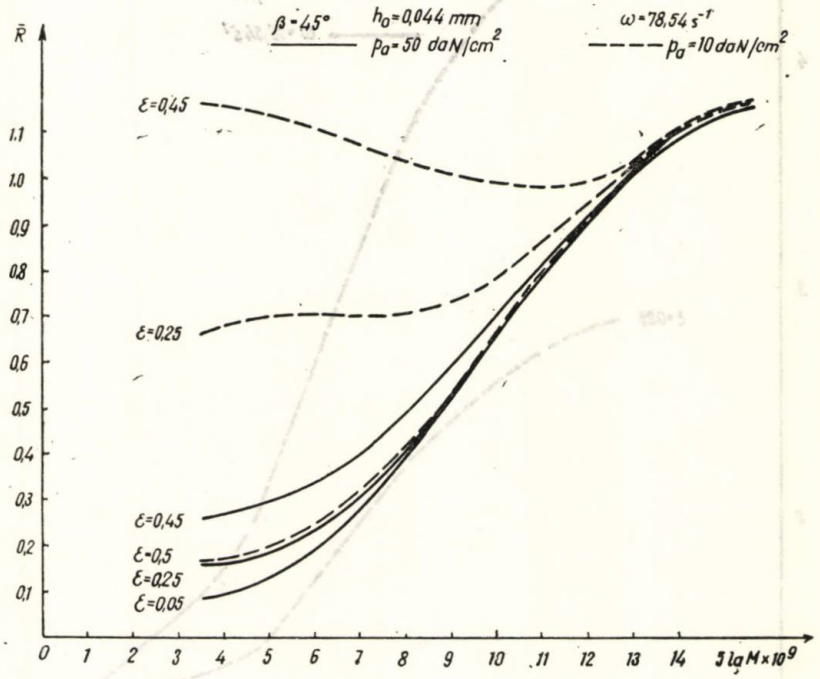
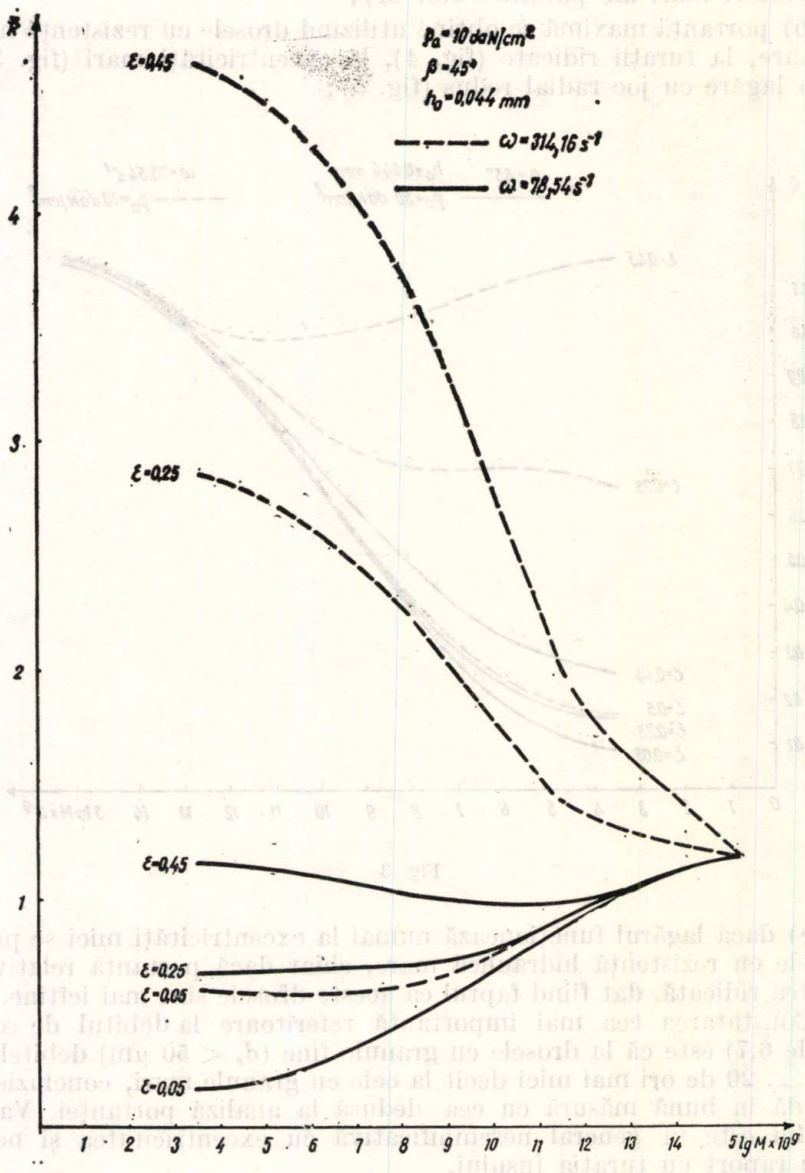


Fig. 3

c) dacă lagărul funcționează numai la excentricități mici se preferă droselele cu rezistență hidraulică mare, chiar dacă portanța relativă nu este prea ridicată, dat fiind faptul că aceste drosele sînt mai ieftine.

Constatarea cea mai importantă referitoare la debitul de scăpări (figurile 6,7) este că la drosele cu granule fine ($d_e < 50$ μm) debitele sînt de 10 ... 20 de ori mai mici decît la cele cu granule mari, concluzie care concordă în bună măsură cu cea dedusă la analiza portanței. Variația debitului este în general nesemnificativă cu excentricitatea și neglijabilă în raport cu turația fusului.

Un parametru care trebuie analizat mai concret este presiunea de alimentare; în privința debitului se preferă valori mici ale presiunii p_a; referitor la portanța adimensională $\bar{R}$ se recomandă tot presiuni de alimentare mici (figura 3). Portanța absolută este însă proporțională cu



$\bar{R}$
$p_a = 10\ daN/cm^2$
$\beta = 45°$
$h_0 = 0{,}044\ mm$
$\omega = 314{,}16\ s^{-1}$
$\omega = 78{,}54\ s^{-1}$
ε=0,45
ε=0,25
ε=0,45
ε=0,25
ε=0,05
ε=0,05
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 5 lg M x 10^9

Fig. 4

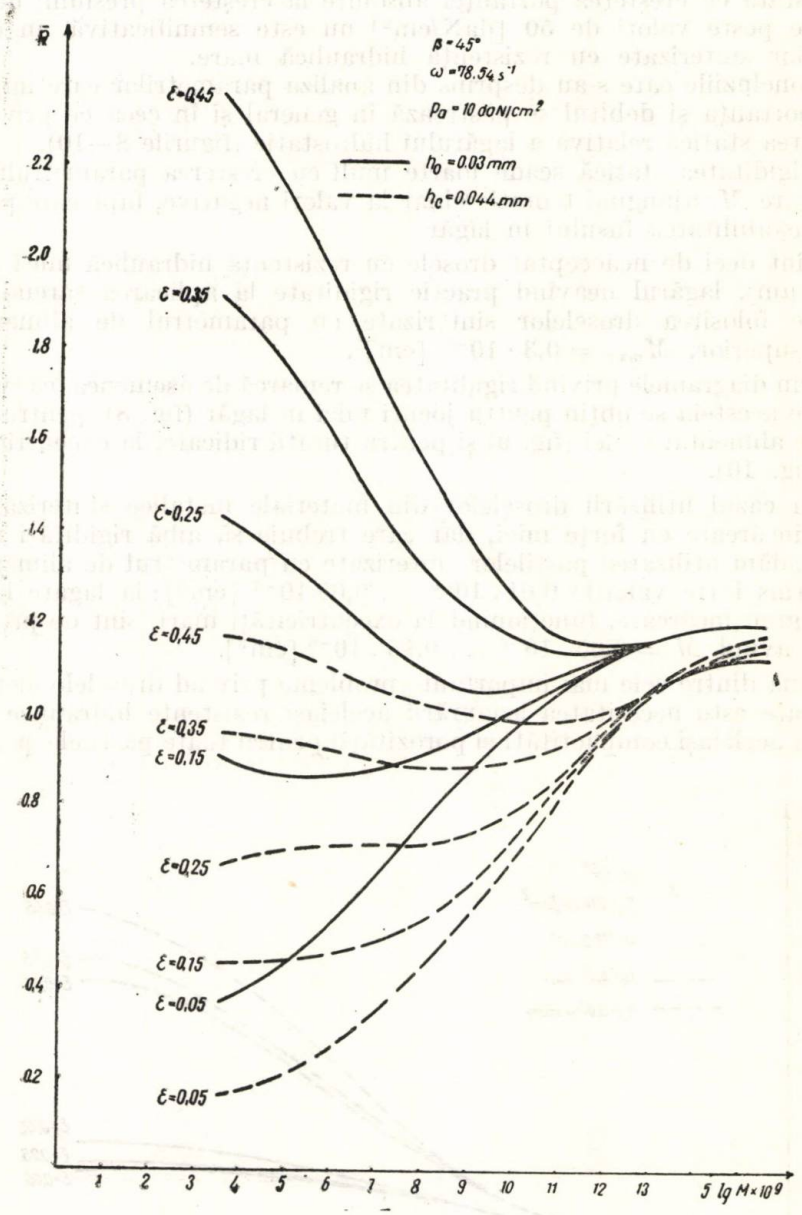

$\bar{R}$
β = 45°
ω = 78,54 s⁻¹
p_a = 10 daN/cm²
h_0 = 0,03 mm
h_c = 0,044 mm
ε = 0,45
ε = 0,35
ε = 0,25
ε = 0,45
ε = 0,35
ε = 0,15
ε = 0,25
ε = 0,15
ε = 0,05
ε = 0,05
2,2
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
5 lg M × 10⁹

Fig. 5

presiunea de alimentare, conform relaţiei (2.11). Variaţia lui $\bar{R}$ cu p_a este totuşi mai puţin importantă decît influenţa directă a presiunii de alimentare asupra portanţei absolute, la valori mari ale parametrului M. Se constată că creşterea portanţei absolute la creşterea presiunii de alimentare peste valori de 50 [daN/cm^2] nu este semnificativă, în cazul droselelor sinterizate cu rezistenţă hidraulică mare.

Concluziile care s-au desprins din analiza parametrilor care influenţează portanţa şi debitul se păstrează în general şi în ceea ce priveşte rigiditatea statică relativă a lagărului hidrostatic (figurile 8—10).

Rigiditatea statică scade foarte mult cu creşterea parametrului de alimentare M, ajungînd teoretic chiar la valori negative, fapt care presupune instabilitatea fusului în lagăr.

Sînt deci de neacceptat drosele cu rezistenţă hidraulică mică ($d_e > > 300$ μm), lagărul neavînd practic rigiditate la aplicarea sarcinii. Se propune folosirea droselelor sinterizate cu parametrul de alimentare imitat superior, $M_{max} = 0{,}3 \cdot 10^{-6}$ [cm]^3.

Din diagramele privind rigiditatea se remarcă de asemenea că valori mari ale acesteia se obţin pentru jocuri mici în lagăr (fig. 8), pentru presiuni de alimentare mici (fig. 9) şi pentru turaţii ridicate, la excentricităţi mici (fig. 10).

În cazul utilizării droselelor din materiale metalice sinterizate la lagăre încărcate cu forţe mici, dar care trebuie să aibă rigidităţi mari, recomandăm utilizarea pastilelor sinterizate cu parametrul de alimentare M cuprins între valorile $0{,}01 \cdot 10^{-6} \ldots 0{,}05 \cdot 10^{-6}$ [cm^3]; la lagăre hidrostatice greu încărcate, funcţionînd la excentricităţi mari, sînt de preferat drosele avînd $M = 0{,}05 \cdot 10^{-6} \ldots 0{,}15 \cdot 10^{-6}$ [cm^3].

Una dintre cele mai importante probleme privind droselele metalice sinterizate este necesitatea asigurării aceleiaşi rezistenţe hidraulice (respectiv a aceleiaşi compactităţi şi porozităţi) pentru toate pastilele poroase

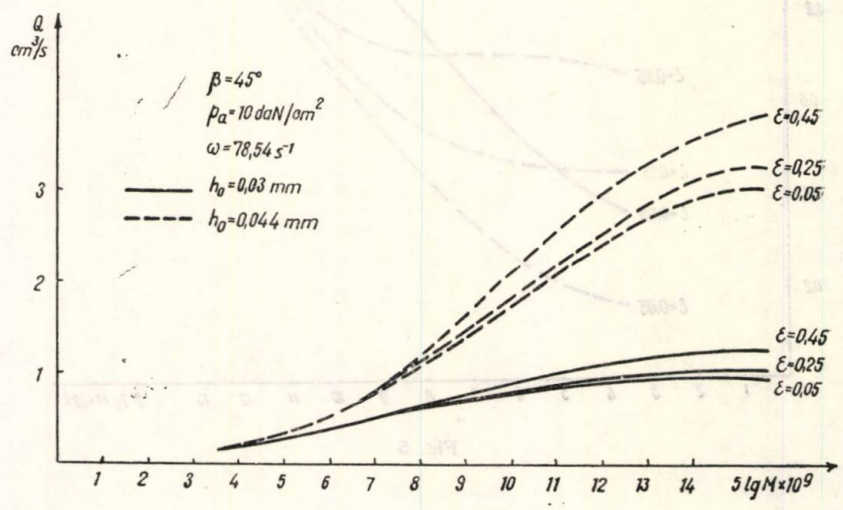


Fig. 6

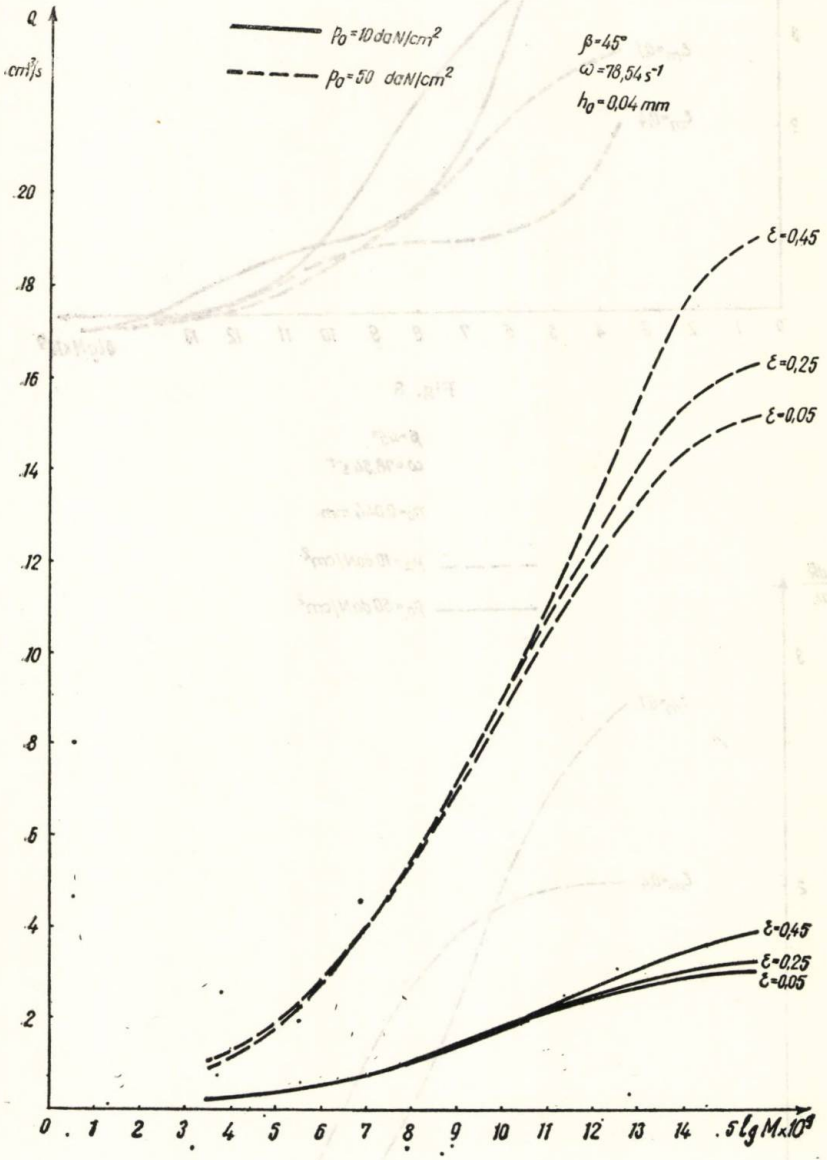

Q
cm³/s
p_0 = 10 daN/cm²
p_0 = 50 daN/cm²
β = 45°
ω = 78,54 s⁻¹
h_0 = 0,04 mm
ε = 0,45
ε = 0,25
ε = 0,05
ε = 0,45
ε = 0,25
ε = 0,05
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
lg M x10³

Fig. 7

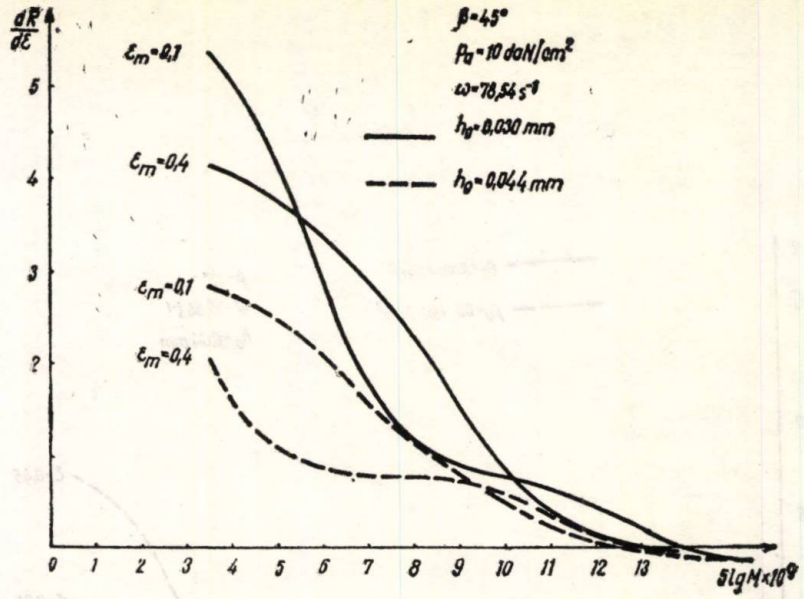

dR/dε
β=45°
p_a=10 daN/cm²
ω=78,54 s⁻¹
h_0=0,030 mm
h_0=0,044 mm
ε_m=0,1
ε_m=0,4
ε_m=0,1
ε_m=0,4
5
4
3
2
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
5lgM×10⁹

Fig. 8

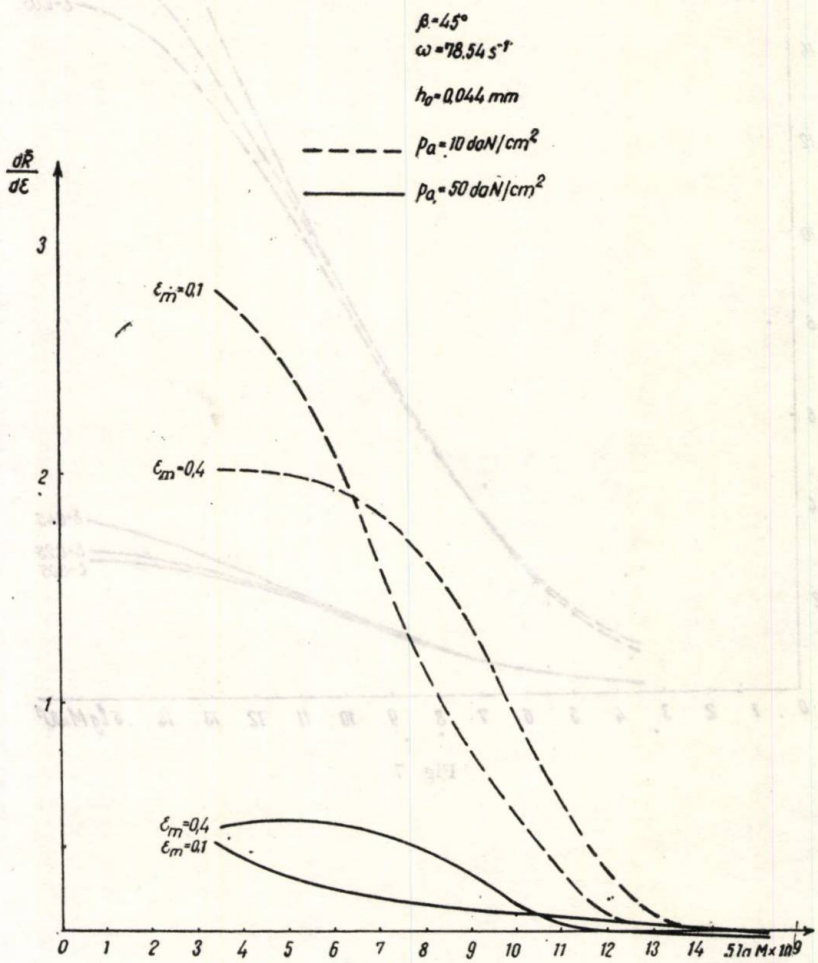

β=45°
ω=78,54 s⁻¹
h_0=0,044 mm
p_a=10 daN/cm²
p_a=50 daN/cm²
dR/dε
3
2
1
ε_m=0,1
ε_m=0,4
ε_m=0,4
ε_m=0,1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 5lgM×10⁹

Fig. 9

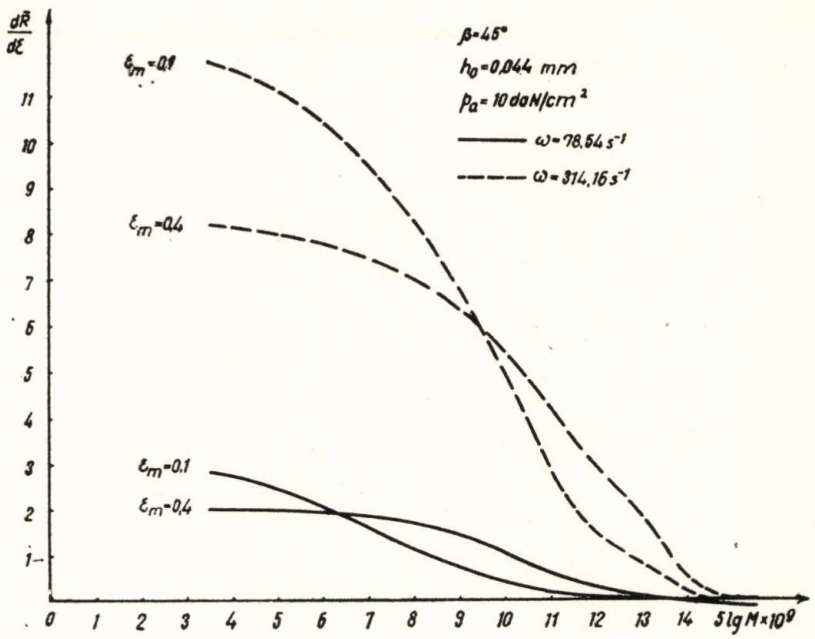


Fig. 10

care echipează lagărul hidrostatic; această problemă este în general dificil de rezolvat ceea ce conduce la concluzia că droselele sinterizate nu pot fi folosite decît la lagăre mai puţin importante, ca precizie a reglajului, dar care trebuie să aibă o siguranţă deplină în funcţionare.

Primită la redacţie la 6 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cameron, *Basic lubrication theory*, Longman (U. K.), 1970.
2. C. Cusano, *The effect of variable permeability on the performance characteristics of porous bearings*, Wear, **23**, *1* (1973).
3. Al. Domşa ş.a. *Tehnologia fabricării pieselor din pulberi metalice*, Edit. tehnică, 1966.
4. S. Ivancenco, *Calculul hidrodinamic al lagărului radial de alunecare, echipat cu cuzinet poros şi rezervor circular deschis*, St. cerc. mec. apl., *4* (1977).
5. Gh. Manea ş.a., *Aspecte teoretice caracteristice şi metodă de calcul pentru lagărele radiale hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide*, St. cerc. mec. apl., *1* (1973).
6. A. D. Moscov, *Poriste antifricţionte materiali*, Izd. Maşinostroienie, Moscova, 1968.
7. D. Pavelescu, M. Muşat, A. Tudor, *Tribologie*, Edit. didactică şi pedagogică, 1977.

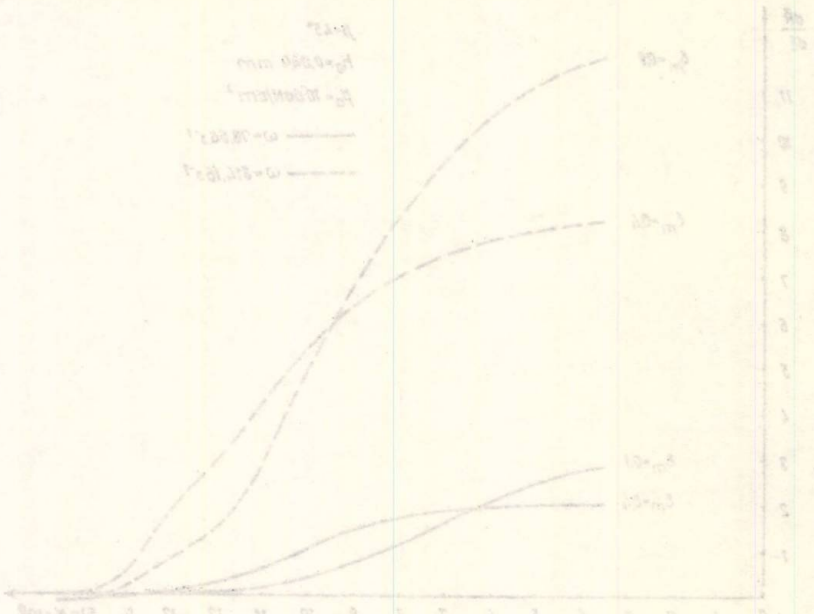


Fig. 10

CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA LA FRECARE ŞI UZARE A DOZATORILOR CELULARI PENTRU EVACUAREA CENUŞII DE ŞIST DIN ELECTROFILTRE

de LUCIAN CĂPITANU
Institutul de fizica şi tehnologia materialelor, Bucureşti

Lucrarea prezintă rezultatele cercetărilor efectuate pentru determinarea perechii optime de materiale pentru cupla element paletă/corp, a dozatorilor celulari Ø 500 × 800 mm, utilizaţi la evacuarea cenuşii de şist din electrofiltre. Sînt abordate aspectele tribologice ale funcţionării cuplei de frecare, ţinîndu-se seamă de necesitatea menţinerii constante a jocului dintre rotorul şi corpul dozatorului, cît şi de abrazivitatea şi corozivitatea cenuşii de şist.

1. INTRODUCERE

Lucrarea prezintă o serie de aspecte tribologice apărute în funcţionarea dozatorilor celulari utilizaţi pentru evacuarea continuă a cenuşii de şist din electrofiltre, în condiţiile menţinerii riguros constante a debitului evacuat şi păstrării etanşeităţii utilajului. Studierea comportării tribologice a elementelor de uzură a dozatorilor celulari, s-a impus în special datorită necesităţii asigurării unei fiabilităţi ridicate a acestora, în condiţiile evacuării unor cantităţi mari de cenuşă de şist şi etanşeităţii unor diferenţe mari de presiune.

Utilajul este constituit dintr-o carcasă metalică confecţionată de obicei prin turnare, un rotor cu palete pentru dozarea cenuşii de şist şi un grup motoreductor. Funcţionalitatea dozatorului este asigurată prin diferenţa de 2 mm, dintre diametrul interior al corpului turnat şi diametrul exterior al rotorului cu palete. Pentru asigurarea unui debit maxim evacuabil de 30 m^3/h, precum şi a etanşeităţii utilajului, este necesară menţinerea constantă a diferenţei de 1 mm, dintre raza corpului dozatorului şi raza rotorului acestuia.

2. ASPECTE TRIBOLOGICE ÎN FUNCŢIONAREA DOZATORILOR CELULARI

În funcţionarea dozatorilor celulari apare o creştere a jocului funcţional (1 mm), ca urmare a proceselor de uzare iniţiate de prezenţa cenuşii de şist în spaţiul dintre rotor şi carcasă. Uzarea se manifestă ca o uzare tipic abrazivă, cu trei corpuri [2], intensificată de deosebita agresivitate a cenuşii de şist, în special în cazul unor temperaturi relativ ridicate ale acesteia (80 — 100°C).

Paletele rotorului sînt elementele constructive cele mai solicitate din punct de vedere tribologic, astfel încît rezistența lor la uzare condiționează fiabilitatea întregului utilaj. Trebuie remarcat faptul că paletele nu se uzează uniform pe înălțime. Aceasta se datorește variației pe înălțime a presiunii exercitate de materialul pulverulent pe suprafața paletei. Tensometric, s-a stabilit că presiunea exercitată de materialul pulverulent pe secțiunea minimă a paletei, variază între 0,06 daN/cm^2, la capătul superior și 1 daN/cm^2, la capătul inferior, în condițiile unei viteze relative a rotorului, față de corpul dozatorului de 60 cm/s.

3. MODELAREA PROCESULUI DE UZARE

Pentru modelarea procesului de uzare apărut în funcționarea dozatorilor, s-a utilizat instalația experimentală a cărei vedere de ansamblu este prezentată în figura 1.

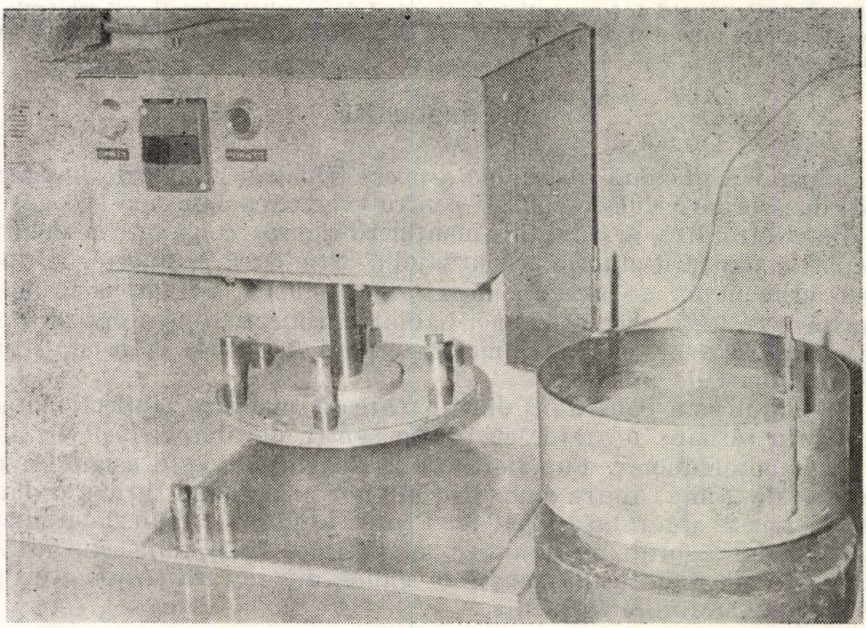


Fig. 1. — Vedere de ansamblu a instalației experimentale pentru studiul uzării abrazive.

Instalația poate modela atît procese de frecare abrazică cu două corpuri, cît și cele de frecare abrazivă cu trei corpuri.

Instalația este acționată de către un motor electric de 1 kW, prin intermediul unui reductor melcat care permite obținerea unei turații mici de lucru (60 rot/min). Axul reductorului antrenează în mișcare de rotație un disc fixat pe capătul său inferior și pe care se montează epruvetele de studiu. Epruvetele sub formă de știfturi, sînt confecționate din materialul paletei rotorului și constituie unul din elementele cuplei de

frecare. Cel de-al doilea element al cuplei îl constituie bazinul, pe fundul căruia se roteşte discul port-epruvete. Fundul bazinului este format dintr-un disc metalic, care poate fi înlocuit cu discuri de dimensiuni identice, confecţionate din diferite materiale, utilizabile pentru construcţia corpului dozatorului.

Bazinul, în care se introduce cenuşă de şist, este prevăzut cu un sistem de ghidaje care asigură fixarea acestuia în poziţia dorită şi realizarea contactului de frecare.

Discul port-epruvete este prevăzut cu şase găuri filetate pentru fixarea a şase epruvete de studiu. Găurile sînt practicate în colţurile unui hexagon înscris într-un cerc cu diametrul de 200 mm. Epruvetele se pot fixa prin înşurubare, direct în discul port-epruvete. Această situaţie corespunde unei încărcări foarte mici (0,01 daN/cm^2), realizată prin blocarea bazinului la cota suprafeţelor de frecare ale epruvetelor de studiu.

Discul este prevăzut cu posibilitatea montării epruvetelor pe trei diametre, pentru asigurarea obţinerii vitezelor de 60 cm/s, 80 cm/s şi 100 cm/s.

Instalaţia este prevăzută cu două sisteme de încărcare individuală a ştifturilor. Primul sistem asigură posibilitatea montării epruvetelor în dispozitive individuale de încărcare, cu resort tarat. Acestea permit încărcări normale de 0,5 ; 1,0 ; 1,5 ; 2,0 şi 2,5 daN. Pentru o suprafaţă frontală a ştifturilor de 1,0 cm^2, valorile de mai sus reprezintă chiar presiunile de contact.

Al doilea sistem de încărcare, cu greutate liberă, constă în montarea ştifturilor prin înşurubare în bare de oţel de greutate constantă şi care pot culisa sub acţiunea propriei greutăţi, în interiorul unor bucşe filetate în discul port-epruvete. Sistemul asigură încărcarea individuală a ştifturilor confecţionate din materialul paletei, cu sarcini de 0,06 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 şi 0,5 daN.

Instalaţia este prevăzută cu un contor, pentru înregistrarea numărului ciclurilor de funcţionare.

Măsurarea uzurii ştifturilor se poate face atît prin metode gravimetrice sau volumetrice, cît şi prin metode radiometrice.

Metoda gravimetrică constă în măsurarea greutăţii ştifturilor înaint. şi după diferite durate de funcţionare sub sarcină a cuplei de frecaree Pentru măsurarea uzurii cu o precizie acceptabilă (10^{-4}g), este necesară o rodare prealabilă a cuplei, timp de 48 ore. Utilizarea metodei gravimetrice impune efectuarea unor încercări de lungă durată (24 $\div$ 48) ore, pentru eliminarea eventualelor erori de rezoluţie a mijloacelor de măsură gravimetrică.

Metoda radiometrică [1], caracterizată printr-o mare precizie, constă în iradierea epruvetelor în reactorul nuclear. Prin iradiere, majoritatea elementelor componente ale oţelului, bronzului şi fontei, reacţionează cu neutronii lenţi, într-o reacţie nucleară (n ; γ), cu formare de izotopi radioactivi. Cupla de frecare, funcţionînd sub sarcină, în mediu pulverulent, se uzează. Uzura radioactivă se amestecă cu cenuşa de şist,mişcarea discului port-epruvete avînd şi rol de omogenizare. Pentru stabilirea vitezei de uzare prin metoda radiometrică, au fost prelevate probe de volum constant, din cenuşa de şist, la durate determinate de încercare. Probele

au fost introduse în conteinerul instalației radiometrice de măsură prezentate în figura 2. Conteinerul este prevăzut cu un contor de radiații, cu scintilație, legat la un numărător de impulsuri. Viteza de numărare a probei este înregistrată automat pe un înregistrator de date.

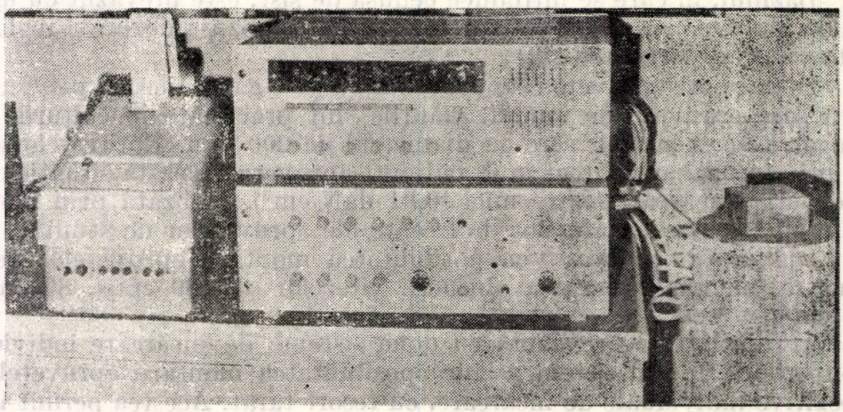


Fig. 2. — Instalația radiometrică de măsură.

Utilizînd etaloanele de greutate, iradiate în aceleași condiții ca și epruvetele, vitezele de numărare ale probelor de uzură pot fi convertite în greutăți de metal uzat [1].

4. MATERIALE STUDIATE

În cadrul studiilor efectuate au fost luate în considerare următoarele materiale :

A) Pentru reperul „element paletă" : fontă albă ; Fc 30 ; T 35 SN 11 ; 35 MS 12 ; Bz 9T ; 6610 W 5122 ; PTFE.

B) Pentru reperul „corp" : fontă albă ; Fc 30 ; Bz 9T ; T 6610 W 5122 ; T 6610 W 5122 călit ; T 35 SN 11 ; T 35 SN 11 călit ; 35 MS 12 ; 35 MS 12 călit ; OLC 45 X ; OLC 45 X călit ; RUL 1 ; RUL 1 călit.

5. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pentru studierea comportării la uzare a materialelor metalice utilizabile la confecționarea paletelor, s-a folosit metoda radiometrică, mai rapidă și foarte precisă. Metoda gravimetrică s-a utilizat numai pentru determinarea vitezei de uzare a PTFE.

Încercările experimentale s-au realizat la o viteză relativă de 60 cm/s și la presiuni de 0,06 ; 0,5 și 1,0 daN/cm^2.

Rezultatele experimentale sînt prezentate în diagramele din figurile 3 — 9.

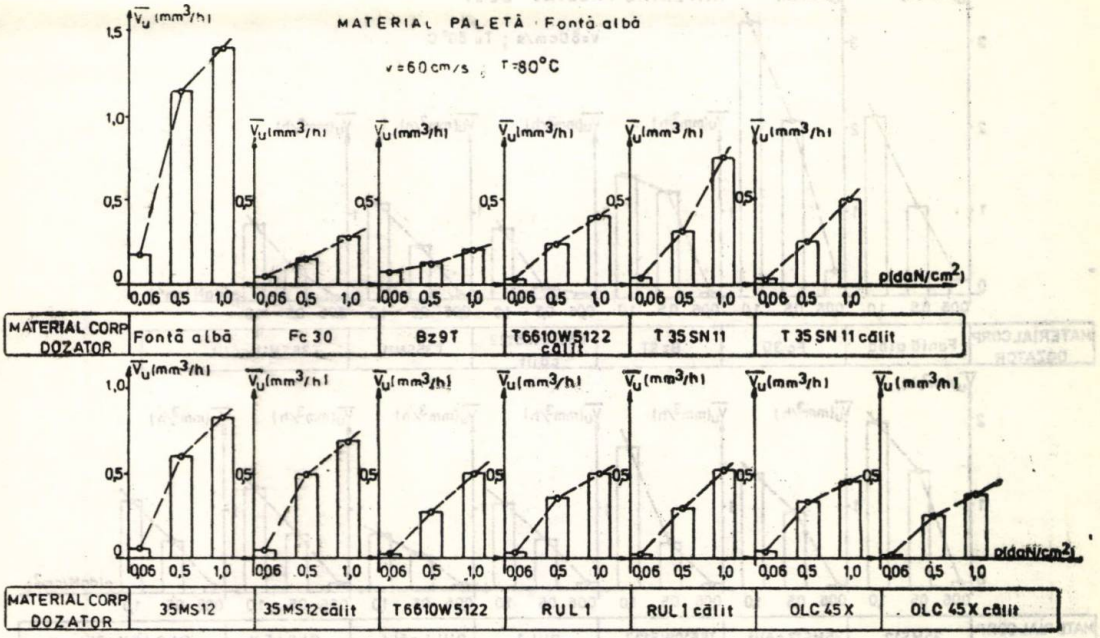


Fig. 3. — Variaţia vitezei de uzare a epruvetelor confecţionate din fontă albă.

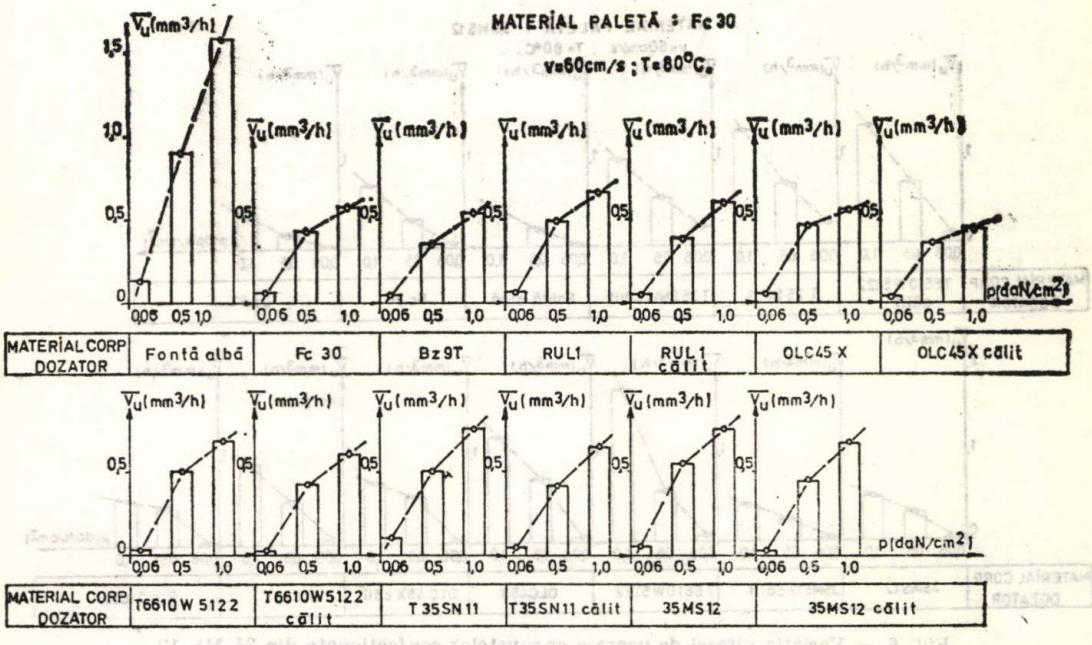


Fig. 4. — Variaţia vitezei de uzare a epruvetelor confecţionate din Fc 30.

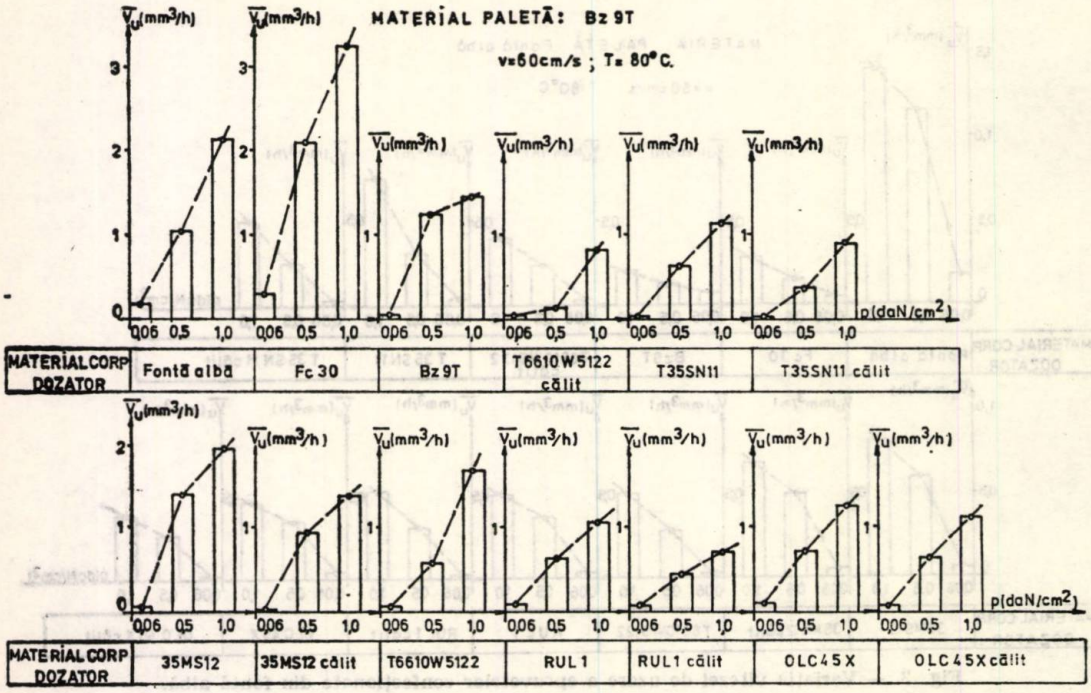


Fig. 5. — Variaţia vitezei de uzare a epruvetelor confecţionate din Bz 9T.

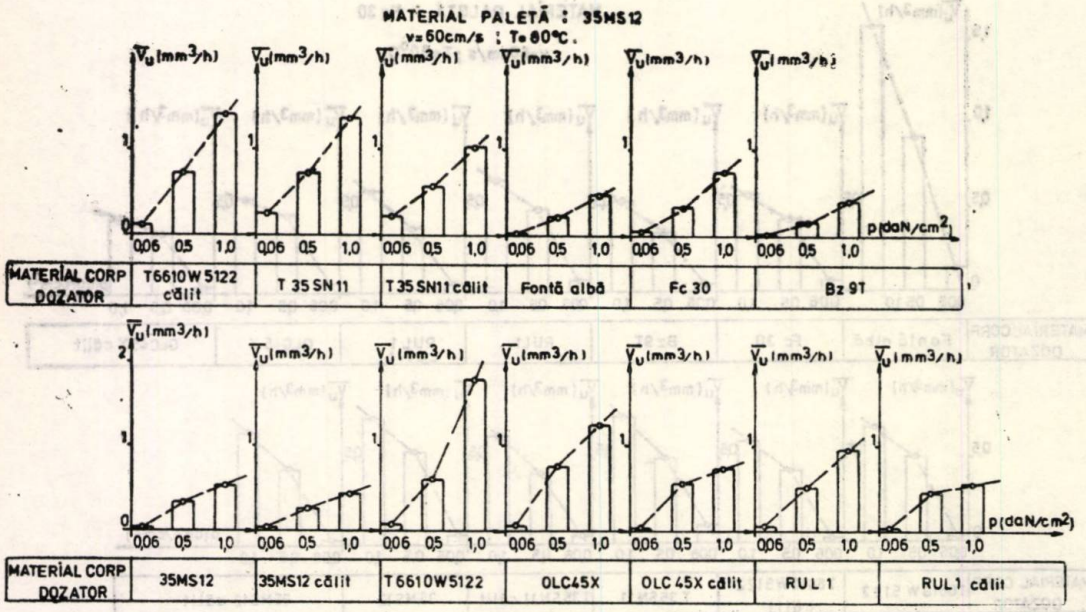


Fig. 6. — Variaţia vitezei de uzare a epruvetelor confecţionate din 35 MS 12.

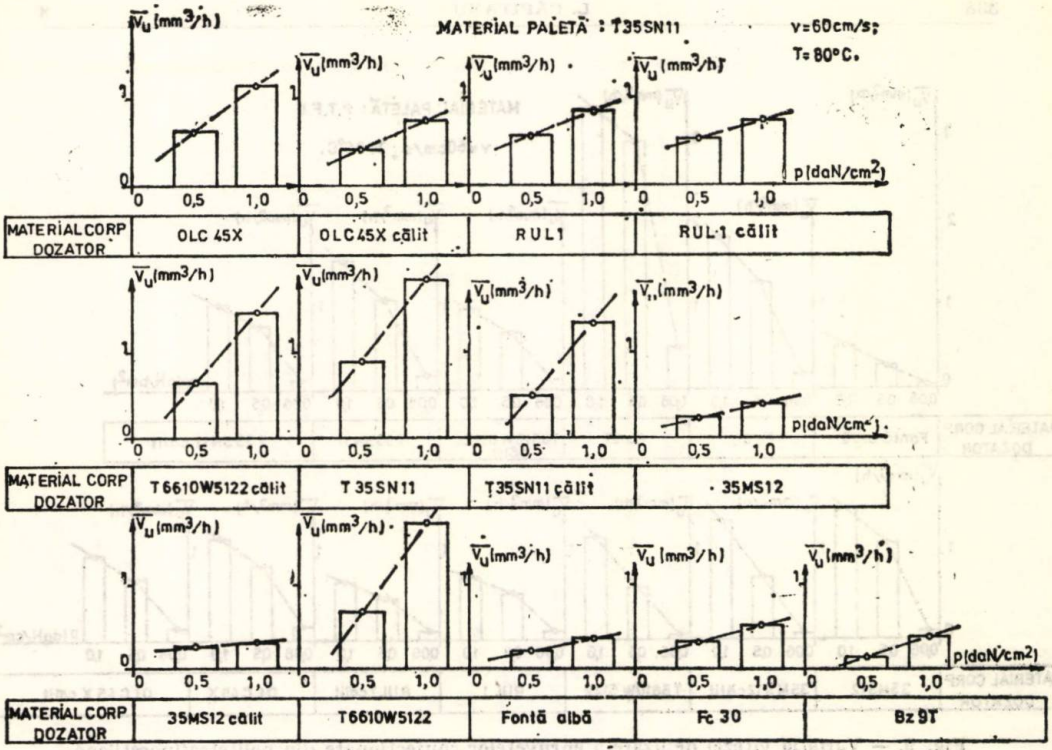


Fig. 7. — Variaţia vitezei de uzare a epruvetelor confecţionate din oţelul T 35 SN 11.

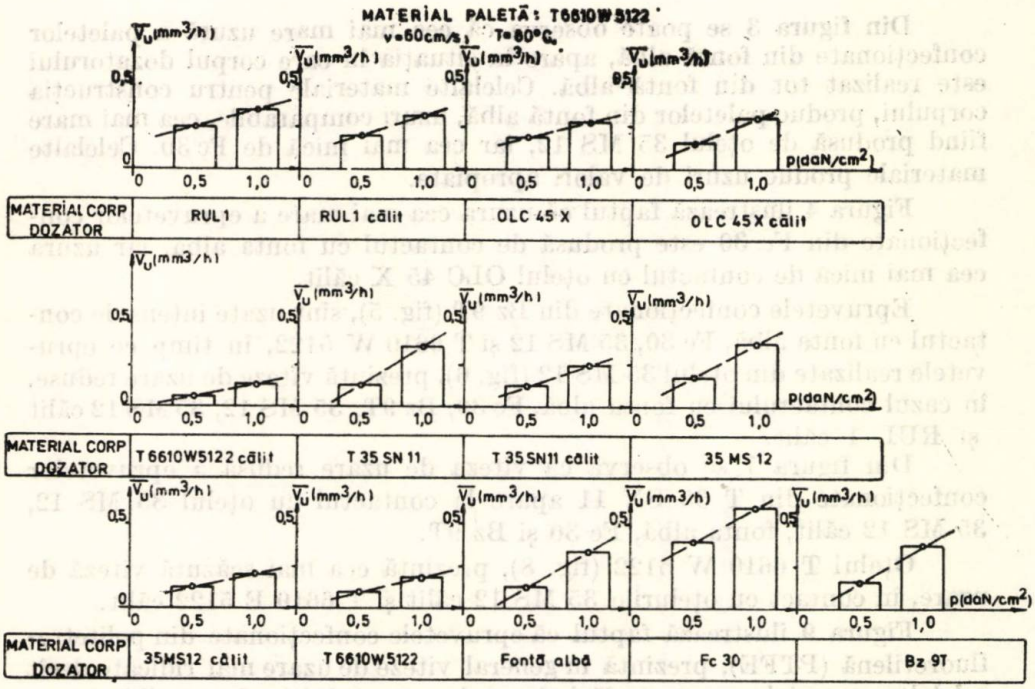


Fig. 8. — Variaţia vitezei de uzare a epr uvetelor confecţionate din T 6610 W 5122.

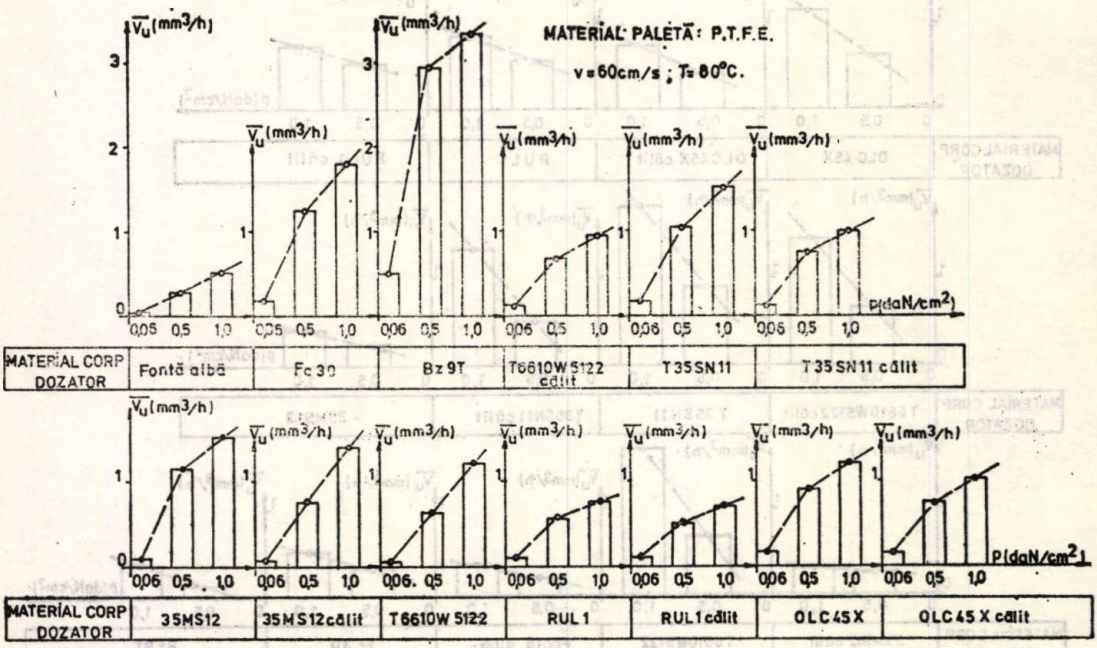


Fig. 9. — Variația vitezei de uzare a epruvetelor confecționate din politetrafluoretilenă.

Din figura 3 se poate observa că cea mai mare uzură a paletelor confecționate din fontă albă, apare în situația în care corpul dozatorului este realizat tot din fontă albă. Celelalte materiale pentru construcția corpului, produc paletelor din fontă albă, uzuri comparabile, cea mai mare fiind produsă de oțelul 35 MS 12, iar cea mai mică de Fc 30. Celelalte materiale produc uzuri de valori apropiate.

Figura 4 ilustrează faptul că uzura cea mai mare a epruvetelor confecționate din Fc 30 este produsă de contactul cu fonta albă, iar uzura cea mai mică de contactul cu oțelul OLC 45 X călit.

Epruvetele confecționate din Bz 9T (fig. 5), sînt uzate intens de contactul cu fonta albă, Fc 30, 35 MS 12 și T 6610 W 5122, în timp ce epruvetele realizate din oțelul 35 MS 12 (fig. 6), prezintă viteze de uzare reduse, în cazul contactului cu fonta albă, Fc 30, Bz 9T, 35 MS 12, 35 MS 12 călit și RUL 1 călit.

Din figura 7 se observă că viteza de uzare redusă a epruvetelor confecționate din T 35 SN 11 apare la contactul cu oțelul 35 MS 12, 35 MS 12 călit, fonta albă, Fc 30 și Bz 9T.

Oțelul T 6610 W 5122 (fig. 8), prezintă cea mai scăzută viteză de uzare, în contact cu oțelurile 35 MS 12 călit și T 6610 E 5122 călit.

Figura 9 ilustrează faptul că epruvetele confecționate din politetrafluoretilenă (PTFE), prezintă în general viteze de uzare mai ridicate decît celelalte materiale, excepție făcînd cazul contactului cu fonta albă.

Încercările experimentale au scos în evidenţă faptul că vitezele de uzare abrazivă ale epruvetelor studiate ating valori ridicate (0,1 ÷ 3,2 mm^3/h); vitezele de uzare crescînd cu sarcina aplicată cuplei, în aceleaşi condiţii de viteză relativă şi de temperatură.

6. CONCLUZII

Din analiza datelor experimentale se pot trage următoarele concluzii privind posibilităţile de utilizare ale materialelor studiate, la construcţia cuplei paletă/corp, ale dozatoarelor celulare pentru cenuşă de şist:

— datorită valorilor ridicate ale vitezei de uzare, se exclude posibilitatea utilizării următoarelor cupluri de materiale: Fontă albă/Fontă albă; Fc30/Fontă albă; Bz 9T/Fontă albă; Bz 9T/Fc 30; Bz 9T/Bz 9T; Bz 9T/T 35 SN 11; Bz 9T/35 Ms 12; Bz 9T/35 MS 12 călit; Bz 9T/T 6610 W 5122; Bz 9T/RUL 1; Bz 9T/OLC 45 X; Bz 9T/OLC 45 X călit; 35 MS 12/T 6610 W 5122 călit; 35 MS 12 T/35 SN 11; 35 MS 12/T 35 SN 11 călit; 35 MS 12/T 6610 W 5122; 35 MS 12/OLC 45 X; 35 MS 12/RUL 1; 35 MS 12/RUL 1 călit; T 35 SN 11/OLC 45 X; T 35 SN 11/T 6610 W 5122 călit; T 35 SN 11/T 35 SN 11; T 35 SN 11/T 35 SN 11 călit; T 35 SN 11/T 6610 W 5122; PTFE/Fc 30; PTFE/Bz 9T; PTFE/T 35 SN 11; PTFE/35 MS 12; PTFE/35 MS 12 călit; PTFE/T 6610 W 5122; PTFE/OLC 45 X; PTFE/OLC 45 X călit.

— dintre cuplele rămase, avînd în vedere şi considerente de ordin economic, rămîn în atenţie; PTFE/Fontă albă; T 6610 W 5122/T 6610 W 5122 călit; T 6610 W 5122/T 35 SN 11 călit; T 6610 W 5122/35 MS 12 călit; 35 MS 12/Fontă albă; 35 MS/12/35 12 călit; T 35 SN 11/35 MS 12 călit; T 35 SN 11/Fontă albă; Fc 30/OLC 45 X călit; Fontă albă/Fc 30; Fontă albă/T 6610 W 5122 călit; Fontă albă/OLC 45 X călit.

Ţinînd seamă de valorile vitezelor de uzare, compatibilitatea diferitelor materiale şi de caracteristicile lor mecanice şi anticorozive, cuplurile de materiale utilizabile în condiţii de fiabilitate maximă a dozatorilor celulari, rămîn: PTFE/Fontă albă; T 6610 W 5122/T 35 SN 11 călit; T 6610 W 5122/35 MS 12 călit şi T 35 SN 11/35 MS 12 călit.

Avînd în vedere uşurinţa tratamentului termic şi distribuţia perfect normală (gaussiană) a durităţii oţelului 35 MS 12, cuplul de materiale T 35 SN 11/35 MS 12 călit, apare ca soluţie optimă pentru confecţionarea cuplei element paletă/corp, a dozatorilor celulari pentru evacuarea cenuşii de şist din electrofiltre.

Primită la redacţie la 11 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. L. CĂPITANU, *Aspecte ale uzării matriţelor utilizate la prelucrarea prin injecţie a materialelor termoplastice armate cu fibre de sticlă*, St. cerc. mec. apl., **37**, *1* (1978).
2. A. D. SARKAR, *Wear of Metals*, Pergamon, Press, 1976.

Încercările experimentale au scos în evidență faptul că vitezele de uzare abrazivă ale oțelurilor studiate atinge valori reduse ($0{,}1 \div 3{,}2$ mm^3/h); vitezele de uzare cresc în cazul aplicării cuplei, în același condiții de viteză relativă și de temperatură.

4. CONCLUZII

Din analiza datelor experimentale se pot trage următoarele concluzii privind posibilitățile de utilizare ale materialelor studiate, la construcția cuplei piston/corp, ale dozatorelor celulare pentru cenușă de zgură:

— duritatea valorilor reduse ale vitezei de uzare se exclude posibilitatea utilizării materialelor cuplei de material: Fontă albă/Fontă albă; Oțel/Fontă albă; Oțel/Fontă albă; Fe 30/Fontă albă; T 35 SN 11/Fontă albă; T 35 SN 11/Oțel; Fe 30/T 35 SN 11; Fe 30/Oțel; T 35 SN 11/Oțel; Fe 30/Fontă albă; T 35 SN 11/Fontă albă; T 35 SN 11/T 35 SN 11; T 35 SN 11/Oțel

CERCETĂRI ASUPRA STRUNJIRII ÎN CÎMP ULTRASONOR

de GHEORGHE AMZA, PETRE GLADCOV

nstitutul politehnic Bucureşti

Introducerea energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de aşchiere permite intensificarea regimurilor de lucru, simultan cu îmbunătăţirea calităţii suprafeţelor prelucrate. Aportul energiei ultrasonore depinde în cea mai mare măsură de modul de concentrare şi introducere a ultrasunetelor în focarul prelucrării.

În lucrare se prezintă cîteva sisteme posibile de introducere a energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de aşchiere prin strunjire, ca şi o metodică de investigaţie şi de prelucrare a rezultatelor exerimentale, referitoare la studiul influenţei energiei ultrasonore asupra rugozităţii suprafeţelor strunjite în cîmp ultrasonor.

Dintre metodele care pot contribui la creşterea eficienţei proceselor de aşchiere, introducerea în sistemul tehnologic a vibraţiilor ultrasonore se remarcă în ultimul timp ca soluţia adoptată din ce în ce mai des de diferiţi cercetători ai procesului de aşchiere, care încearcă să îmbine procedeele clasice de prelucrare cu ultimele cuceriri ale ştiinţei secolului nostru.

Ca efecte scontate ale suprapunerii oscilaţiilor cu frecvenţe în domeniul ultrasonor peste forţele din sistemul clasic de aşchiere se pot aminti: posibilitatea îmbunătăţirii productivităţii, a durabilităţii sculelor, ameliorarea rugozităţii suprafeţelor prelucrate şi a proprietăţilor mecanice ale stratului superficial, micşorarea forţelor de aşchiere şi corespunzător, a energiei specifice consumate în cadrul procesului de aşchiere etc. [1], [2].

Toate acestea constituie posibilităţi reale de intensificare a regimurilor de aşchiere faţă de sistemul clasic de lucru, avînd efectele economice cunoscute.

În Institutul politehnic Bucureşti se desfăşoară de cîţiva ani unele cercetări legate de studiul îmbunătăţirii calităţii suprafeţelor la prelucrarea în cîmp ultrasonor a aliajelor de aluminiu, care în mod obişnuit au o slabă prelucrabilitate din punctul de vedere al calităţii suprafeţelor aşchiate.

Una din problemele cele mai importante legate de introducerea în sistemul tehnologic a vibraţiilor, constă în găsirea modului cel mai convenabil de vibrare a acestui sistem, cu ajutorul blocului ultrasonic (fig. 1).

Acest bloc se compune în principiu din transductorul *1* (care converteşte oscilaţiile electrice dintr-o bobină, în oscilaţii mecanice cu frecvenţa de peste 16 kHz) şi din sistemul de conducere şi concentrare a energiei, la locul prelucrării.

El se compune la rîndul său din flanşa nodală *2*, concentratorul *3* şi scula *4*.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 2, 1979, P. 341–353

În ansamblul lor, toate elementele blocului ultraacustic trebuie să fie riguros coordonate din punctul de vedere al parametrilor acustici, mecanici şi constructivi şi să corespundă cît mai bine cu necesităţile cerute de procesul tehnologic de prelucrare.

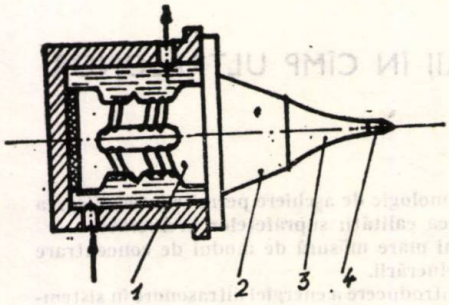


Fig. 1.— Construcţia blocului ultrasonor.

Sistemele experimentale de introducere a oscilaţiilor ultrasonore la prelucrarea prin aşchiere trebuie să mai asigure şi următoarele cerinţe suplimentare : posibilitatea montării şi demontării rapide, fără demontarea sau modificarea esenţială a maşinilor unelte experimentale, schimbabilitatea sistemului concentrator — sculă, posibilitatea funcţionării sistemului ultraacustic în regim de rezonanţă, necesitatea asigurării existenţei în sistem a unui singur tip de unde, necesitatea asigurării unei reglări comode etc.

În figura 2 se prezintă un sistem oscilator deschis pentru vibrarea cuţitului de strung cu unde longitudinale. Sistemul poate funcţiona în regim de rezonanţă, scula fiind plasată în maximul de undă al deplasărilor şi deci în minimul de undă al eforturilor unitare.

Intensificarea procesului de aşchiere se poate pune pe seama şocurilor periodice ale sculei, valoarea maximă a forţei exercitată dinamic depinzînd de amplitudinea oscilaţiilor, de sarcina statică şi de frecvenţa oscilaţiilor ultrasonore [9].

Se poate scrie relaţia

$$\sigma_d = 1{,}5\,\sigma_c \frac{T}{t}, \qquad (1)$$

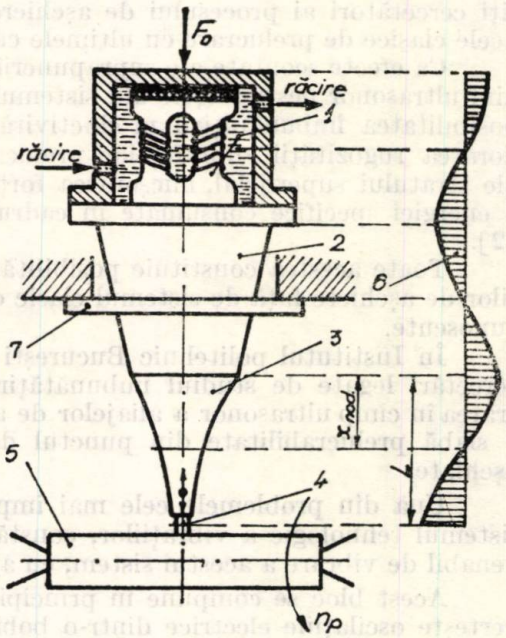


Fig. 2.— Sistem oscilator deschis, cu unde longitudinale.

în care σ_d este efortul unitar dinamic, σ_c este efortul unitar static, T reprezintă perioada oscilaţiilor ultrasonore, iar t reprezintă timpul de contact al sculei cu semifabricatul prelucrat.

Lungimea L a concentratorului se poate calcula cu ajutorul relației

$$L = \frac{n \cdot c}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{\ln M}{n \cdot \pi}\right)^2}, \qquad (2)$$

ținîndu-se cont că

$$x_{nod} = \frac{L}{\pi \cdot n} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\ln M}{n \cdot \pi} + \pi n'\right). \qquad (3)$$

În relațiile de mai sus s-au făcut următoarele notații:
c — viteza de propagare a undelor longitudinale, M — factorul de multiplicare, f — frecvența de rezonanță, $n = 1, 2, 3 \ldots$, iar n' are valoarea zero pentru primul punct nodal, $n' = 1$ pentru al doilea punct nodal etc. [11].

În figura 2, în afară de notațiile din figura 1 s-au mai notat următoarele elemente: *5*-semifabricatul prelucrat, *6*-diagrama amplitudinii deplasărilor, *7*-reazem, F_0 — sarcina statică.

Acest sistem prezintă o serie de avantaje legate de simplitatea constructivă, posibilitatea schimbării sistemului concentrator-sculă, manevrare comodă în timpul lucrului, dar are dezavantajul că nu rezistă la sarcini statice mari.

În cazul lucrului cu sarcini statice mari se poate utiliza un sistem oscilator închis, cu dispunerea focarului de prelucrare în maximul de undă al deplasărilor.

Sistemul oscilator închis este prezentat în principiu în figura 3.

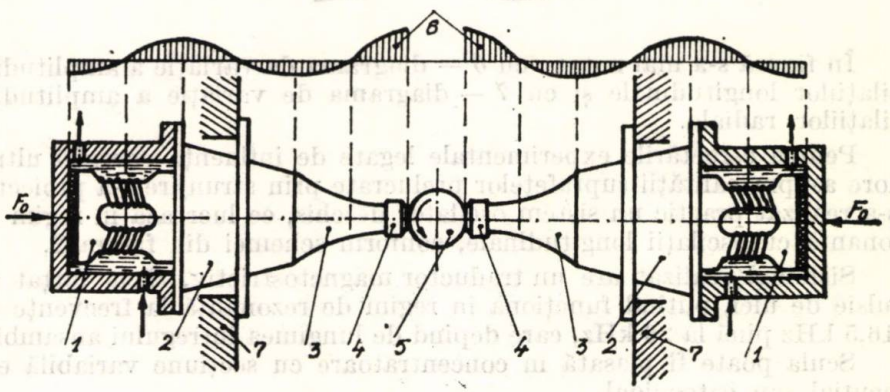


Fig. 3. — Sistem oscilator închis.

Dezavantajul acestui sistem constă în aceea că în acest caz se complică blocul acustic și că se pot prelucra numai piese la care diametrul acestora, împreună cu lungimea totală a sistemului, este egală cu lungimea unui număr impar de lungimi de semiundă.

O altă posibilitate de introducere a oscilațiilor ultrasonore în sistemul tehnologic de prelucrare este aceea a unor sisteme acustice care să lucreze cu oscilații radiale în focarul de prelucrare.

Acest mod de lucru este cel mai avantajos din punctul de vedere al prelucrării, dar sistemul are unele dezavantaje legate de necesitatea rotirii blocurilor ultrasonore.

Sistemul oscilator radial (fig. 4) este format din următoarele elemente traductorul *1*, flanşa nodală *2*, concentratorul *3*, scula *4*, reazemul *5*, piesa prelucrată *8*.

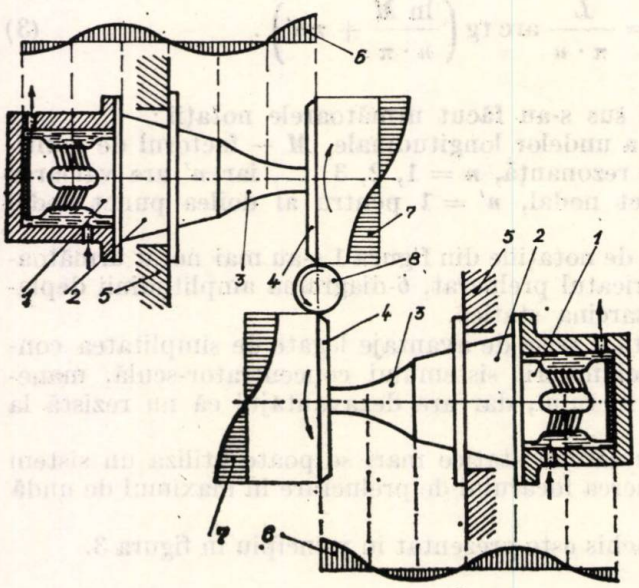


Fig. 4. — Sistem oscilator radial

În figură s-a mai notat : cu *6* — diagrama de variaţie a amplitudini oscilaţiilor longitudinale şi cu *7* — diagrama de variaţie a amplitudini oscilaţiilor radiale.

Pentru cercetările experimentale legate de influenţa energiei ultrasonore asupra calităţii suprafeţelor prelucrate prin strunjire s-a proiectat şi s-a realizat practic un sistem oscilator deschis, ce lucrează în regim de rezonanţă cu oscilaţii longitudinale, conform schemei din figura 2.

Sistemul realizat are un traductor magnetostrictiv, răcit forţat cu emulsie de ulei, putînd funcţiona în regim de rezonanţă la frecvenţe de la 16,5 kHz pînă la 26 kHz, care depind de lungimea întregului ansamblu.

Scula poate fi plasată în concentratoare cu secţiune variabilă exponenţial sau catenoidal.

În urma unor prime cercetări experimentale întreprinse de autori, a rezultat o îmbunătăţire a rugozităţii suprafeţelor strunjite în cîmp ultrasonor, faţă de prelucrarea după sistemul clasic, în cazul prelucrării aluminiului şi aliajelor acestuia.

Această constatare a condus la necesitatea punerii la punct a unei metodici de rezolvare a problemei calculului rugozităţii suprafeţelor strunjite în cîmp ultrasonor, în condiţiile folosirii unui număr relativ redus de determinări experimentale.

Este cunoscut faptul că rugozitatea suprafeţelor prelucrate prin strunjire depinde în primul rînd de mărimea avansului şi de mărimea unghiurilor de poziţie ale sculei, dar depinde şi de ceilalţi factori ai regimului de lucru utilizat [4].

Unii cercetători care au studiat rugozitatea suprafeţelor rezultate la strunjirea cilindrică [3] au arătat că aceasta este dată de o relaţie de tipul

$$R_a = C_R \cdot s^{m_1} \cdot r^{m_2} \cdot v^{m_3} \cdot \varkappa^{m_4}. \tag{4}$$

În relaţia de mai sus, C_R este o constantă care depinde în primul rînd de calitatea materialului aşchiat, $\varkappa$ este unghiul de atac al cuţitului utilizat la strunjire, v şi s sînt viteza, respectiv mărimea avansului de lucru, r este raza de racordare la vîrf a cuţitului, iar $m_1 \ldots m_4$ sînt exponenţii caracteristici ai mărimilor amintite mai sus, indicînd fiecare intensitatea influenţei variaţiei mărimii respective asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate.

În cazul strunjirii în cîmp ultrasonor, s-a constatat că în afară de factorii tehnologici cuprinşi în relaţia (4), o importanţă deosebită asupra rugozităţii suprafeţelor obţinute o mai au şi factorii acustici : mărimea amplitudinii A a oscilaţiilor, frecvenţa f a acestora, ca şi valoarea sarcinii statice de apăsare F_0 a sculei pe piesă, valoarea uzurii h_α pe faţa de aşezare a sculei, care modifică microgeometria zonei active a cuţitului.

Din cercetările experimentale efectuate de autori în direcţia studiului rugozităţii suprafeţelor prelucrate la strunjirea unor aliaje de aluminiu, a rezultat că dependenţa rugozităţii suprafeţei strunjite faţă de aceste elemente poate fi exprimată în mod similar ca şi dependenţa ei faţă de parametrii care figurează în relaţia (4).

În vederea studiului sistematic al corelaţiei dintre toate elementele amintite mai sus şi pentru a se pune în evidenţă influenţa fiecăruia din aceşti parametri ai regimului de lucru asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate prin strunjire în cîmp ultrasonor, se propune ca lege de variaţie medie a rugozităţii, funcţia :

$$R_a = k \cdot \varkappa^{x_1} \cdot \varkappa^{x_2} \cdot v^{x_3} \cdot s^{x_4} \cdot t^{x_5} \cdot A^{x_6} \cdot f^{x_7} \cdot h_\alpha^{x_8} \cdot F_0^{x_9} \cdot r^{x_{10}} \tag{5}$$

Coeficienţii şi exponenţii acestei ecuaţii urmează a fi determinaţi pe baza unor rezultate experimentale, prelucrate cu metodele corelaţiei multiple, [3], [5], [6], [7], [8].

În acest scop ne propunem a efectua un număr suficient de încercări experimentale, în care se vor prelucra diferite materiale din categoria aliajelor de aluminiu fabricate în ţară, utilizîndu-se pentru fiecare dintre factorii regimului de lucru, un număr convenabil de valori şi măsurînd la fiecare regim utilizat rugozitatea obţinută pe suprafaţa prelucrată.

Rezultatele experimentale obţinute se vor prelucra după cum urmează :

Din logaritmarea ecuației (5), se va obține :

$$\lg R_a = \lg k + x_1 \lg \varkappa + x_2 \lg \varkappa_1 + x_3 \lg v + x_4 \lg s + x_5 \lg t + \\ + x_6 \lg A + x_7 \lg f + x_8 \lg h_a + x_9 \lg F_0 + x_{10} \lg r. \tag{6}$$

Făcînd substituțiile :

$$\lg R_a = y;\ \lg k = x_0;\ \lg \varkappa = a_1;\ \lg \varkappa_1 = a_2;\ \lg v = a_3;\ \lg s = a_4; \\ \lg t = a_5;\ \lg A = a_6;\ \lg f = a_7;\ \lg F_0 = a_8;\ \lg h_a = a_9;\ \lg r = a_{10} \tag{7}$$

ecuația (6) devine :

$$y = x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{10}x_{10}, \tag{8}$$

în care coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ se cunosc, fiind de fapt logaritmii parametrilor regimului de lucru utilizat la fiecare experiență (conform substituțiilor de mai sus).

Valorile necunoscutelor $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{10}$ ale ecuației (8) se pot determina prin metoda celor mai mici pătrate, astfel încît suma pătratelor abaterilor reale ale funcției de regresie y față de valorile obținute din ecuația (8) să fie minimă.

Dacă notăm deci cu S funcția erorilor, va trebui să avem :

$$S = \sum_1^n (x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_{10}x_{10} - y)^2 = \text{minim}. \tag{9}$$

Întrucît S este o funcție de valorile $x_0, x_1, \ldots x_{10}$, valoarea ei minimă se poate afla din anularea derivatelor parțiale ale sale, pentru fiecare din variabilele $x_0, x_1, \ldots x_{10}$, adică

$$\frac{\partial s}{\partial x_0} = \frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{\partial s}{\partial x_2} \ldots = \frac{\partial s}{\partial x_{10}} = 0. \tag{10}$$

Condițiile (10) conduc la un sistem de 11 ecuații cu 11 necunoscute, astfel :

$$\frac{\partial s}{\partial x_0} = 2 \sum_1^n (x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{10}x_{10} - y) = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial x_1} = 2 \sum_1^n (x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{10}x_{10} - y) \cdot a_1 = 0, \tag{11} \\ \vdots \\ \frac{\partial s}{\partial x_{10}} = 2 \sum_1^n (x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{10}x_{10} - y) \cdot a_{10} = 0.$$

Sistemul (11) se reduce la următorul sistem de ecuații normale :

$$\begin{aligned}
&n\sum_1^n x_0 + x_1\sum_1^n a_1 + x_2\sum_1^n a_2 + \ldots + x_{10}\sum_1^n a_{10} = \sum_1^n y,\\
&x_0\sum_1^n a_1 + x_1\sum_1^n a_1^2 + x_2\sum_1^n a_2a_1 + \ldots + x_{10}\sum_1^n a_{10}a_1 = \sum_1^n y\cdot a_1,\\
&x_0\sum_1^n a_2 + x_1\sum_1^n a_1a_2 + x_2\sum_1^n a_2^2 + \ldots + x_{10}\sum_1^n a_{10}a_2 = \sum_1^n y\cdot a_2,\\
&\vdots\\
&x_0\sum_1^n a_{10} + x_1\sum_1^n a_1a_{10} + x_2\sum_1^n a_2a_{10} + \ldots + x_{10}\sum_1^n a_{10}^2 = \sum_1^n y\cdot a_{10}.
\end{aligned} \tag{12}$$

În acest sistem liniar, valorile sumelor se cunosc din centralizarea condițiilor și rezultatelor experimentale, astfel că din rezolvarea lui putem afla valorile necunoscutelor.

Introducînd valorile rezultate pentru acestea în ecuațiile (7), se vor afla valorile coeficienților și exponenților din funcția (5).

Rezolvarea sistemului (12) se poate face comod pe un calculator numeric, folosindu-se metoda Gauss-Legendre.

Dat fiind numărul mare de factori care influențează în mod real asupra rugozității suprafețelor strunjite în cîmp ultrasonor, dar care nu pot fi luați în totalitate în considerare în mod explicit, este evident că rezultatele obținute au un caracter aleator.

În vederea verificării corectitudinii ipotezelor admise în cele de mai sus, este absolut necesară estimarea preciziei legăturii prin intermediul funcției (5) a rugozității, de parametrii luați în considerare, comparativ cu rezultatele experimentale.

Aceasta se poate pune în evidență prin calculul coeficienților de regresie (de corelație) a rugozității față de fiecare din variabilele propuse.

În condițiile de mai sus, acești coeficienți de corelație se pot calcula cu ajutorul relațiilor :

$$\begin{aligned}
r_{Ra,x_1} &= \frac{n\cdot\sum_1^n a_1\cdot R_a - \sum_1^n a_1\cdot\sum_1^n R_a}{\sqrt{\left[n\sum_1^n a_1^2 - \left(\sum_1^n a_1\right)^2\right]\left[n\sum_1^n R_a^2 - \left(\sum_1^n R_a\right)^2\right]}},\\
r_{Ra,x_{10}} &= \frac{n\cdot\sum_1^n a_{10}\cdot R_a - \sum_1^n a_{10}\cdot\sum_1^n R_a}{\sqrt{\left[n\sum_1^n a_{10}^2 - \left(\sum_1^n a_{10}\right)^2\right]\left[n\sum_1^n R_a^2 - \left(\sum_1^n R_a^2\right)\right]}}.
\end{aligned} \tag{13}$$

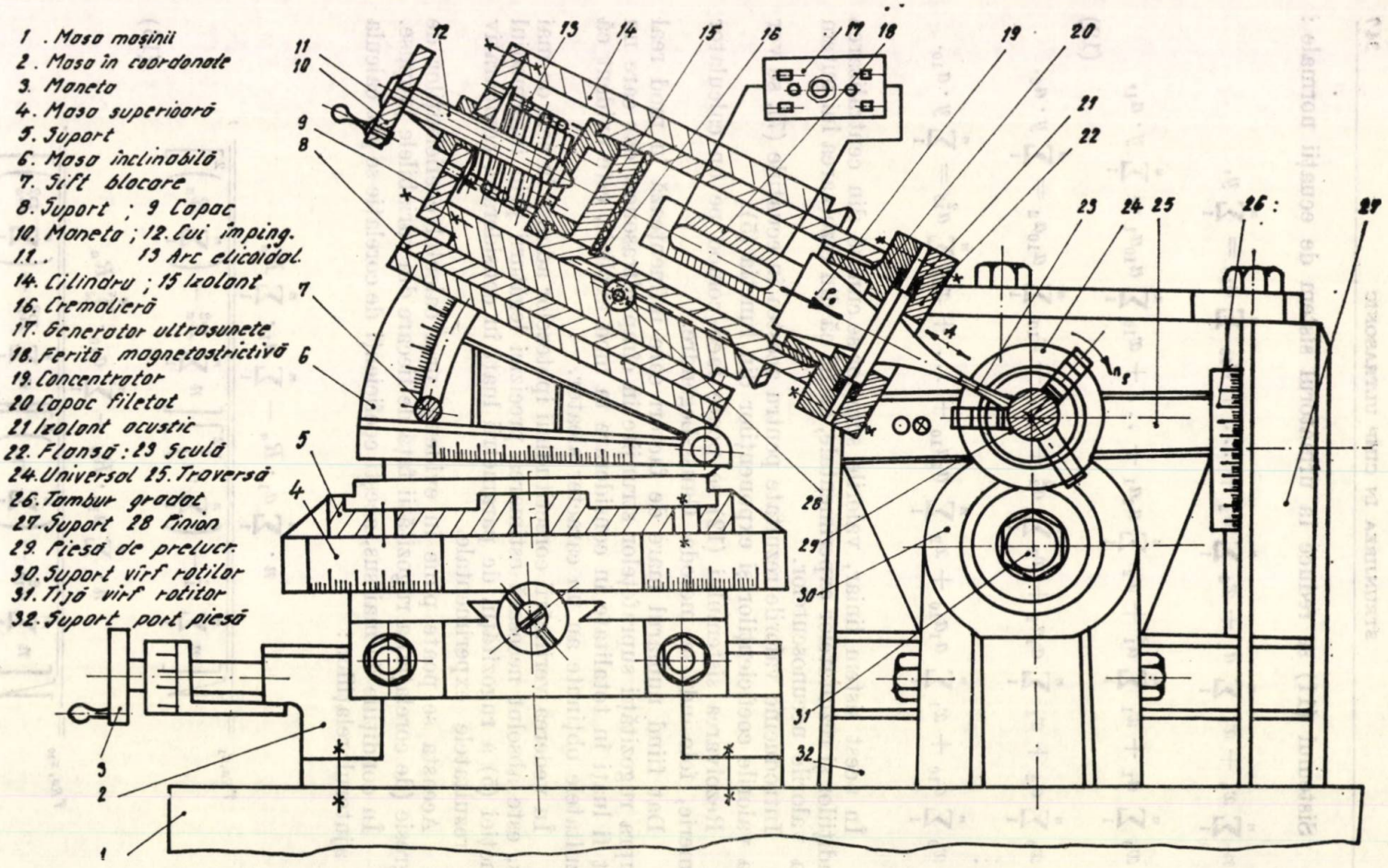


Fig. 5.—Schema de principiu a dispozitivului de lucru al mașinii de prelucrat cu ultrasunete.

Măsura în care variația reală a rugozității satisface legea propusă prin funcția (5) va fi arătată de gradul în care coeficienții calculați cu relațiile (13) se apropie de valoarea ± 1.

Mărimea și semnul coeficienților și exponenților funcției (5) vor arăta mărimea și sensul influenței diferiților parametri luați în studiu, asupra rugozității suprafețelor strunjite în cîmp ultrasonor.

Experimentările au fost efectuate pe piese de tipul axelor, prelucrarea executîndu-se pe o mașină model experimental, realizată în catedra Tehnologia metalelor din Institutul politehnic București.

În figura 5 se prezintă schema de principiu a dispozitivului de lucru al mașinii de prelucrat cu ultrasunete, a cărei parte activă este în acest caz un concentrator-cuțit de strunjit cu o geometrie stabilită în baza unor rezultate experimentale preliminare.

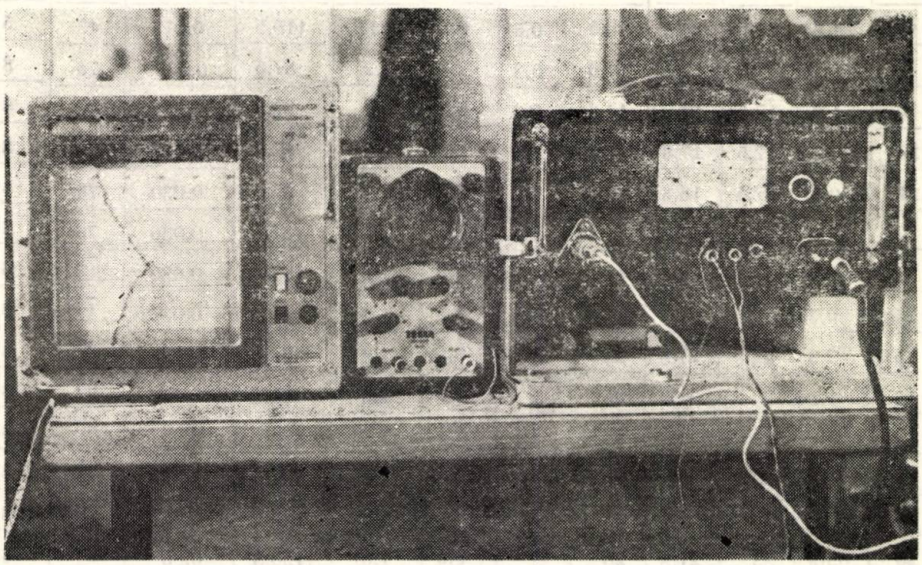


Fig. 6. — Montajul pentru măsurarea rugozității suprafețelor prelucrate.

Măsurarea rugozității s-a făcut cu ajutorul unui rugozimetru cu palpator, model ORION-GAMA 2335, care indică rugozitatea R_a (fig. 6).

În tabelul 1 se dau unele valori ale rezultatelor experimentale obținute în cadrul cercetărilor.

Pentru a determina o lege cît mai completă de dependență a rugozității față de parametrii tehnologici, mecanici și acustici s-a variat frecvența de lucru în domeniul 16 ... 28 KHz amplitudinea oscilațiilor în domeniul 5 ... 57 μm, forța statică de apăsare în domeniul 1,5 ... 40 daN viteza de așchiere în domeniul 80 ... 180 m/min, avansul de așchiere în domeniul 0,015 ... 1,0 mm/rot și adîncimea de așchiere în domeniul 0,5 ... 3,0 mm.

Prelucrarea datelor experimentale a fost efectuată pe calculatorul electronic. În figura 7 se prezintă schema logică a programului principal utilizat în acest scop.

Tabelul 1

Extras din tabelul cu date experimentale

Nr. crt.	R_a [μm]	A [μm]	f [kH_z]	F_0 [daN]	h_α [mm]	t [mm]	γ [mmin]	v [mmin]	s [mm min]	$\varkappa$ [0]	$\varkappa_0$ [0]
1	0,2	7,5	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
2	0,4	12,5	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
3	0,65	17,5	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
4	0,80	23,0	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
5	1,0	32,0	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
6	1,2	47,0	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
7	1,6	82,0	20,3	8,5	0,5	0,8	0,8	118,5	0,015	45	5
8	3,2	17,5	16,5	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
9	1,6	17,5	17,0	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
10	1,2	17,5	17,8	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
11	0,8	17,5	18,8	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
12	0,6	17,5	19,3	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
13	0,4	17,5	20,8	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
14	0,33	17,5	22,3	14,6	0,8	2,3	1,2	87,5	0,030	75	8
15	2,3	23	21,8	28	1	0,5	1,6	30,5	0,05	90	8
16	1,8	23	21,8	28	1	0,5	1,6	60,7	0,05	90	8
17	1,6	23	21,8	28	1	0,5	1,6	83,8	0,05	90	8
18	1,3	23	21,8	28	1	0,5	1,6	103,5	0,05	90	8
19	0,95	23	21,8	28	1	0,5	1,6	132,5	0,05	90	8
20	0,62	23	21,8	28	1	0,5	1,6	150,3	0,05	90	8
21	0,4	23	21,8	28	1	0,5	1,6	180,7	0,05	90	3
22	3,2	28,3	24	4,5	0,1	3	2	103,5	0,015	60	3
23	1,8	28,3	24	8,5	0,1	3	2	103,5	0,015	60	3
24	1,2	28,3	24	10	0,1	3	2	103,5	0,015	60	3
25	0,9	28,3	24	15	0,1	3	2	103,5	0,015	60	3
26	0,5	28,3	24	30	0,1	3	2	103,5	0,015	60	3
27	0,4	32,5	19,8	18,5	1,2	1,5	0,8	103,5	0,010	60	3
28	0,8	32,5	19,8	18,5	1,2	1,5	0,8	103,5	0,015	60	10
29	1,0	32,5	19,8	18,5	1,2	1,5	0,8	103,5	0,030	60	10
30	1,4	32,5	19,8	18,5	1,2	1,5	0,8	103,5	0,06	60	10
31	2,3	32,5	19,8	18,5	1,2	1,5	0,8	103,5	0,125	60	10
32	3,2	32,5	19,8	18,5	1,2	1,5	0,8	103,5	0,5	60	10

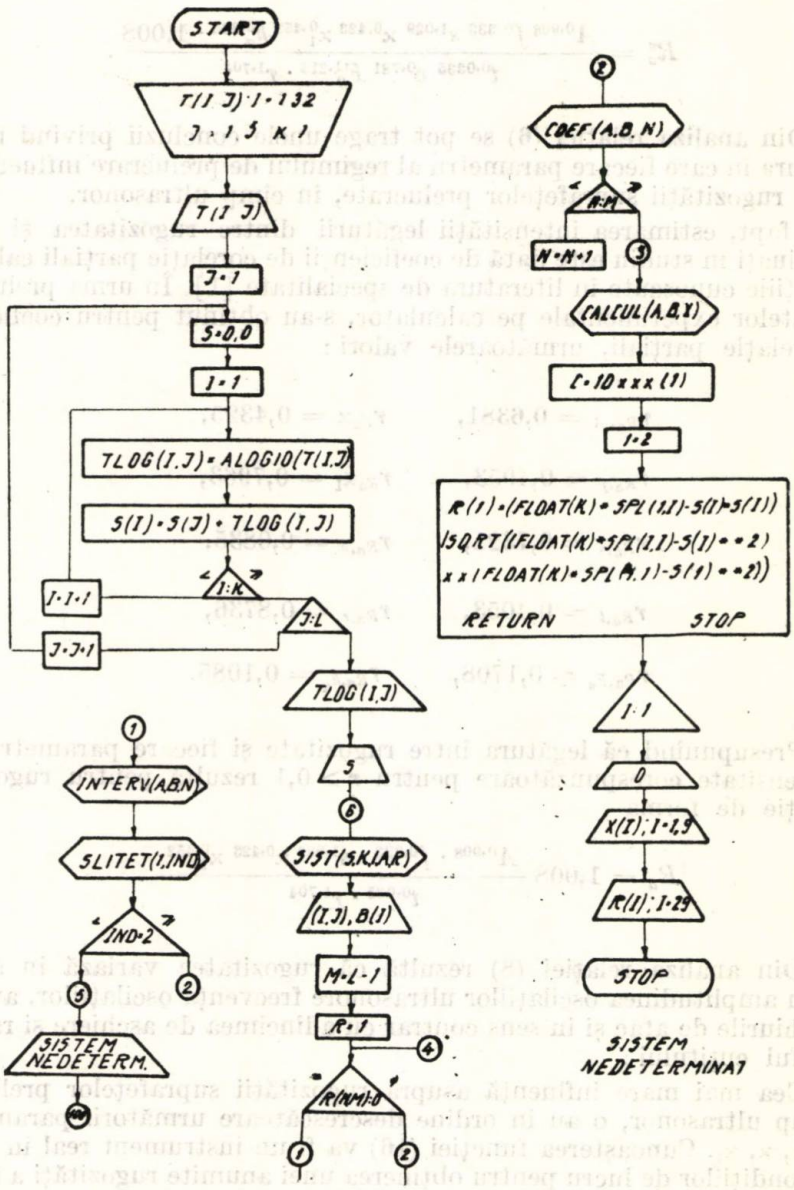


Fig. 7. — Programul principal de calcul al coeficienților.

În urma prelucrării datelor experimentale, a rezultat următoarea funcţie de variaţie a rugozităţii suprafeţelor prelucrate în cîmp ultrasonor, la materialele studiate :

$$R_a^u = \frac{A^{0,908} f^{0,333} s^{1,029} \varkappa^{0,423} \varkappa_1^{0,452} h_\alpha^{0,845} \cdot 1{,}008}{t^{0,0335} v^{0,781} F_0^{1,213} \cdot r^{1,704}}. \tag{14}$$

Din analiza relaţiei (6) se pot trage unele concluzii privind modul şi măsura în care fiecare parametru al regimului de prelucrare influenţează asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate, în cîmp ultrasonor.

De fapt, estimarea intensităţii legăturii dintre rugozitatea şi parametrii luaţi în studiu este dată de coeficienţii de corelaţie parţiali calculaţi cu relaţiile cunoscute în literatura de specialitate [1]. În urma prelucrării rezultatelor experimentale pe calculator, s-au obţinut pentru coeficienţii de corelaţie parţiali, următoarele valori :

$$\begin{aligned} r_{R_a,A} &= 0{,}6381, & r_{R_a\varkappa} &= 0{,}4325, \\ r_{R_a,f} &= 0{,}4953, & r_{R_a\varkappa_1} &= 0{,}7963, \\ r_{R_a,s} &= 0{,}7321, & r_{R_a,v} &= 0{,}0835, \\ r_{R_a,t} &= 0{,}4053, & r_{R_a,r} &= 0{,}8736, \\ r_{R_a,F_0} &= 0{,}1708, & r_{R_a,h_\alpha} &= 0{,}1085. \end{aligned} \tag{15}$$

Presupunînd că legătura între rugozitate şi fiecare parametru este de intensitate corespunzătoare pentru $r > 0{,}1$ rezultă pentru rugozitate o relaţie de forma

$$R_a = 1{,}008 \frac{A^{0,908} \cdot f^{0,333} \cdot s^{1,029} \varkappa^{0,423} \varkappa_1^{0,452}}{t^{0,035} \cdot r^{1,704}}. \tag{16}$$

Din analiza relaţiei (8) rezultă că rugozitatea variază în acelaşi sens cu amplitudinea oscilaţiilor ultrasonore frecvenţa oscilaţiilor, avansul şi unghiurile de atac şi în sens contrar cu adîncimea de aşchiere şi raza de la vîrful cuţitului :

Cea mai mare influenţă asupra rugozităţii suprafeţelor prelucrate în cîmp ultrasonor, o au în ordine descrescătoare următorii parametrii : r, s, A, $\varkappa$, $\varkappa_1$. Cunoaşterea funcţiei (16) va fi un instrument real în stabilirea condiţiilor de lucru pentru obţinerea unei anumite rugozităţi a suprafeţelor prelucrate, în condiţiile intensificării proceselor de prelucrare, permisă prin introducerea energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de aşchiere.

Primită la redacţie la 5 noiembrie 1976 ; în formă refăcută la 30 septembrie 1978.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Isaev, *Primenenie ultrazvucovîh kolebanii instrumenta rezanii metallov.* In **Vestnik** maşinostroenia, *8* (1962).
2. A. R. Băncilă, G. S. Georgescu, *Noutăţi în construcţia şi folosirea maşinilor unelte, dispozitivelor şi sculelor.* Edit. tehnică, Bucureşti, 1965.
3. Al. Dorin, Fl. Drăgănescu, Gh. Zgură, *Determinarea expresiei rugozităţii în cazul strunjirii longitudinale.* Construcţia de Maşini, Bucureşti, **XVIII**, *2*, februarie (1976).
4. St. Enache, *La qualité des surfaces usinées*, Dunod, Paris, 1972.
5. Craiu Ciucu, *Introducere în statistica matematică şi teoria probabilităţilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968.
6. I. Todoran, *Prelucrarea matematică a datelor experimentale*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1976.
7. P. Gladcov, I. Hristache, *Determinarea cu metode statistice a regimurilor de aşchiere*, Revista de statistică, *2* (1975).
8. P. Gladcov, *Cercetări asupra capacităţii de aşchiere a plăcuţelor din carburi metalice, grupa K 30, obţinute din materiale româneşti.* În comunicările celei de-a II-a conferinţe în domeniul proceselor şi utilajelor de prelucrare la rece. I. P. Timişoara 1973.
9. V. A. Rumianţev, *Metalurgia*, *11*, Sudostroenie, 1968.
10. Amza Gh., D. Drimer, *Calculul şi construcţia concentratorilor de energie ultrasonoră*, Tehnologii moderne în Construcţia de Maşini, I. P. Bucureşti, nov. 1974.
11. Gh. Amza, D. Drimer, *The design and construction of solid concentrators for ultrasonic energy*, Ultrasonics, London, September (222—226) 1976.

EMIL TOCACI

ASPECTE ALE EFECTULUI FORȚELOR PERCUTANTE ȘI ALE DINAMICII PARTICULEI DE MASĂ VARIABILĂ, ÎN CAZUL RELATIVIST

Lucrarea, utilizînd unele elemente de teoria distribuțiilor, stabilește, în prima sa parte, legătura între percuția aplicată unei particule și variația vitezei sale, precum și variația masei sale de repaus, în cazul relativist (al vitezei v a particulei suficient de mare în raport cu viteza c a luminii pentru ca mărimea $v^2 \cdot c^{-2}$ să nu poată fi neglijată).

În cea de-a doua parte este stabilită ecuația de mișcare a particulei de masă variabilă (prin captări sau emisii de jeturi de substanță) în același caz relativist, caracterizat fie de o viteză v, a particulei studiate, suficient de mare, pentru ca $v^2 \cdot c^{-2}$ să nu se poată neglija, fie de o viteză u a jetului emis (captat) suficient de mare pentru ca $u^2 \cdot c^{-2}$ să nu fie o cantitate neglijabilă, fie de situația în care atît $v^2 \cdot c^{-2}$ cît și $u^2 \cdot c^{-2}$ nu sînt neglijabile.

Implicațiile practice sînt evidente.

Se dau și două exemple de calcul.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 2, 1979, p.175—186
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIHAI D. STAN

STUDIUL CURGERII UNUI FLUID PERFECT INCOMPRESIBIL ÎN JURUL UNUI CILINDRU POROS SLAB DEFORMAT

În lucrare se studiază curgerea unui fluid perfect incompresibil în jurul unui cilindru poros slab deformat.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 2, 1979, p. 187—196
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. OROVEANU și AL. D. STAN

CONSIDERAȚII ASUPRA REGIMULUI TERMIC ÎN MIȘCAREA GAZELOR PRIN CONDUCTE

În lucrare se prezintă mai întîi modul de calcul al proprietăților fizice ale unui gaz cu mai mulți componenți, rezultatele fiind apoi utilizate la stabilirea variației temperaturii în lungul unei conducte prin care se transportă un asemenea gaz. Calculele efectuate pentru un caz concret indică o diferență între cazul „izoterm" și cel „neizoterm", așa cum sînt definite acestea în lucrare. Între variantele „neizoterme", calculele indică diferențe nesemnificative din punct de vedere practic.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 2, 1979, p. 197—207
Redacția: București, str. C. Mille nr. 15,

MIRCEA T. ORĂȘANU

ASUPRA MIȘCĂRILOR NESTAȚIONARE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ PRINTR-UN MASIV POROS NEOMOGEN DE TIPUL III

Prezenta lucrare este o extindere a teoriei hidraulice pentru mișcările nestaționare cu suprafață liberă în medii poroase neomogene de tipul III. Cînd suprafața liberă nu se depărtează prea mult de un plan orizontal $z = z_0$, ecuația suprafeței libere se poate scrie:

$$z = H(x, y, t).$$

În baza teoriei hidraulice și a legii lui Darcy, obținem pentru funcția necunoscută H ecuația de ordinul doi neliniară cu derivate parțiale,

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x, y)\frac{\partial H^2}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x, y)\frac{\partial H^2}{\partial y}\right]\right\} + \frac{W_0}{m},$$

unde W_0 este viteza verticală pe planul $Z = 0$, dar W_0 conține și alți factori ca infiltrația sau evaporarea prin suprafața liberă, iar m este porozitatea.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 2, 1979, p. 209—218
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

EMIL TOCACI

ASPECTE ALE EFECTULUI FORTĂREȚ PERCUTANTE ȘI ALE DINAMICII PARTICULEI DE MASĂ VARIABILĂ, ÎN CAZUL RELATIVIST

Sesiunea, utilizând unele elemente de teoria distribuțiilor, stu-
diește, în prima sa parte, legătura între precizia soluției unei
părțile și variația vitezei sale, precum și variația masei sale de
repaus, în cazul relativist (în viteză v a particulei subiecte de mare
în raport cu viteza c a luminii pentru ca mișcarea $v^2 - c^2 \neq 0$ nu
poată fi neglijată).

În cea de-a doua parte este stabilită ecuația de mișcare a parti-
culei de masă variabilă (prin capătul său cuplat de jetul de substan-
ță) în acest caz relativist, caracterizat fie de o viteză a, a parti-
culei studiate, aflată în repaus, pentru ca $a^2 - c^2 \neq 0$ nu se poată
neglija, fie de o viteză b a jetului emis (capătul suficient de mare
pentru ca $b^2 - c^2 \neq 0$ să nu fie o cantitate neglijabilă, fie de viteza
în care $a^2 - c^2$ cât și $b^2 - c^2$ nu sînt neglijabile.

Implicațiile practice sînt evidente.

Se dau și două exemple de calcul.

Sl. cerc. mec. apl., tom. 53, nr. 5, 1978, p. 173—185
Redacția: Bucureşti, str. Gen. Mihail nr. 19

T. OROVEANU și AL. D. STAN

CONSIDERAȚII ASUPRA REGIMULUI TERMIC ÎN MIȘCAREA GAZELOR PRIN CONDUCTE

În lucrare se prezintă mai întîi modul de calcul al proprietăților
fizice ale unui gaz ca mai multi componenți reactanți fiind apoi
utilizate în stabilirea variației temperaturii în lungul unei conducte
prin care se transportă un asemenea gaz. Calculele efectuate pentru
un caz concret indică o diferență între cazul „izoterm” și cel „neizo-
term”, mai cînd sînt dezbătute aceste în lucrare, între valoarea
„neizoterme”, calculîe indică diferențe nesemnificative din punct
de vedere practic.

Sl. cerc. mec. apl., tom. 53, nr. 5, 1978, p. 187—207
Redacția: Bucureşti, str. Gen. Mihail nr. 19

MIHAI D. STAN

STUDIUL CURGERII UNUI FLUID PERFECT INCOMPRESIBIL ÎN JURUL UNUI CILINDRU POROS. SUPRAFAȚĂ DEFORMAT

În lucrare se studiază curgerea unui fluid perfect incompresibil
în jurul unui cilindru poros slab deformat.

Sl. cerc. mec. apl., tom. 53, nr. 5, 1978, p. 189—196
Redacția: Bucureşti, str. Gen. Mihail nr. 19

MIRCEA T. ORĂȘANU

ASUPRA MIȘCĂRILOR NESTAȚIONARE CU SUPRAFAȚĂ LIBERĂ PRINTR-UN MASIV POROS NEOMOGEN DE TIPUL III

Prezenta lucrare este o extindere a teoriei hidraulice pentru mi-
cările nestaționare cu suprafață liberă în medii poroase neomogene
de tipul III. Cînd suprafața liberă nu se depărtează prea mult de
un plan orizontal $z = z_0$, ecuația suprafeței libere se poate scrie:

$$z = W(x, y, t).$$

În baza teoriei hidraulice și a legii lui Darcy, obținem pentru
funcția necunoscută W ecuația de ordinul doi neliniară cu derivate
parțiale,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x, y)\frac{\partial W^2}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[k(x, y)\frac{\partial W^2}{\partial y}\right]\right\} + \frac{W_0}{m},$$

unde W_0 este viteza verticală pe planul $Z = 0$, dar W_0 conține și
alți factori ca infiltrația sau evaporarea prin suprafața liberă, lar
m este porozitatea.

Sl. cerc. mec. apl., tom. 53, nr. 2, 1978, p. 209—218
Redacția: Bucureşti, str. Gen. Mihail nr. 19

N. MANAFI, S. CONONOVICI

ALGORITME PENTRU CALCULUL POZIȚIONAL ȘI CINEMATIC AL MECANISMELOR FORMATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE BINARE, UTILIZATE ÎN PROGRAMUL GENERAL CINCINET

Lucrarea este prima dintr-o serie avînd ca obiectiv prezentarea principiilor și algoritmelor care au stat la baza elaborării programului general CINCINET destinat calculului cinematic și cinetostatic automatizat al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare.

Se prezintă mai întîi o serie de considerente generale avute în vedere la elaborarea programului, urmate de o scurtă descriere a acestuia.

Sînt prezentate în continuare algoritmele de calcul pozițional și cinematic, elaborate de autori, incluse integral în programul CINCINET. Datorită formei în care au fost sistematizate, aceste algoritme se pretează și utilizării lor pe minicalculatoare programabile și neprogramabile.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 2, 1979, p. 219—236
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ADALBERT NAHLIK, ALEXANDRU PASTIA

O METODĂ EXACTĂ PENTRU ECHILIBRAREA ROTORILOR ÎN DOUĂ PLANE

În lucrare sînt prezentate noțiunile de bază privind echilibrarea rotorilor, indicîndu-se pentru diferite mase de rotor forța centrifugă liberă corespunzătoare gradelor de calitate a echilibrării, recomandate în ISO 1940. Se expune metoda de calcul propusă, la baza căreia stă ipoteza interdependenței liniare dintre masa contragreutății și vectorul corespunzător de dezechilibru din planele lagărelor. Mersul calculului este ilustrat cu diagrame vectoriale. Este redat în continuare programul de calcul întocmit în limbaj FORTRAN precum și două exemple, rezultatele finale fiind prezentate tabelar.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 2, 1979, p. 237—250
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CONSTANTIN ACKER

SOLICITĂRI STATICE ÎN MOTORUL LINIAR CU PISTON AVÎND CURSA PISTOANELOR VERTICALĂ

Se înlătură confuzia frecventă între motorul liniar cu piston și motorul tip bielă-manivelă „cu biela scurtă" egală cu manivela, relevîndu-se calități total diferite ale celor două tipuri de motoare, din punctul de vedere al solicitărilor statice.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 251—258
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

VALERIU BĂNUȚ

CALCULUL GEOMETRIC NELINIAR AL STRUCTURILOR SPAȚIALE FORMATE DIN BARE

În lucrare se prezintă aspectele teoretice și practice ale calculului geometric neliniar — calculul de ordinul II — al structurilor spațiale formate din bare. Se stabilește expresia matricei de rigiditate secantă și a matricei de rigiditate tangentă pentru elementul de bară. În final, se prezintă rezultatele calculului practic al unei structuri metalice, punîndu-se în evidență influența schimbării geometriei structurii asupra mărimii eforturilor.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 259—271
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. MANAFI, S. CONONOVICI

ALGORITME PENTRU CALCULUL POZIȚIONAL ȘI CINEMATIC AL MECANISMELOR FORMATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE BINARE, UTILIZATE ÎN PROGRAMUL GENERAL CINCINET

Lucrarea este prima dintr-o serie avînd ca obiectiv prezentarea principiilor și algoritmelor care au stat la baza elaborării programului general CINCINET destinat calculului cinematic și cinetostatic automatizat al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare.

Se prezintă mai întîi o serie de considerente generale avute în vedere la elaborarea programului, urmate de o scurtă descriere a acestuia.

Sînt prezentate în continuare algoritmele de calcul pozițional și cinematic, elaborate de autori, incluse integral în programul CINCINET. Datorită formei în care au fost sistematizate, aceste algoritme se pretează și utilizării lor pe minicalculatoare programabile și neprogramabile.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 2, 1979, p. 219–238
Redacția: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ADALBERT NAHLIK, ALEXANDRU PASTIA

O METODĂ EXACTĂ PENTRU ECHILIBRAREA ROTORILOR ÎN DOUĂ PLANE

În lucrare sînt prezentate noțiunile de bază privind echilibrarea rotorilor, indicîndu-se pentru diferite mase de rotor forța centrifugă liberă corespunzătoare gradelor de calitate a echilibrării, recomandate în ISO 1940. Se expune metoda de calcul propusă, la baza căreia stă ipoteza interdependenței liniare dintre masa contragrăutății și vectorul corespunzător de dezechilibru din planele lagărelor. Mersul calculului este ilustrat cu diagrame vectoriale. Este redat în continuare programul de calcul întocmit în limbaj FORTRAN precum și două exemple, rezultatele finale fiind prezentate tabelar.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 2, 1979, p. 237–250
Redacția: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

CONSTANTIN ACKER

SOLICITĂRI STATICE ÎN MOTORUL LINIAR CU PISTON AVÎND CURSA PISTOANELOR VERTICALĂ

Se inlătură confuzia frecventă între motorul liniar cu piston și motorul tip biela-manivelă „cu biela scurtă" egală cu manivela, relevîndu-se calități total diferite ale celor două tipuri de motoare, din punctul de vedere al solicitărilor statice.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 251–258
Redacția: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

VALERIU BĂNUȚ

CALCULUL GEOMETRIC NELINIAR AL STRUCTURILOR SPAȚIALE FORMATE DIN BARE

În lucrare se prezintă aspectele teoretice și practice ale calculului geometric neliniar – calculul de ordinul II – al structurilor spațiale formate din bare. Se stabilește expresia matricei de rigiditate secantă și a matricei de rigiditate tangentă pentru elementul de bară. În final, se prezintă rezultatele calculului practic al unei structuri metalice, punîndu-se în evidență influența schimbării geometriei structurii asupra mărimii eforturilor.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 259–271
Redacția: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

MARCEL D. STERE

CALCULUL DEFORMAȚIILOR MARI ALE PLĂCILOR FOLOSIND METODA RELAXĂRII DINAMICE

Folosirea metodei relaxării dinamice pentru studiul deformațiilor mari ale plăcilor. Sînt prezentate detalii ale acestei metode numerice și se face o comparație a rezultatelor obținute cu diverse metode numerice pentru un caz particular de calcul. Metoda relaxării dinamice este un procedeu iterativ de soluționare a formei cu diferențe finite a ecuațiilor diferențiale ce descriu comportarea structurii solicitate și este deosebit de eficientă pentru soluționarea ecuațiilor neliniare. O aplicare a acestei metode este realizată pentru analiza deformațiilor unei plăci plane solicitată de o presiune uniform distribuită.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 273—286
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ȘTEFAN JERCA

CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE REALIZATE DIN MATERIALE CU COMPORTARE VÎSCOELASTICĂ

Materialele de construcții moderne (plasticele armate) și unele materiale tradiționale (beton, beton armat, metale la temperaturi mari etc.) prezintă importante proprietăți viscoelastice. Comportarea unor astfel de materiale este bine aproximată de modelele reologice compuse viscoelastice.

Cu ajutorul calculului operațional (transformata Laplace) se elaborează metoda forțelor pentru calculul structurilor static nedeterminate realizate din material viscoelastic, care generalizează metoda respectivă din calculul elastic liniar.

Un exemplu de calcul scoate în evidență importanța și generalitatea calculului propus.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 287—297
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN FRANGOPOL, JACQUES RONDAL

COMBINAREA OPTIMĂ A SIGURANȚEI ȘI ECONOMIEI ÎN DIMENSIONAREA STRUCTURILOR

Utilizînd conceptul probabilist al siguranței se stabilesc relații care furnizează valori optime pentru probabilitatea de cedare a unei structuri și pentru costul total probabil al structurii considerate.

St. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 2, 1979, p. 299—303
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M.A. DUMBRAVĂ

ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR APLICATE ÎN STUDIUL ȘI INTERPRETAREA FENOMENELOR DE CURGERE DIN LAGĂRELE HIDROSTATICE

Pe baza elementelor generale din teoria grafurilor este interpretat graful curgerii într-un lagăr hidrostatic radial. Utilizînd un exemplu numeric, se arată cele mai importante etape funcționale, cu grafurile respective, din care rezultă cîteva concluzii interesante. Se mai calculează drumul de rezistență hidraulică minimă, respectiv maximă, din graf. Sînt desprinse cîteva rezultate interesante, privind aspecte practice importante.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 2, 1979, p.305—315
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MARCEL D. STERE

CALCULUL DEFORMAȚIILOR MARI ALE PLĂCILOR FOLOSIND METODA RELAXĂRII DINAMICE

Folosirea metodei relaxării dinamice pentru studiul deformațiilor mari ale plăcilor. Sînt prezentate detalii ale acestei metode numerice și se face o comparație a rezultatelor obținute cu diverse metode numerice pentru un caz particular de calcul. Metoda relaxării dinamice este un proceden iterativ de soluționare a formei cu diferențe finite a ecuațiilor diferențiale ce descriu comportarea structurii solicitate și este deosebit de eficientă pentru soluționarea ecuațiilor neliniare. O aplicare a acestei metode este realizată pentru analiza deformațiilor unei plăci plane solicitată de o presiune uniform distribuită.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 273—286
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

STEFAN JERCA

CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE REALIZATE DIN MATERIALE CU COMPORTARE VÎSCOELASTICĂ

Materialele de construcții moderne (plasticele armate) și unele materiale tradiționale (beton, beton armat, metale la temperaturi mari etc.) prezintă importante proprietăți viscoelastice. Comportarea unor astfel de materiale este bine aproximată de modelele reologice compuse viscoelastice.

Cu ajutorul calculului operațional (transformata Laplace) se elaborează metoda forțelor pentru calculul structurilor static nedeterminate realizate din material viscoelastic, care generalizează metoda respectivă din calculul elastic liniar.

Un exemplu de calcul scoate în evidență importanța și generalitatea calculului propus.

St. cerc. mec. apl., tom. 28, nr. 2, 1979, p. 287—297
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN FRANGOPOL, JACQUES RONDAL

COMBINAREA OPTIMĂ A SIGURANȚEI SI ECONOMIEI ÎN DIMENSIONAREA STRUCTURILOR

Utilizînd concentul probabilist al siguranței se stabilesc relații care furnizează valori optime pentru probabilitatea de cedare a unei structuri și pentru costul total probabil al structurii considerate.

St. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 3, 1979, p. 299—302
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

M.A. DUMBRAVĂ

ELEMENTE DE TEORIA GRAFURILOR APLICATE ÎN STUDIUL ȘI INTERPRETAREA FENOMENELOR DE CURGERE DIN LAGĂRELE HIDROSTATICE

Pe baza elementelor generale din teoria grafurilor este interpretat graful curgerii într-un lagăr hidrostatic radial. Utilizînd un exemplu numeric, se arată cele mai importante etape funcționale, cu grafurile respective, din care rezultă cîteva concluzii interesante. Se mai calculează drumul de rezistență hidraulică minimă, respectiv maximă, din graf. Sînt desprinse cîteva rezultate interesante, privind aspecte practice importante.

St. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 2, 1979, p.303—315
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ŞTEFAN STANCIU

LAGĂRE RADIALE HIDROSTATICE ECHIPATE CU DROSELE DIN MATERIALE SINTERIZATE

În lucrare se demonstrează avantajele utilizării droselelor din materiale sinterizate prin prisma analizei caracteristicilor lagărelor radiale hidrostatice pe care le echipează. Determinarea analitică a portanţei, a debitului de scăpări precum şi a rigidităţii statice a fost făcută pe baza ecuaţiei de bilanţ de debite, aplicată fiecărei degajări a lagărului hidrostatic.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 2, 1979, p. 317—329
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

LUCIAN CĂPITANU

CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA LA FRECARE ŞI UZARE A DOZATORILOR CELULARI PENTRU EVACUAREA CENUŞII DE ŞIST DIN ELECTROFILTRE

Lucrarea prezintă rezultatele cercetărilor efectuate pentru determinarea perechii optime de materiale pentru cupla element paletă/corp, a dozatorilor celulari Ø 500 × 800 mm, utilizaţi la evacuarea cenuşii de şist din electrofiltre. Sînt abordate aspectele tribologice ale funcţionării cuplei de frecare, ţinîndu-se seamă de necesitatea menţinerii constante a jocului dintre rotorul şi corpul dozatorului, cît şi de abrazivitatea şi corozivitatea cenuşii de şist.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 2, 1979, p. 331—339
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

GHEORGHE AMZA, PETRE GLADCOV

CERCETĂRI ASUPRA STRUNJIRII ÎN CÎMP ULTRASONOR

Introducerea energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de aşchiere permite intensificarea regimurilor de lucru, simultan cu îmbunătăţirea calităţii suprafeţelor prelucrate.

Aportul energiei ultrasonore depinde în cea mai mare măsură de modul de concentrare şi introducere a ultrasunetelor în focarul prelucrării.

În lucrare se prezintă cîteva sisteme posibile de introducere a energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de aşchiere prin strunjire, ca şi o metodică de investigaţie şi de prelucrare a rezultatelor experimentale, referitoare la studiul influenţei energiei ultrasonore asupra rugozităţii suprafeţelor strunjite în cîmp ultrasonor.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 2, 1979, p. 341—353
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ȘTEFAN ȘTAICIU

LAGĂRE RADIALE HIDROSTATICE ECHIPATE CU CROSELE DIN MATERIALE SINTERIZATE

În lucrare se demonstrează avantajele utilizării croselor din materiale sinterizate prin presare asupra caracteristicilor hidrostatice radiale pe care le echipează. Determinarea analitică a portanței, a debitului de scăpări precum și a rigidității statice a fost făcută pe baza ecuației de bilanț de debite, aplicată fiecărei degajări a lagărului hidrostatic.

St. cerc. mec. apl., tom 33, nr. 2, 1979, p. 317—329
Redactor: Bucureşti, str. Constr. Mille nr. 15

LUCIAN CĂRTĂNU

CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA LA FRECARE ȘI UZARE A DOZATORILOR CELULARI PENTRU EVACUAREA CENUȘII DE ȘIST DIN ELECTROFILTRE

Lucrarea prezintă rezultatele cercetărilor efectuate pentru determinarea perechii optime de materiale pentru cuplu alesnut palet/corp, a dozatorilor celulari Ø 300 × 800 mm, utilizați la evacuarea cenușii de șist din electrofiltre. Sînt abordate aspectele tribologice ale funcționării cuplu de frecare. Ținînd-se seama de necesitatea menținerii constante a jocului dintre rotorul și corpul dozatorului, dă și de abrazivitatea și corozivitatea cenușii de șist.

St. cerc. mec. apl., tom 39, nr. 2, 1979, p. 339—349
Redacția: Bucureşti, str. Constr. Mille nr. 15

GHEORGHE AMZA, PETRE GLADCOV

CERCETĂRI ASUPRA STRUNJIRII ÎN CÎMP ULTRASONOR

Introducerea energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de așchiere permite intensificarea regimurilor de lucru, **simultan cu îmbunătățirea** calității suprafețelor prelucrate.

Aportul energiei ultrasonore depinde în cea mai mare măsură de modul de cuplare și introducere a ultrasunetelor în ișa/sul prelucrării.

În lucrare se prezintă două scheme posibile de introducere a energiei ultrasonore în sistemul tehnologic de așchiere prin strunjire, ca și o metodă de investigație și de prelucrare a rezultatelor experimentale, reliefînd influența unor regimuri ale energiei ultrasonore asupra rugozității suprafețelor strunjite în cîmp ultrasonor.

St. cerc. mec. apl., tom 33, nr. 2, 1979, p. 341—353
Redactor: Bucureşti, str. Constr. Mille nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expune stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine.

Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, 70701, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 7.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38, nr. 3 mai—iunie 1979

SUMAR

STUDII

pag.

I. ŞETEANU, V. COLIBAN, R. POPA, Analiza influenţei pulsaţiilor curgerii turbulente asupra erodării albiilor 357

N. MACOVEI, Curgerea unui fluid binghamian la deplasarea axială relativă a doi cilindri circulari coaxiali 371

MIRCEA T. ORĂŞANU, Asupra unei mişcări în prezenţa infiltraţiei 383

T. OROVEANU, B. SIRO, Asupra unor posibilităţi de optimizare a transportului succesiv de produse petroliere 393

D. FRANGOPOL, Optimizarea probabilistă cu valori discrete a structurilor metalice în domeniul plastic 419

CORNELIU BOB, VALENTIN BOTA, TUDOR CLIPII, Calculul dalelor ortotrope prin metoda fişiilor finite 425

T. SIRETEANU, O. GÜNDISCH, S. PĂRĂIAN, V. HORNEA, Influenţa reglajului caracteristicii de amortizare la viteze mici de lucru asupra confortului şi aderenţei roată-sol . . . 435

P. BRATU, Dinamica maşinilor compactoare vibratoare autopropulsate mixte 449

M. A. DUMBRAVĂ, Aprecieri asupra stabilirii caracterului curgerii într-un lagăr hidrostatic radial 465

ŞTEFAN STANCIU, Caracteristicile lagărelor radiale hidrostatice alimentate prin droselul capilar circumferenţial multiplu . . 471

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

ANALIZA INFLUENȚEI PULSAȚIILOR CURGERII TURBULENTE ASUPRA ERODĂRII ALBIILOR

de I. SETEANU
Institutul politehnic București
V. COLIBAN
Institutul de studii și proiectări hidroenergetice
R. POPA
Institutul politehnic București

Se prezintă un procedeu de studiu hidraulic al erodării locale a albiilor, aplicat la curgerea în bieful aval al centralelor hidroelectrice cu turbine cu ax orizontal. Valabilitatea ipotezelor admise a fost testată pe un model fizic. Regimul turbulent de curgere este analizat în cadrul schemei lui Reichardt. Se indică un procedeu de estimare a vitezei critice de inițiere a erodării și se studiază procesul nestaționar de afuiere. Rezultatele obținute urmăresc reducerea lungimii de consolidare a radierului aval al centralelor hidroelectrice.

1. INTRODUCERE

Regimul turbulent de curgere la ieșirea din aspiratorul turbinelor unei centrale hidroelectrice are o influență însemnată asupra erodării biefului aval atît datorită turbulenței libere a curentului la intrarea în statorul turbinei, cît și datorită vîrtejurilor induse de către rotor și echipamentul fix. Pentru combaterea erodării se prevede consolidarea radierului prin betonare sau prin risbermă mobilă (piatră, cuburi sau stabilopozi), în aval de aspiratoare, pînă la o distanță la care, datorită transferului turbulent de masă și de energie și ca urmare a disipării de energie, mărimea pulsațiilor turbulente nu mai este în măsură să provoace eroziuni care să pericliteze stabilitatea construcției. Dacă există garanția că modificarea patului albiei prin erodare este limitată și lentă, se poate optimiza lungimea consolidării și evita o eventuală supradimensionare a acesteia.

Problemele legate de eroziunea, transportul și depozitarea sedimentelor constituie unul dintre cele mai dificile și puțin studiate capitole ale hidraulicii, în special datorită numărului mare de parametri care influențează fenomenul de transport și datorită dificultăților de cercetare experimentală legate de scările mari ale geometriei procesului și ale timpului de desfășurare [1], [2].

În lucrarea de față se prezintă un procedeu de analiză a procesului de afuiere pornind de la caracteristicile specifice ale regimului hidraulic turbulent și se evaluează efectul său asupra unei albii necoezive.

Într-o lucrare viitoare se va expune o abordare fenomenologică a erodării terenurilor puternic coezive (roci marnoase) în vederea determinării profilului de echilibru.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 3, 1979, P. 357–369

2. REGIMUL HIDRAULIC DE CURGERE

În secțiunea inițială, la ieșirea din aspirator, se impune epura componentei orizontale a vitezei, împreună cu pulsațiile vitezei (cunoscute din experiența practică și încercările pe model), urmînd a se determina valorile acestora în restul domeniului de curgere.

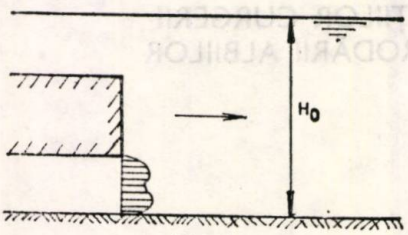


Fig. 1

Pentru o centrală obișnuită (la care disipatorul de energie este separat de bazinul de liniștire) se poate admite că suprafața liberă în bieful aval este practic plană și orizontală (fig. 1).

Ecuația lui Reynolds transcrisă în forma indicată de către Schlichting [3] este :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{U^2}) + \frac{\partial}{\partial y}\overline{(U \cdot V)} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \text{termenii vîscoși}, \tag{1}$$

iar ecuația de continuitate se scrie

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

În aceste relații, U și V sînt componentele vitezei la un moment dat (inclusiv pulsațiile), iar bararea semnifică medierea în timp.

Dintre relațiile semiempirice ale turbulenței care sînt folosite pentru completarea sistemului de ecuații ale lui Reynolds [4], în lucrarea de față s-a preferat modelul turbulent al lui Reichardt, generalizat de către Breusers [5], care prezintă avantaje remarcabile datorită posibilității de asimilare a curgerii cu mișcarea unui jet înecat.

Analizînd curgerea turbulentă liberă, Reichardt a observat că profilele experimentale ale vitezei longitudinale în cazul unui jet corespund satisfăcător soluției unei ecuații de tip difuzie pentru fluxul impulsului longitudinal $\rho \cdot \overline{U^2}$, la care se poate ajunge notînd

$$\overline{U \cdot V} = -\lambda(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\overline{U^2}. \tag{3}$$

Neglijînd termenii vîscoși și gradientul de presiune (turbulență liberă), se ajunge la ecuația clasică a difuziei :

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{U^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\overline{U^2}\right] = 0, \tag{4}$$

unde $\lambda(x)$ este un parametru experimental cu dimensiunea unei lungimi. Măsurătorile lui Liepmann și Laufer [6] au indicat că în stratul de amestec $\lambda = 0{,}0025 \cdot x$, iar pentru jetul bidimensional $\lambda = 0{,}0045 \cdot x$.

Pentru curgerea mărginită de frontiere solide, gradientul de presiune nu mai este nul. Dacă se poate neglija curbura liniilor de curent, gradientul transversal de presiune $\partial\bar{p}/\partial y$ este de asemenea foarte mic, iar ecuația lui Reynolds (1) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{p}}{\rho}+\overline{U^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{p}}{\rho}+\overline{U^2}\right)\right]=0, \tag{5}$$

unde ipoteza lui Reichardt (3) se admite implicit.

Este convenabil, în continuare, să se introducă funcția de sarcină

$$C=\frac{\bar{p}}{\rho}+\overline{U^2}, \tag{6}$$

pentru care relația (5) reprezintă ecuația de difuzie generalizată

$$\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x)\cdot\frac{\partial C}{\partial y}\right]=0. \tag{7}$$

Efectuînd schimbarea de variabilă pentru x și notînd

$$s=\int_0^x\lambda(x')\cdot\mathrm{d}x', \tag{8}$$

se obține ecuația clasică a difuziei

$$\frac{\partial C}{\partial s}-\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}=0. \tag{9}$$

Presiunea $\bar{p}$ se poate obține, dacă se cunoaște funcția de sarcină C, din ecuația de continuitate în formă integrală în care se neglijează pulsația u' în raport cu viteza medie $\bar{U}$,

$$\int_{y_1}^{y_2}\sqrt{C-\frac{\bar{p}}{\rho}}\cdot\mathrm{d}y=q, \tag{10}$$

unde y_1 și y_2 sînt ordonatele frontierelor (suprafață liberă și pat) într-o secțiune verticală, iar q este debitul pe unitatea de lățime.

La numere Froude mici (în cazul bazinului de liniștire $\mathcal{F}_r<0{,}2$), cînd suprafața liberă este aproximativ orizontală, se impun următoarele condiții la limită (fig. 2):

a) Pe suprafața liberă ($y=0$), viteza are doar componentă orizontală ($V=0$). Prin urmare

$$\overline{U\cdot V}=0 \quad \text{sau} \quad \frac{\partial C}{\partial y}=0. \tag{11}$$

b) Pe frontiera solidă (pat), unde $y = h(x)$, se poate scrie

$$V = U \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \qquad \text{sau}$$

$$-\left\{\lambda(x) \cdot \frac{\partial C}{\partial y}\right\} = \left\{\left(C - \frac{\bar{p}}{\rho}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right\} \quad \text{pentru } y = h(x) \tag{12}$$

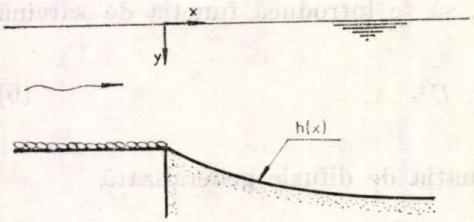


Fig. 2

deoarece $\overline{U \cdot V} = \overline{U^2} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$. Această condiție are loc în exteriorul stratului limită din vecinătatea frontierei solide și este justificată de existența macroturbulenței rugoase.

Asimilînd frontiera solidă reală cu o linie frîntă în trepte, se poate obține funcția de sarcină rezolvînd pas cu pas ecuația (9) pentru o lărgire bruscă de secțiune (fig. 3). În acest caz, după Crank [7], soluția analitică se scrie

$$C(x,y) = \frac{1}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{k^2 \cdot \pi^2 \cdot s}{h^2}} \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y}{h}\right) \cdot \int_0^h f'(\eta) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \eta}{h}\right) \cdot \mathrm{d}\eta, \tag{13}$$

unde $f'(y)$ reprezintă distribuția mărimii C în secțiunea $x = 0$.

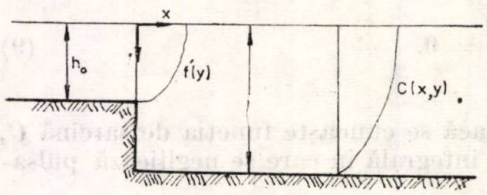


Fig. 3

În notație adimensională, punînd

$$C = C' \cdot C_0; \qquad x = x' \cdot h_0,$$

$$\lambda = \lambda' \cdot h_0; \qquad y = y' \cdot h_0,$$

$$p = p' \cdot \rho \cdot C_0; \quad h = h' \cdot h_0,$$

și omițînd în cele ce urmează indicele ('), se obține sistemul:

a) $x \geqslant 0 \qquad 0 \leqslant y \leqslant h(x),$

$$\frac{\partial C}{\partial x} - \lambda(x) \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 0, \tag{14}$$

b) $x = 0$

$$C = C(0, y) = f(y) \text{ cunoscut} \tag{15}$$

c) $y = h$

$$(C - p) \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \lambda(x) \cdot \frac{\rho C}{\partial y} = 0. \tag{16}$$

Debitul adimensional se obține din relația

$$q = \int_0^{h(x)} \sqrt{C - p} \cdot \mathrm{d}y. \tag{17}$$

Pentru profilul în trepte care aproximează configurația reală (fig. 4), condiția la limită în secțiunea $x = x_{n-1}$, $(n = x/\Delta x)$, unde $y = h_{n-1}$, se poate satisface admițînd că $C = p_{n-1}$, pentru $y \in (h_{n-1}, h_n)$. Soluția discretă (13) devine

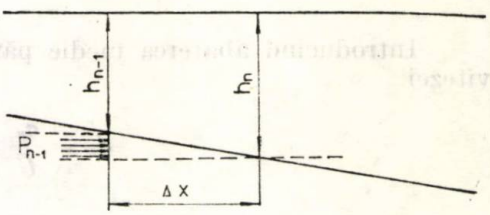


Fig. 4

$$C(n, y) = \frac{1}{h_n} \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\lambda \cdot k^2 \cdot \pi^2 \cdot \Delta x}{h_n^2}} \cdot$$

$$\cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot y}{h_n}\right) \cdot \left\{\int_0^{h_{n-1}} C(n-1, \eta) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot \eta}{h_n}\right) \mathrm{d}\eta + \right.$$

$$\left. + p_{n-1} \cdot (h_n - h_{n-1}) \cdot \cos\left(k \cdot \pi \cdot \frac{h_n + h_{n-1}}{2 \cdot h_n}\right)\right\}. \tag{18}$$

După Breusers [5], corespondența optimă cu datele experimentale se obține pentru

$$\lambda(x) = 0{,}01 + 0{,}004 \cdot x. \tag{19}$$

Se admite o distribuție verticală hidrostatică a presiunii în secțiunea transversală inițială ($x = 0$). Mărimea de calcul p din (17) reprezintă corecția presiunii în raport cu distribuția hidrostatică, deci în secțiunea inițială $p = 0$.

3. INIȚIEREA PROCESULUI DE EROZIUNE

Dacă regimul hidraulic de curgere corespunde macroturbulenței rugoase, granulele aluvionare sînt expuse direct curentului turbulent, iar substratul laminar este practic inexistent.

Criteriul de antrenare pentru o granulă se scrie

$$\frac{|D|}{W - L} = \operatorname{tg} \varphi, \tag{20}$$

unde $D = \tau_0 \cdot \alpha_1 \cdot d_e^2$ este forța de antrenare a granulei, $L = \lambda_0 \cdot \alpha_1 \, d_e^2$ este forța portantă, $W = (\gamma_s - \gamma) \cdot \alpha_2 \cdot d_e^3$ este greutatea imersă a acesteia, iar tg φ este coeficientul static de frecare. În relațiile de mai sus τ_0 și λ_0 sînt valorile instantanee corespunzătoare ale eforturilor tangențiale, α_1 și α_2 reprezintă factori de formă, iar d_e este diametrul eficace al granulei [8].

Relaţia (20) se mai poate scrie

$$|\tau_0| = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot d_e}{\left|\frac{\overline{\lambda_0}}{\overline{\tau_0}}\right| + \operatorname{ctg} \varphi}. \tag{21}$$

Introducînd abaterea medie pătratică adimensională a fluctuaţiei vitezei

$$S_u = \frac{\sigma_u}{\overline{U}} = \sqrt{\frac{\overline{u'^2}}{\overline{U}^2}},$$

se obţine, pentru efortul de antrenare $|\tau_0| = C_D \cdot \rho \cdot \frac{U^2}{2}$, relaţia

$$|\tau_0| = C_D \cdot \rho \cdot \frac{\overline{U}^2}{2} \cdot (1 + S_u \cdot n_0)^2, \tag{22}$$

unde $n_0 = u'/\sigma_u$. Valoarea medie temporală a efortului tangenţial este

$$|\tau_0| = C_D \cdot \rho \cdot \frac{\overline{U}^2}{2} \cdot (1 + S_u^2),$$

stfel că relaţia (22) devine

$$|\tau_0| = \frac{|\overline{\tau}_0|}{1 + S_u^2} \cdot (1 + S_u \cdot n_0)^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot d_e}{\frac{\overline{\lambda_0}}{|\overline{\tau_0}|} + \operatorname{ctg} \varphi}. \tag{23}$$

Dacă fluctuaţiile vitezei sînt distribuite după o lege normală, $S_u \approx 0{,}164$, iar din relaţia (23) rezultă că $|\tau_0|$ ia valori între $\pm \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot d_e}{\frac{\overline{\lambda_0}}{|\overline{\tau_0}|} + \operatorname{ctg} \varphi}$.

Pentru a cunoaşte limitele lui n_0, este necesar să se preestimeze probabilitatea de erodare (de obicei admisă 1%). Folosirea concretă a relaţiei (23) în condiţiile de incipienţă a mişcării necesită cunoaşterea raportului $\overline{\lambda_0}|\overline{\tau_0}|$ pentru granulele patului aluvionar.

După Christensen [9], distribuţia corectată a vitezei orizontale se scrie:

$$\frac{\overline{U}}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{29{,}6 \cdot y_v}{k_e} + 1\right), \tag{24}$$

unde y_v este cota deasupra patului teoretic, iar k_e este rugozitatea echi-

valentă. Deoarece $|\bar{\tau}_0| = \rho \cdot u_*^2$ și, după Einstein și El-Samni [10],

$$\bar{\lambda}_0 = C_L \cdot \frac{\rho}{2} \cdot U_{35}^2, \tag{25}$$

unde $C_L \approx 0{,}178$, iar U_{35} este viteza medie temporală măsurată la distanța $y_v = 0{,}35 \cdot d_t$ de patul teoretic, se obține, ținînd seama de relația (24),

$$\frac{\bar{\lambda}_0}{|\bar{\tau}_0|} = 0{,}556 \cdot \left[\ln\left(\frac{10{,}4}{r} + 1\right)\right]^2, \tag{26}$$

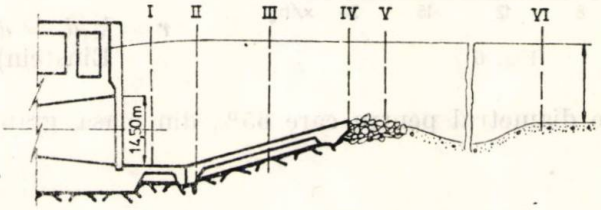
unde $r = k_e/d_e$.

Relația fundamentală (23) devine

$$|\bar{\tau}_c| = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \frac{(1 + S_u^2)}{(1 + n_0 \cdot S_u)^2} \cdot \frac{(\gamma_s - \gamma) \cdot d_e}{\operatorname{ctg} \varphi + 0{,}556 \cdot \left[\ln\left(\frac{10{,}4}{r} + 1\right)\right]^2}. \tag{27}$$

Se constată că efortul critic de antrenare depinde de caracteristicile terenului necoeziv și de parametrii turbulenței.

În cazul centralelor hidroelectrice cu turbine de tip bulb s-au determinat parametrii curgerii la ieșirea din aspiratoare pe un model experimental compus din două hidroagregate cu diametrul rotoarelor de 250 mm. Sistemul electronic de măsură, de tip DISA, folosește anemometrul cu fir cald, afișează valoarea medie pătratică locală a pulsației $\sigma_u = \sqrt{\overline{u'^2}}$ și permite calculul vitezei medii $\bar{U}$ (în același punct).



Sect.	I	II	III	IV	V	VI
x (m)	8.40	29,20	51,20	77,20	101,20	141,20
h (m)	20,25	18,80	13,60	7.00	6,60	6,60

Fig. 5

Intensitatea turbulenței se atenuează sensibil în prima parte a bazinului de liniștire atît în apropierea fundului (la 0,3 m de la pat), cît și în ansamblul secțiunii transversale (tabelul 1 și fig. 5).

Cercetările experimentale [11] au pus în evidenţă legătura dintre caracteristicile turbulenţei şi regimurile posibile de funcţionare ale hidroagregatului.

Tabelul 1

Secţiunea de măsură	Intensitatea turbulenţei (S_u)		
	la pat	minim pe verticală	maxim pe verticală
I	0,325	0,226	0,52
II	0,426	0,088	0,457
III	0,306	0,096	0,525
IV	0,279	0,279	0,355
V	0,252	0,157	0,289
VI	0,163	0,089	0,163

Prin reprezentarea mărimilor măsurate în funcţie de distanţa de la ieşirea din aspirator (raportată la viteza apei $\overline{U}_6$ şi la adîncimea curentului h_6 în secţiunea VI) se pune în evidenţă atenuarea turbulenţei pentru diverse regimuri de funcţionare ale hidroagregatelor exprimate prin turaţia dublu-unitară a turbinei (fig. 6)

$$n_1' = N \cdot \frac{D_t}{\sqrt{H}}, \tag{28}$$

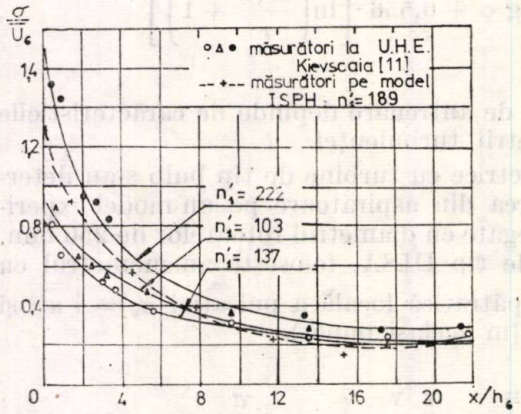


Fig. 6

unde N este turaţia, D_t — diametrul, iar H — sarcina turbinei.

În relaţia (27) se pot admite, prin urmare, pentru parametrii specifici, următoarele valori uzuale :

$S_u = 0{,}164$,

$n_0 = 3{,}09$ (pentru $p = 1\%$),

$\alpha_1 = 0{,}933$ (granule între cub şi hexaedru),

$\alpha_2 = \pi/6$ (granule sferice),

$r = k_e/d_e = d_{65\%}/d_e$ (după Einstein),

unde $d_{65\%}$ este diametrul pentru care 65% din masa granulelor patului au $d < d_{65\%}$.

4. AFUIEREA ALBIILOR ALUVIONARE. INFLUENŢA EFORTULUI CRITIC DE ANTRENARE

Folosind rezultatele din § 2, dacă patul albiei este fix (neerodabil), se poate determina spectrul vitezei longitudinale de curgere mediată în timp, în fiecare punct al secţiunii transversale, precum şi componentele tensorului pulsaţiilor turbulente $\overline{u'^2}$, $\overline{u' \cdot v'}$.

Efortul de antrenare turbulentă

$$\tau_0 = \rho \cdot \overline{u' \cdot v'} \tag{29}$$

acționează asupra granulelor de sediment, producînd antrenarea acestora în curent și inițierea procesului de transport, cînd este verificată inegalitatea

$$\tau_0 > \tau_c, \tag{30}$$

unde τ_c este dat de relația (27).

Întrucît în vecinătatea peretelui

$$\frac{\overline{U}}{u_*} = 2{,}5 \cdot \ln\left(\frac{10{,}4 \cdot d_e}{d_{65\%}} + 1\right), \tag{31}$$

se obține

$$u_*^2 = \frac{\overline{U^2} \cdot \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}}{1 + 6{,}25 \cdot \left\{\ln\left(\dfrac{10{,}4 \cdot d_e}{d_{65\%}} + 1\right)\right\}^2 \cdot \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}} \tag{32}$$

ținînd seama că

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \overline{u' \cdot v'} = \overline{U \cdot V} - \overline{U} \cdot \overline{V} = \overline{U^2} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - \overline{U}^2 \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$$

și

$$\tau_0 = \rho \cdot u_*^2 \qquad \text{prin definiție.}$$

În deducerea relației (32) s-a folosit condiția la limită (12). Viteza reală de frecare pe pat u_* urmează să fie comparată cu viteza de frecare critică.

Unghiul de frecare φ se determină, după Lane [12], folosind diagrama din figura 7.

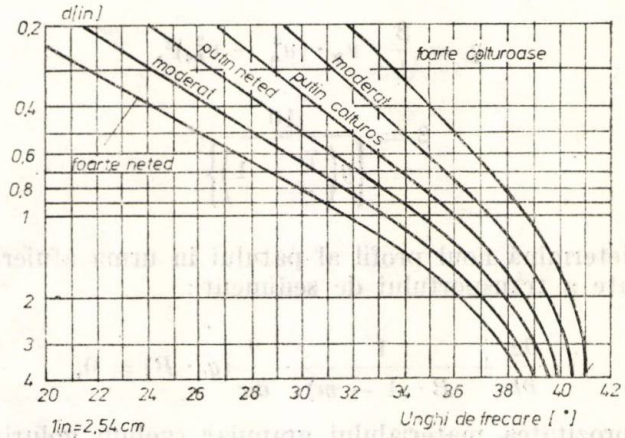


Fig. 7

Pulsaţiile normalizate S_u se scriu

$$S_u^2 = \frac{\overline{(U-\bar{U})^2}}{\bar{U}^2} = \frac{\overline{U^2}}{\bar{U}^2} - 1 = \frac{1}{A \cdot \dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}}, \tag{33}$$

$$A = 6{,}25 \cdot \left\{ \ln\left(\frac{10{,}4 \cdot d_e}{d_{65\%}} + 1 \right) \right\}^2,$$

iar viteza critică de frecare se scrie

$$u_{*c}^2 = \frac{\tau_c}{\rho} = \frac{5{,}505 \cdot \left(\dfrac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) \cdot d_e}{\operatorname{ctg} \varphi + 0{,}089 \cdot A} \cdot \frac{1 + \dfrac{1}{A \cdot (\mathrm{d}h/\mathrm{d}x)}}{\left(1 + \dfrac{3{,}09}{\sqrt{A \cdot (\mathrm{d}h/\mathrm{d}x)}} \right)^2}. \tag{34}$$

De exemplu, pentru $\varphi = 20°$, $U = 0{,}69$ m/s, $d_e = 2{,}5$ mm, $d_{65\%} = 8$ mm, $\mathrm{d}h/\mathrm{d}x = 3‰$ şi $\gamma_s/\gamma = 2{,}65$, se obţine $A = 13{,}085$, $u_* = 0{,}0369$ m/s, iar $u_{*c} = 0{,}0253$ m/s ($< u_*$, astfel că afuierea are loc în secţiunea considerată).

5. ALGORITMUL DE CALCUL. REZULTATE

a) Se determină regimul hidraulic de curgere în toate secţiunile transversale de calcul, rezultînd vitezele medii în timp şi eforturile de antrenare τ_0 pe pat. Se deduc vitezele de frecare u_*.

b) Se compară u_* cu viteza de frecare critică u_{*c} specifică secţiunii considerate la un moment dat. Dacă $u_* > u_{*c}$ se calculează debitul total q_t de sediment transportat pe unitatea de lăţime cu relaţia lui Kalinske [13]:

$$q_t = \frac{\beta}{d_e} \cdot u_* \cdot (u_*^2 - u_{*c}^2)^2, \tag{35}$$

$$\beta = \frac{10}{\left\{ g\left(\dfrac{\gamma_s}{\gamma} - 1 \right) \right\}^2}.$$

c) Se determină noul profil al patului în urma afuierii cu ecuaţia de continuitate a transportului de sediment:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B \cdot (1-m)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(q_t \cdot B) = 0, \tag{36}$$

unde m = porozitatea materialului granular (volum goluri/volum total sediment), iar B = lăţimea secţiunii transversale.

În vederea evitării apariției unei instabilități de calcul la integrarea prin diferențe finite a relației (36), s-a utilizat un procedeu de stabilizare de tip Lax-Wendroff, folosit de unul dintre autori în [1], prin care se introduce în schema numerică un coeficient de pondere

$$\alpha = 0{,}01 + \left(5 \cdot \frac{q_t}{q} \cdot U \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2. \tag{37}$$

Pentru obținerea rezultatelor numerice s-a elaborat un program de calcul în limbajul de programare FORTRAN IV. Soluția ecuației integrale (10) s-a obținut prin metoda bisecției generalizată.

Pentru ilustrare, în tabelul 2 și figurile 8 *a* și 8 *b* se indică selectiv rezultatele obținute pentru $dh/dx = 6‰$, $d_e = 6$ mm și 3 mm, $d_{65\%} =$ 5 mm și 10 mm, ctg $\varphi = 2{,}24$ ($\varphi \approx 24°$), $\Delta x = 5$ m, $\Delta t = 1$ zi.

Tabelul 2

$d_e = 6$ mm ; $d_{65\%} = 10$ mm

Secțiunea	1 (baraj)	5	10	15	20	25
$T = 0$ z	20,00000	19,87999	19,73000	19,57999	19,42999	19,28000
U_f	0,88456	0,87716	0,87802	0,87323	0,86730	0,86235
$T = 3$ zile z	20,00000	19,87991	19,72992	19,57993	19,42995	19,27995
U_f	0,88468	0,87716	0,87801	0,87324	0,86730	0,86235
$T = 6$ zile z	20,00000	19,87985	19,78984	19,57985	19,42987	19,27988
U_f	0,88466	0,87716	0,87801	0,87323	0,86730	0,86235
$T = 9$ zile z	20,00000	19,87979	19,72978	19,57979	19,42881	19,27980
U_f	0,88463	0,87716	0,87801	0,87322	0,86729	0,86358
			$d_e = 3$ mm ; $d_{65\%} = 5$ mm			
$T = 0$ z	20,00000	19,87849	19,72849	19,57851	19,42854	19,27858
U_f	2,65368	2,63148	2,63406	2,61970	2,60189	2,58706
$T = 1$ zi z	20,00000	19,87698	19,72696	19,57701	19,42708	19,27713
U_f	2,65254	2,63125	2,63379	2,61949	2,60172	2,58687
$T = 2$ zile z	20,00000	19,87546	19,72543	19,57550	19,42561	19,27568
U_f	2,65086	2,63104	2,63359	2,61927	2,60154	2,58666
$T = 3$ zile z	20,00000	19,87395	19,72389	19,57401	19,42415	19,27423
U_f	2,64900	2,63082	2,63340	2,61911	2,60135	2,58647

Compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale s-a dovedit satisfăcătoare în limitele impuse de către corectitudinea modelării fizice și de precizia măsurătorilor. Întrucît în expresia vitezei critice (34) s-a admis că pulsațiile turbulente au o distribuție probabilistă de tip Gauss ($S_u = 0{,}164$), rezultatele analitice obținute corespund procesului de eroziune la oarecare distanță de aspiratorul turbinei. Din figura 6 și tabelul 1 se constată că $S_u \approx 0{,}164$ începînd cu secțiunea VI (fig. 5). Între secțiu-

nile I—VI curgerea are un caracter pronunțat de jet înecat, iar analiza teoretică corespunzătoare va face obiectul unei lucrări ulterioare.

Primită la redacție la 20 decembrie 1978

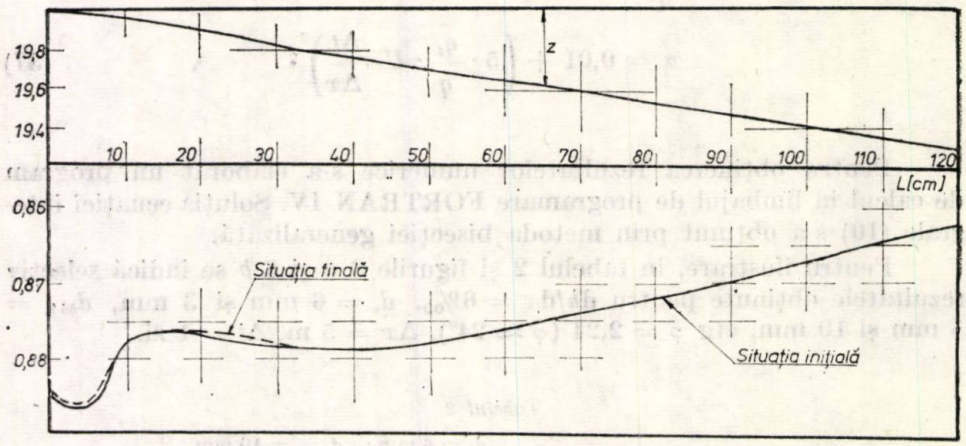


Fig. 8a

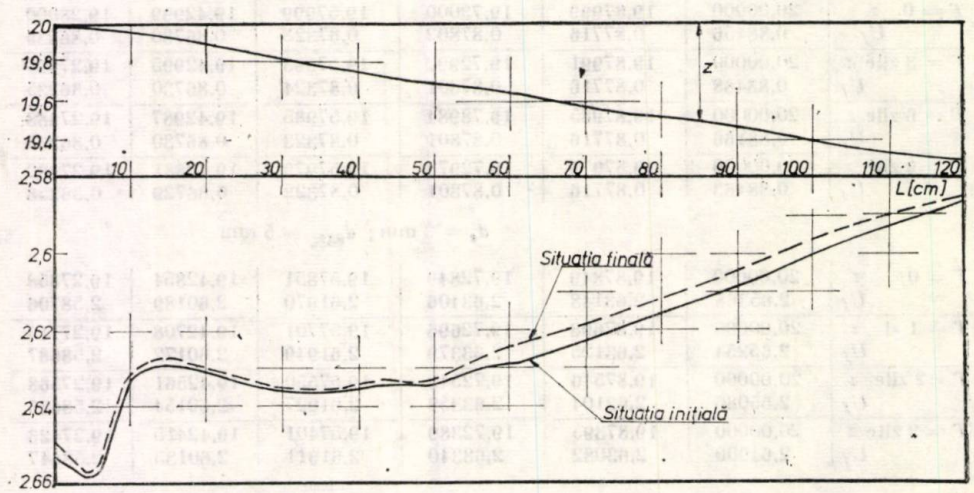


Fig. 8b

BIBLIOGRAFIE

1. A. Diacon și I. Seteanu, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. I. Efectul modificării profilului transversal al curgerii*, Șt. cerc. mec. apl., **35**, *1* (1976).
2. I. Seteanu și P. Popa, *Transportul aluviunilor în regim nepermanent. II. Efectul formei secțiunii transversale a curgerii*, St. cerc. mec. apl., **38**, *2* (1979).

3. H. SCHLICHTING, *Boundary layer theory*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1960
4. B. E. LAUNDER, D. B. SPALDING, *Mathematical Models of Turbulence*, Academic Press, New York, 1972.
5. H. BREUSERS, *Computation of velocity profiles in scour holes*, 16 th IAHR Congress, Sao Paulo, Brasil, vol. II, 1975.
6. H. W. LIEPMANN, J. LAUFER, *Investigations of turbulent mixing*, NACA TN Report nr. 1257, 1947.
7. J. C. CRANK, *The mathematics of diffusion*, Oxford University Press, New York, 1956.
8. A. CHRISTENSEN, *Effective grain-size in sediment transport*, 13th IAHR Congress, Kyoto, Japan, vol. III, 1969.
9. A. CHRISTENSEN *Incipient motion on cohesionless channel banks* in SEDIMENTATION (Shen, H. W., editor), Proc. of Sympos. to Honor Prof. H. A. Einstein, Fort Collins, Colorado, 1972.
10. H. A. EINSTEIN, E. A. El-SAMNI, *Hydrodynamic forces on a rough wall*, Reviews of Modern Physics, vol. 21, no. 3, July, 1949.
11. S. M. SLISKII, *Ghidravlika zdanii ghidroelektrostanții*, Energhia, Moscova, 1970.
12. E. W. LANE, *Progress Report on studies on the design of stable channels of the Bureau of Reclamation*, Proc. ASCE, vol. 79, 1953.
13. W. H. GRAFF, *Hydraulics of sediment transport*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1971.

CURGEREA UNUI FLUID BINGHAMIAN LA DEPLASAREA AXIALĂ RELATIVĂ A DOI CILINDRI CIRCULARI COAXIALI

de N. MACOVEI
Institutul de petrol şi gaze, Ploieşti

Sînt studiate distribuţiile de viteză şi de tensiuni, precum şi variaţiile de presiune care apar la deplasarea relativă, longitudinală, a doi cilindri circulari coaxiali, plini cu un fluid de tipul Bingham. Este analizată doar mişcarea laminară, staţionară. Lucrarea conţine nomograme ce permit stabilirea variaţiilor de presiune în raport cu viteza de deplasare şi profilul vitezelor de curgere.

Studierea problemei enunţată în titlu prezintă, pe lîngă un interes teoretic, fundamental, şi o mare importanţă practică. Mişcarea fluidului de foraj provocată de introducerea sau extragerea garniturii de prăjini dintr-o sondă este însoţită de apariţia unor suprapresiuni, respectiv depresiuni, cu consecinţe neplăcute şi, uneori, chiar dezastruase. Astfel, depăşirea presiunii de fisurare a formaţiunilor traversate atrage după sine pătrunderea noroiului în fisurile formate, ajungîndu-se pînă la o pierdere completă a circulaţiei. Invers, scăderea presiunii din sondă sub valoarea celei a fluidelor cantonate în porii rocilor poate declanşa o manifestare a sondei, care, dacă nu este controlată, degenerează într-o erupţie liberă. Fenomenul este accentuat îndeosebi la introducerea coloanelor de tubare cu spaţii inelare reduse şi la utilizarea unor fluide cu valori ridicate ale parametrilor reologici. S-au semnalat, în acest caz, chiar şi turtiri de coloană.

Din aceste motive, problema a atras numeroşi cercetători, soluţiile propuse fiind verificate experimental în condiţii industriale [1 — 6 ş.a.]. Ea constă, în esenţă, în stabilirea unei relaţii de calcul a presiunilor suplimentare dacă se cunosc : configuraţia geometrică, proprietăţile fluidului şi viteza de deplasare. Majoritatea soluţiilor cunoscute constau în aplicarea formulei Darcy-Weissbach, deosebirea constînd în modul de apreciere a vitezei medii „efective" de curgere a fluidului.

În cele ce urmează se încearcă o soluţie exactă a problemei, prin integrarea sistemului de ecuaţii generale a mişcării unui fluid vîscoplastic de tipul binghamian.

Reamintim că ecuaţiile constitutive care descriu comportarea unui fluid binghamian la o forfecare simplă sînt :

$$\dot{\gamma} = 0 \qquad \text{dacă } \tau \leqslant \tau_0, \text{ starea rigidă,} \tag{1}$$

$\tau = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma}$ dacă $\tau > \tau_0$, curgerea vîscoplastică, (2),

unde $\dot{\gamma}$ reprezintă viteza de deformare;

τ — tensiunea de forfecare;

τ_0 — o tensiune critică sub a cărei valoare nu apar deformații semnificative, nu are loc curgerea; se numește deobicei tensiune dinamică de forfecare;

η_p — vîscozitatea plastică a fluidului.

Ecuațiile de mișcare a unui fluid incompresibil cu vîscozitatea variabilă, de tipul stockesian, sînt:

$$\frac{dv_i}{dt} = F_i - \frac{1}{\rho}[p_{,i} + \eta v_{i,jj} + \eta_{,j}(v_{i,j} + v_{j,i})], \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

în care v_i sînt componentele vitezei pe trei direcții ortogonale x_i;

F_i — componentele forțelor unitare masice;

p — presiunea;

η — vîscozitatea aparentă.

Notația $p_{,i}$ reprezintă derivata lui p în raport cu variabila x_i.

Pentru fluide de tip Bingham, explicitînd pe $\eta = \eta_p + \mu$, ecuațiile (3) devin:

$$\frac{dv_i}{dt} = F_i - \frac{1}{\rho}[p_{,i} + (\eta_p + \mu)v_{i,jj} + \mu_{,j}(v_{i,j} + v_{j,i})], \quad i = 1, 2, 3, \tag{4}$$

cunoscute sub numele de ecuațiile lui Hencky [7].

S-a utilizat notația

$$2\mu = \frac{\tau_0}{D} = \frac{\tau_0}{\sqrt{\frac{a_{ij}a_{ij}}{2}}}, \tag{5}$$

unde

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \tag{6}$$

sînt componentele tensorului vitezei de deformare.

Dacă la ecuațiile (3) sau (4) se adaugă și ecuația de continuitate, pentru fluide incompresibile,

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{7}$$

și, eventual, variațiile în spațiu ale parametrilor τ_0 și η_p, cu anumite condiții inițiale și la limită se pot obține distribuțiile de viteză și presiune, precum și starea de tensiune din domeniul de curgere.

În coordonate cilindrice, z, r, θ, ecuațiile (3) și (7) iau forma [7]:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_r +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left\{ - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[2\frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial r} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)\frac{\partial \eta}{r\partial \theta} + \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]\right\}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = F_\theta +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left\{ - \frac{\partial p}{r\partial \theta} + \eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + 2\frac{\partial v_\theta}{r\partial \theta}\frac{\partial \eta}{r\partial \theta} + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]\right\}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = F_z +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\left\{ - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\frac{\partial \eta}{\partial r} + \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \eta}{r\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]\right\}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Fie, așadar, doi cilindri coaxiali în care se află un fluid de tip Bingham (fig. 1). Tubul exterior cu raza interioară R_2 este fix și obturat la capătul inferior. Tubul interior cu raza exterioară R_1 și cea interioară R_0 se deplasează longitudinal în sensul axei z cu o viteză constantă v_T. Fluidul dezlocuit de tubul mobil va avea o mișcare ascendentă prin cei doi cilindri.

În afara ipotezei de incompresibilitate a fluidului mai presupunem că mișcarea este : 1) staționară ; 2) uniformă ; 3) izotermă ; 4) laminară și : 5) liniile de curent sînt paralele la axa tuburilor ; 6) fluidul aderă la pereți ; 7) tubul mobil este suficient de lung pentru a neglija efectele de capăt ; 8) singurele forțe de masice sînt cele provocate de gravitație.

Potrivit acestor ipoteze, condițiile și proprietățile fluidului (densitatea, vîscozitatea, temperatura, viteza, presiunea) rămîn neschimbate în timp (1) și pe direcția de curgere — cu excepția presiunii — în orice punct (2). Conform ipotezei (6), viteza la pereți este egală cu viteza acestora. Presupunerea curgerii uniforme implică de fapt incompresibilitatea, iar ipoteza (5) este posibilă numai dacă viteza pereților are doar componente de-a lungul tuburilor.

Ipoteza (5) implică faptul că $v_r = v_\theta = 0$: sigura componentă nenulă a vitezei este $v_z = v$. Ecuația de continuitate se rezumă la

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

de unde $v \neq v(z)$. Din motive de simetrie axială este rezonabil să presupunem că v nu depinde nici de θ, ci doar de r.

Ecuațiile de mișcare (8—10) devin :

$$F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \tag{13}$$

$$F_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \theta} = 0, \tag{14}$$

$$F_z + \frac{1}{\rho}\left[-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial r}\right] = 0. \tag{15}$$

Forța masică unitară este egală cu accelerația gravitațională (ipoteza 8). Componentele ei pe un sistem de axe x_i sînt $g\cos\alpha_i = -g\dfrac{\partial h}{\partial x_i}$, unde h reprezintă înălțimea față de o linie de referință, iar semnul minus denotă faptul că accelerația gravitațională are sensul invers față de cel de creștere a înălțimii.

Cu schimbarea de variabilă

$$p' = p + \rho g h, \tag{16}$$

ecuațiile (13—15) iau forma :

$$\frac{\partial p'}{\partial r} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{\partial p'}{r\partial \theta} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial \eta}{\partial r}. \tag{19}$$

Din primele două ecuații rezultă că funcția p' este independentă de coordonatele r și θ. Din ultima ecuație, deoarece expresia din dreapta nu depinde de z — curgere uniformă —, avem

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \text{const.} = P. \tag{20}$$

Gradientul P este constant de-a lungul direcției de curgere. Într-un fluid în repaus, cu $\rho g = \text{const.}$, termenul din dreapta ecuației (19) fiind nul, funcția $p' = p + \rho g h$ este independentă de poziție.

Deoarece singura componentă nenulă a tensorului vitezei de deformare este

$$a_{rz} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}, \tag{21}$$

atunci

$$D = \sqrt{d_{rz}^2} = \pm\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}. \tag{22}$$

și vîscozitatea aparentă a fluidelor binghamiene

$$\eta = \eta_p + \frac{\tau_0}{\pm\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}} = \eta_p + s\frac{\tau_0}{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}}. \tag{23}$$

S-a notat : $s = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}_r}\right)$.

Dacă înlocuim în (19) și utilizăm derivatele totale (η și v sînt funcții doar de r) obținem ecuațiile de mișcare :

$$\eta_p\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) + s\frac{\tau_0}{r} - P = 0 \tag{24}$$

cu $s = \pm 1$.

Condițiile la limită, pentru problema noastră :

$$v = v_T \qquad \text{la } r = R_0, \tag{25}$$

$$v = v_T \qquad \text{la } r = R_1, \tag{26}$$

$$v = 0 \qquad \text{la } r = R_2. \tag{27}$$

În plus, într-o secțiune oarecare, suma debitului de fluid ce curge ascendent prin cele două canale formate și a „debitului" de metal ce se

deplasează descendent trebuie să fie nulă :

$$Q + \pi(R_1^2 - R_0^2)\, v_T = 0. \tag{28}$$

La condițiile de mai sus se adaugă și cele de pe suprafețele de plasticitate, necunoscute încă, ce delimitează domeniile în care nu are loc o forfecare a fluidului, deoarece $|\tau| \leqslant \tau_0$, de cele în care fluidul este forfecat, și anme :

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{S_p} = 0 \qquad \text{sau} \qquad |\tau| = \tau_0. \tag{29}$$

La deplasarea tubului mobil în sensul axei z, fluidul din interior se mișcă în sens contrar în raport cu tubul. Viteza lui crește, în valoare algebrică, de la centru spre peretele tubului. Așadar, $s = \text{sgn}\,(dv/dr) = +1$. Prin integrarea ecuației (24) cu condiția (25) rezultă :

$$v = -\frac{P_1}{4\eta_p}(R_0^2 - r^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(R_0 - r) + v_T. \tag{30}$$

P_1 este gradientul funcției p' în tubul mobil.

Relația de mai sus oferă distribuția de viteze în interiorul cilindrului mobil, dar numai în domeniul în care $dv/dr \neq 0$. Există însă o regiune, delimitată de suprafața de plasticitate, unde $dv/dr = 0$, adică $v = v_0 =$ const. Fluidul din această regiune se deplasează ca un rigid, fără deformări interioare. În spațiul tensiunilor ecuația suprafeței de plasticitate este $|\tau| = \tau_0$.

Distribuția vitezei de deformare, din (30), este

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P_1 r}{2\eta_p} - \frac{\tau_0}{\eta_p}. \tag{31}$$

Utilizînd (23), distribuția de tensiuni va fi

$$\tau = \eta\frac{dv}{dr} = \eta_p\frac{dv}{dr} + \tau_0 = \frac{P_1 r}{2}. \tag{32}$$

Această distribuție, liniară, este valabilă în tot domeniul de curgere. De altfel, ea este independentă de natura fluidului și poate fi obținută direct din ecuațiile de mișcare scrise în tensiuni (ecuațiile lui Cauchy).

Din (31), pentru $dv/dr = 0$, rezultă

$$r_0 = \frac{2\tau_0}{P_1}, \tag{33}$$

ceea ce constituie ecuația unui cilindru circular. Există, așadar, un „miez" cilindric de rază r_0, concentric cu tubul, în interiorul căruia tensiunea de forfecare este inferioară tensiunii critice τ_0 și unde nu au loc deformări.

Din condiția de continuitate a vitezei în tot domeniul, rezultă viteza dopului rigid :

$$v_0 = -\frac{P_1}{4\eta_p}(R_0^2 - r_0^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(R_0 - r_0) + v_T. \tag{34}$$

În spațiul inelar dintre cei doi cilindri, fluidul se mișcă, de asemenea, ascendent și semnele vitezei de deformare vor fi : -1 în vecinătatea tubului interior și $+1$ în apropierea celui exterior. Continuitatea vitezelor sugerează ideea că trecerea de la $dv/dr > 0$ la $dv/dr < 0$ se realizează prin zero. Dar acest fapt nu implică existența unui maxim, ci a unei regiuni inelare neforfecate, care se deplasează ca un rigid între două domenii de curgere vîscoplastică.

Integrînd ecuațiile (24) în cele două domenii, cu condițiile la limită (26) și, respectiv, (27) obținem :

$$v_1 = \frac{P_2}{4\eta_p}(r^2 - R_1^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(r - R_1) - \frac{A_1}{\eta_p}\ln\frac{r}{R_1} + v_T, \quad R_1 \leqslant r \leqslant r_1, \tag{35}$$

$$v_2 = -\frac{P_2}{4\eta_p}(R_2^2 - r^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(R_2 - r) + \frac{A_2}{\eta_p}\ln\frac{R_2}{r}, \quad r_2 \leqslant r \leqslant R_2. \tag{36}$$

P_2 reprezintă gradientul funcției p_2' din spațiul inelar, A_1 și A_2 sînt două constante de integrare, iar cu r_1 și r_2 s-au notat razele dopului rigid inelar (fig. 1). Viteza acestuia se obține fie din (35) cu $r = r_1$, fie din (36) cu $r = r_2$.

Vitezele de deformare în cele două regiuni :

$$\frac{dv_1}{dr_1} = \frac{P_2 r}{2\eta_p} + \frac{\tau_0}{\eta_p} - \frac{A_1}{\eta_p}\frac{1}{r}, \tag{37}$$

$$\frac{dv_2}{dr_2} = \frac{P_2 r}{2\eta_p} - \frac{\tau_0}{\eta_p} - \frac{A_2}{\eta_p}\frac{1}{r}. \tag{38}$$

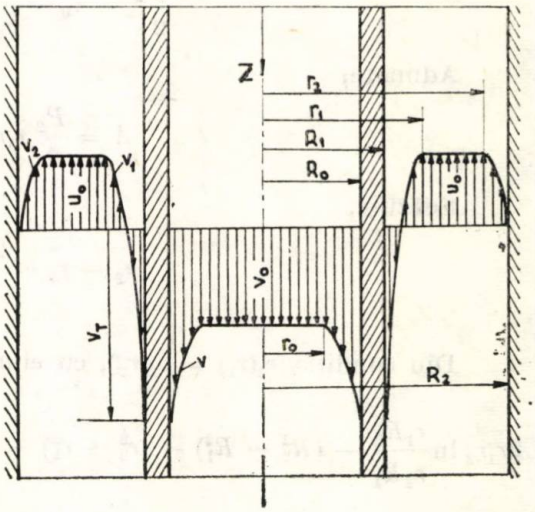


Fig. 1

Utilizînd (23), rezultă :

$$\tau_1 = \frac{P_2 r}{2} - \frac{A_1}{r}, \tag{39}$$

$$\tau_2 = \frac{P_2 r}{2} - \frac{A_2}{r}. \tag{40}$$

Se poate demonstra că $A_1 = A_2$ și distribuția de tensiuni are o formă unică în tot domeniul, inclusiv cel neforfecat. Într-adevăr, scriind condiția de echilibru a întregului domeniu dintre cele două tuburi ca o egalitate între forțele de presiune și cele de forfecare la pereți, avem :

$$\pi(R_2^2 - R_1^2)\, P_2 = 2\pi \left[- R_1 \left(\frac{P_2 R_1}{2} - \frac{A_1}{R_1} \right) + R_2 \left(\frac{P_2 R_2}{2} - \frac{A_2}{R_2} \right) \right], \quad (41)$$

adică

$$(R_2^2 - R_1^2)\, P_2 = (R_2^2 - R_1^2)\, P_2 + 2A_1 - 2A_2. \quad (42)$$

Prin urmare, $A_1 = A_2 = A$ (tensiunile τ_1 s-au luat cu semn schimbat și anume cele care acționează pe suprafața fluidului de normală $-r$; relațiile (39) și (40) oferă tensiunile tangențiale pe suprafețele de normală r).

Condiția (29) scrisă pe cele două suprafețe de plasticitate — cilindri cu raza r_1 și, respectiv, r_2 — ne conduce la

$$\frac{P_2 r_1}{2} + \tau_0 - \frac{A}{r_1} = 0, \quad (43)$$

$$\frac{P_2 r_2}{2} - \tau_0 - \frac{A}{r_2} = 0. \quad (44)$$

Adunate,

$$A = \frac{P_2}{2} r_1 r_2. \quad (45)$$

Scăzute,

$$r_2 - r_1 = \frac{2\tau_0}{P_2}. \quad (46)$$

Din condiția $v_1(r_1) = v_2(r_2)$, cu eliminarea lui A, obținem

$$2r_1 r_2 \ln \frac{r_1 R_2}{r_2 R_1} - (R_2^2 - R_1^2) - (r_2^2 - r_1^2) + 2(R_1 + R_2)(r_2 - r_1) - \frac{4\eta_p}{P_2} v_T = 0. \quad (47)$$

Debitul de fluid ce curge prin cele două spații

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^{R_0} v(r) r \mathrm{d}r + \pi r_0^2 v_0 + 2\pi \int_{R_1}^{r_1} v_1(r) r \mathrm{d}r + \pi(r_2^2 - r_1^2) u_0 + 2\pi \int_{r_2}^{R_2} v_2(r)\, r \mathrm{d}r . \quad (48)$$

După integrare, reducerea termenilor asemenea și unele transfor-

mări, avem

$$Q = \frac{\pi P_1}{8\eta_p}\left(-R_0^4 - \frac{16}{3}\frac{\tau_0^4}{P_1^4} + \frac{8}{3}\frac{\tau_0 R_0^3}{P_1}\right) + \pi R_0^2 v_T + \frac{\pi P_2}{8\eta_p}\Big[-(R_2^4 - R_1^4) +$$

$$+ 2r_1r_2(R_2^2 - R_1^2) + \frac{4}{3}(r_2 - r_1)(R_1^3 + R_2^3) - \frac{1}{3}(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^3\Big] - \pi R_1^2 v_T. \tag{49}$$

Dacă se introduce această expresie în (28) obţinem o nouă relaţie între r_1 şi r_2.

Să vedem mai întîi ce corelaţie există între P_1 şi P_2. Din (16) şi (20) se pot determina presiunile în tubul interior şi în spaţiul inelar. Pentru tuburi verticale :

$$p_1 = P_1 z + \rho_1 g z, \tag{50}$$

$$p_2 = P_2 z + \rho_2 g z. \tag{51}$$

Coordonata z este măsurată de la capătul superior al tubului mobil. Dar la capătul lui inferior, $p_1 = p_2$ şi rezultă

$$P_1 = P_2\frac{H_2}{H_1} + g\left(\rho_2\frac{H_2}{H_1} - \rho_1\right). \tag{52}$$

Ne vom situa în cazul cel mai simplu, în care $\rho_1 = \rho_2$ şi înălţimea coloanelor de fluid în cele două spaţii $H_1 = H_2$. Se remarcă imediat că $P_1 = P_2 = P$. În relaţiile (50) şi (51), cum cel de-al doilea termen din partea dreaptă reprezintă presiunea hidrostatică, primul termen constituie tocmai presiunea suplimentară provocată de mişcarea ţevilor interioare. La introducere P este pozitiv —are loc o suprapresiune, care creşte liniar cu adîncimea —, iar la extragere P este negativ — este provocată o depresiune.

Condiţia (28) devine

$$R_0^4 + \frac{16}{3}\frac{\tau_0^4}{P^4} - \frac{8}{3}\frac{\tau_0 R_0^3}{P} + (R_2^4 - R_1^4) - 2r_1r_2(R_2^2 - R_1^2) -$$

$$- \frac{4}{3}(r_2 - r_1)(R_1^3 + R_2^3) + \frac{1}{3}(r_2 - r_1)(r_1 + r_2)^3 = 0. \tag{53}$$

Problema pusă presupune rezolvarea simultană a ecuaţiilor (46), (47) şi (53), eliminarea necunoscutelor r_1 şi r_2 şi obţinerea unei relaţii $P = P(v_T)$.

În cazul fluidelor newtoniene, $\tau_0 = 0$. Din (46), $r_1 = r_2 = r_m$, iar relaţiile (47) şi (53) devin :

$$2r_m^2 \ln\frac{R_1}{R_2} - (R_2^2 - R_1^2) - \frac{4\eta_p}{P} v_T = 0, \tag{54}$$

$$R_0^4 + R_2^4 - R_1^4 - 2r_m^2(R_2^2 - R_1^2) = 0. \tag{55}$$

Rezolvînd sistemul,

$$r_m = \sqrt{\frac{R_0^4 + R_2^4 - R_1^4}{2(R_2^2 - R_1^2)}}, \tag{56}$$

$$P = \frac{4\eta_p(R_2^2 - R_1^2)v_T}{(R_0^4 + R_2^4 - R_1^4)\ln\dfrac{R_2}{R_1} - (R_2^2 - R_1^2)^2}. \tag{57}$$

Aşadar, presiunea suplimentară variază liniar cu viteza tubului mobil. La extragere, relaţia este aceeaşi, dar valoarea este negativă. În cazul tuburilor obturate se ia $R_0 = 0$; raza r_m devine o medie geometrică între R_1 şi R_2.

Revenind la fluidele binghamiene, introducem mărimile adimensionale:

$$\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_2},\ \bar{R} = \frac{R_1}{R_2},\ \bar{r}_1 = \frac{r_1}{R_2},\ \bar{r}_2 = \frac{r_2}{R_2},\ \bar{P} = \frac{PR_2}{2\tau_0},\ \bar{v}_T = \frac{\eta_p v_T}{\tau_0 R_2}.$$

Cu aceasta, relaţiile (47) şi (53) iau forma:

$$2\bar{r}_2\bar{P}(\bar{P}\bar{r}_2 - 1)\ln\frac{\bar{P}\bar{r}_2 - 1}{\bar{P}\bar{r}_2\bar{R}} - \bar{P}^2(1 - \bar{R}^2) -$$

$$- (2\bar{r}_2\bar{P} - 1) + 2(1 + \bar{R})\bar{P} - 2\bar{v}_T\bar{P} = 0, \tag{58}$$

$$\bar{R}_0^4\bar{P}^4 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\bar{R}_0^3\bar{P}^3 + (1 - \bar{R}^4)\bar{P}^4 - 2\bar{r}_2\bar{P}^3(\bar{P}\bar{r}_2 - 1)(1 - \bar{R}^2) -$$

$$- \frac{4}{3}(1 + \bar{R}^3)\bar{P}^3 + \frac{1}{3}(2\bar{r}_2\bar{P} - 1)^3 = 0. \tag{59}$$

Cele două ecuaţii pot fi rezolvate numeric pentru diverse valori ale lui $\bar{R}_0$, $\bar{R}$ şi $\bar{P}$. În figurile 2 şi 3 este soluţionată problema în cazul tuburilor obturate: în relaţia (59) primii trei termeni s-au luat egali cu zero.

Pentru tuburi libere, relaţiile de mai sus sînt valabile numai dacă curgerea are loc după profilele din figura 1. Dacă una dintre valorile R_0 şi $R_2 - R_1$ este mică în raport cu cealaltă este probabil ca mişcarea prin unul dintre cele două canale să nu aibă loc.

Exemplu. O coloană de burlane cu diametrul exterior $D_c = 219$ mm şi lungimea $L = 2000$ m se introduce cu viteza de 1 m/s într-o sondă cu diametrul $D_s = 295$ mm. Coloana este echipată cu şiu cu valvă. Fluidul de foraj din sondă are proprietăţile reologice $\eta_p = 30$ cP şi $\tau_0 = 8$ N/m^2, iar densitatea $\rho_n = 1500$ kg/m^3. Care este presiunea la capătul inferior al coloanei?

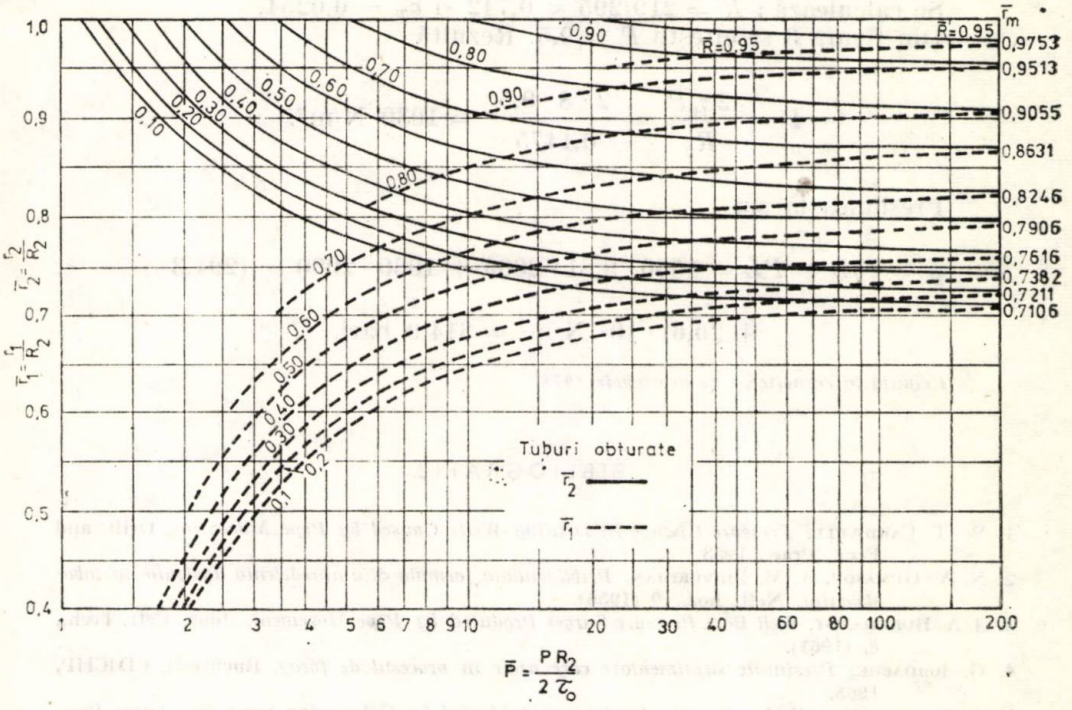

$\bar{r}_m$
$\bar{R}$=0,95
$\bar{R}$=0,95
0,9753
0,9513
0,9055
0,8631
0,8246
0,7906
0,7616
0,7382
0,7211
0,7106
0,10
0,20
0,30
0,40
0,50
0,60
0,70
0,80
0,90
0,80
0,90
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,2
0,1
Tuburi obturate
$\bar{r}_2$
$\bar{r}_1$
$\bar{r}_1=\frac{r_1}{R_2}$
$\bar{r}_2=\frac{r_2}{R_2}$
$\bar{P}=\frac{P R_2}{2\tau_0}$

Fig. 3

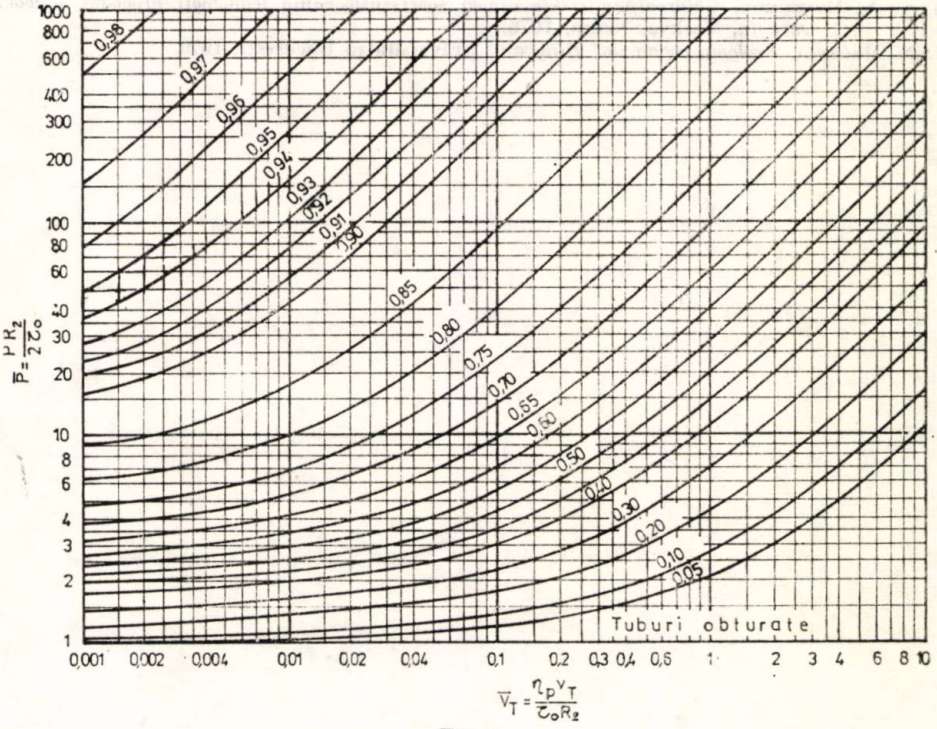

0,98
0,97
0,96
0,95
0,94
0,93
0,92
0,91
0,90
0,85
0,80
0,75
0,70
0,55
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,05
Tuburi obturate
$\bar{P}=\frac{P R_2}{2\tau_0}$
$\bar{V}_T=\frac{\eta_p v_T}{\tau_0 R_2}$

Fig. 4

Se calculează : $\bar{R} = 219/295 \approx 0{,}742$ și $\bar{v}_T = 0{,}0254$.
Din figura 3 se citește $\bar{P} = 9{,}5$. Rezultă

$$P = \frac{2\tau_0 \bar{P}}{R_2} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 9{,}5}{0{,}1475} = 1030 \text{ N/m}^2.$$

Presiunea la șiu

$$p = \rho g L + PL = 1500 \cdot 9{,}81 \cdot 2000 + 1030 \cdot 2000 = (294{,}3 +$$

$$+ 20{,}6) \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 314{,}9 \text{ bari.}$$

Primită la redacție la 27 decembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. W. T. Cardwell, *Pressure Change in Drilling Wells Caused by Pipe Movement*, Drill. and Prod. Prac., 1953.
2. N. A. Gukasov, A. M. Pirverdian, *Priblijennaia formula dlia opredelenia davlenia na zaboe skvajini*, Neft. hoz., 9 (1956).
3. J. A. Burkhardt, *Well Bore Pressure Surges Produced by Pipe Movement*, Jour. Petr. Tech., 6, (1961).
4. G. Iordache, *Presiunile suplimentare care apar in procesul de foraj*, București, CDICHP, 1968.
5. J. E. Fontenot, R. K. Clark, *An Improved Method for Calculating Swab and Surge Pressures and Circulating Pressures in a Drilling Well*, Soc. Petr. Eng. J., oct., 1974.
6. A. A. Movsumov, *Ghidrodinamiceskie osnovi soverșenstvovania tehnologii provodki glubokih skvajin*, Moskva, Nedra, 1976.
7. N. Macovei, *Reologia corpurilor Bingham*, Universitatea București, 1970.

ASUPRA UNEI MIȘCĂRI ÎN PREZENȚA INFILTRAȚIEI

de MIRCEA T. ORĂȘANU
Liceul nr. 3 Aeronautic București

În prezenta lucrare se studiază un caz de mișcare cu suprafață liberă în prezența infiltrației de intensitate $\varepsilon < 0$ printr-un masiv poros omogen de formă dreptunghiulară, fără suprafață umedă.
Metoda de abordare a problemei la limită, asociată mișcării în discuție, este cea a teoriei analitice a ecuațiilor diferențiale.

1. INTRODUCERE

Studiul mișcărilor cu suprafață liberă în prezența infiltrației comportă dificultăți matematice deosebite. În literatura de specialitate există puține lucrări consacrate acestei probleme. Printre acestea, citățm pe cele din [1] și [2]. Mai jos, ne propunem să cercetăm o astfel de mișcare printr-un masiv poros omogen de o anumită formă.

2. ENUNȚUL PROBLEMEI

Fie mișcarea plană și staționară ce are loc în D, unde D este domeniul de permeabilitate constantă k (fig. 1). Admitem că prin arcul liber $\overline{AB}$ există un curent liber de intensitate $\varepsilon < 0$, fapt ce ne obligă să luăm în considerație influența capilarității. Atunci, în ipoteza că mișcarea decurge, conform legii lui Darcy, părțile reală și imaginară ale potențialului complex f vor fi supuse următoarelor condiții limită :

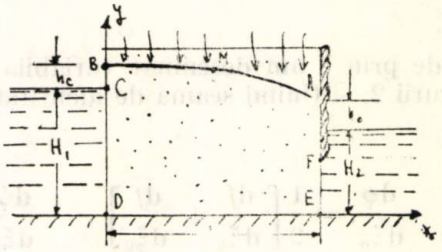


Fig. 1

$$\begin{cases} x = 0 \\ \varphi + ky = 0 \end{cases} \text{ pe } BC, \tag{1}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \varphi = -kH_1 \end{cases} \text{ pe } CD,$$

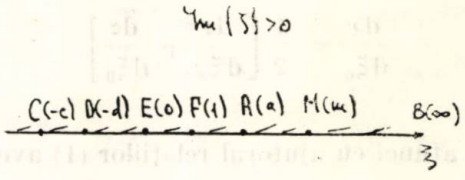


Fig. 2

$$\begin{cases} y = 0 \\ \psi = 0 \end{cases} \text{ pe } DE, \qquad \begin{cases} x = L \\ \varphi = -kH_2 \end{cases} \text{ pe } EF,$$

$$\begin{cases} x = L \\ \psi = \psi_0 + \varepsilon L \end{cases} \text{ pe } FA, \qquad \begin{cases} \varphi + ky = 0 \\ \psi = \psi_0 + \varepsilon x \end{cases} \text{ pe } AB, \tag{1}$$

unde $H_1 > H_2$, iar ψ_0 este valoarea funcţiei de curent în punctul de pe suprafaţa liberă ce are abscisa $x = 0$.

Introducînd funcţiile olomorfe pe porţiuni,

$$Z(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{dz}{d\zeta} \text{ pentru } \zeta \in S^+ \quad S^+ = \operatorname{Im}\{\zeta\} > 0, \\ \\ \overline{\dfrac{dz}{d\zeta}} \text{ pentru } \zeta \in S^- \quad S^- = \operatorname{Im}\{\zeta\} < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$F(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{df}{d\zeta} \text{ pentru } \zeta \in S^+, \\ \\ \overline{\dfrac{df}{d\zeta}} \text{ pentru } \zeta \in S^-, \end{cases} \tag{3}$$

unde prin ζ am desemnat variabila complexă din semiplanul auxiliar al figurii 2, şi ţinînd seama de identităţile :

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{df}{d\xi_0} + \overline{\frac{df}{d\xi_0}}\right] \qquad \frac{d\psi}{d\xi_0} = \frac{1}{2i}\left[\frac{df}{d\xi_0} - \overline{\frac{df}{d\xi_0}}\right], \qquad \xi_0 \in (0\xi) \tag{4}$$

$$\frac{dx}{d\xi_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{dz}{d\xi_0} + \overline{\frac{dz}{d\xi_0}}\right] \qquad \frac{dy}{d\xi_0} = \frac{1}{2i}\left[\frac{dz}{d\xi_0} - \overline{\frac{dz}{d\xi_0}}\right],$$

atunci cu ajutorul relaţiilor (1) avem de realizat pentru vectorul olomorf $\Phi = (Z_1 F)$ problema limită

$$\Phi^+(\xi_0) = G(\xi_0) \cdot \Phi^-(\xi_0) \qquad \text{pentru } \xi_0 \in 0\xi - E, \tag{5}$$

unde

$$G(\xi_0) = \begin{cases} \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 2k & -1 \end{Vmatrix} & \text{pentru } -\infty < \xi_0 < -c, \\ \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} & \text{pentru } -c < \xi_0 < -d, \\ \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} & \text{pentru } -d < \xi_0 < 0, \\ \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} & \text{pentru } 0 < \xi_0 < 1, \\ \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} & \text{pentru } 1 < \xi_0 < a, \\ \begin{Vmatrix} \dfrac{k+\varepsilon}{k-\varepsilon} & -\dfrac{2i}{k-\varepsilon} \\ \dfrac{2k\varepsilon i}{k-\varepsilon} & \dfrac{k+\varepsilon}{k-\varepsilon} \end{Vmatrix} & \text{pentru } a < \xi_0 < \infty, \end{cases} \tag{6}$$

iar E este mulțimea discontinuităților de prima speță ale lui $G(\xi_0)$. Egalitatea (5) definește binecunoscuta problemă Hilbert omogenă, cu coeficienți discontinui pentru un sistem de două funcții olomorfe pe porțiunile S^+ și S^-.

Soluțiile problemei (5) le vom căuta de forma

$$Z(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(\zeta + d)\zeta(\zeta - 1)}} \left[A + B \int_0^{\zeta} \frac{\zeta - m}{(\zeta - a)^{\frac{3}{2}} (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}}} \, d\zeta \right],$$

$$F(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{(\zeta + d)\zeta(\zeta - 1)}} \left[C + D \int_0^{\zeta} \frac{\zeta - m}{(\zeta - a)^{\frac{3}{2}} (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}}} \, d\zeta \right]. \tag{7}$$

Calculînd integrala din membrul doi al egalităților din (7) și ținînd seama că în lungul diferitelor segmente de pe 0ξ avem :

$$F^+(\xi_0)=\frac{df}{d\xi_0}=\begin{cases} -k\dfrac{dy}{d\xi_0}+i\dfrac{d\psi}{d\xi_0} & \text{pentru } -\infty<\xi_0<-c,\\ i\dfrac{d\psi}{d\xi_0} & \text{pentru } -c<\xi_0<-d,\\ \dfrac{d\varphi}{d\xi_0} & \text{pentru } -d<\xi_0<0,\\ i\dfrac{d\psi}{d\xi_0} & \text{pentru } 0<\xi_0<1,\\ \dfrac{d\varphi}{d\xi_0} & \text{pentru } 1<\xi_0<a,\\ -k\dfrac{dy}{d\xi_0}+i\varepsilon\dfrac{dx}{d\xi_0} & \text{pentru } a<\xi_0<\infty, \end{cases} \tag{8}$$

$$Z^+(\xi_0)=\frac{dz}{d\xi_0}=\begin{cases} i\dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } -\infty<\xi_0<-d,\\ \dfrac{dx}{d\xi_0} & \text{pentru } -d<\xi_0<0,\\ i\dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } 0<\xi_0<a,\\ \dfrac{dx}{d\xi_0}+i\dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } a<\xi_0<\infty, \end{cases} \tag{9}$$

atunci din (7) cînd $\zeta\to\xi_0\in 0\xi$, deducem

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0}=\frac{kN^*\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{a-\xi_0}+\sqrt{1-\xi_0}}{\sqrt{a-\xi_0}-\sqrt{1-\xi_0}}+B\sqrt{\frac{1-\xi_0}{a-\xi_0}}\right],$$

$$\frac{d\psi}{d\xi_0}\quad\frac{kM^*\varepsilon}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}}\quad\text{pentru } -\infty<\xi_0<-c, \tag{10}$$

$$\frac{dy}{d\xi_0}=-\frac{N^*\varepsilon}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{a-\xi_0}+\sqrt{1-\xi_0}}{\sqrt{a-\xi_0}-\sqrt{1-\xi_0}}+B\sqrt{\frac{1-\xi_0}{a-\xi_0}}\right];$$

$$\frac{dy}{d\xi_0} = -\frac{N^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{a-\xi_0}+\sqrt{1-\xi_0}}{\sqrt{a-\xi_0}-\sqrt{1-\xi_0}} + B\sqrt{\frac{1-\xi_0}{a-\xi_0}}\right],$$

(11)

$$\frac{d\psi}{d\xi_0} = -kM^*\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}} \quad \text{pentru } -c < \xi_0 < -d;$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0} = kM^*\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}} \quad \text{pentru } -d < \xi_0 < 0,$$

(12)

$$\frac{dx}{d\xi_0} = \frac{N^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{a-\xi_0}+\sqrt{1-\xi_0}}{\sqrt{a-\xi_0}-\sqrt{1-\xi_0}} + B\sqrt{\frac{1-\xi_0}{a-\xi_0}}\right];$$

$$\frac{d\psi}{d\xi_0} = kM^*\frac{1}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(\xi_0+d)}} \quad \text{pentru } 0 < \xi_0 < 1,$$

(13)

$$\frac{dy}{d\xi_0} = \frac{N^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{a-\xi_0}+\sqrt{1-\xi_0}}{\sqrt{a-\xi_0}-\sqrt{1-\xi_0}} + B\sqrt{\frac{1-\xi_0}{a-\xi_0}}\right];$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0} = -kM^*\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0+d)}} \quad \text{pentru } 1 < \xi_0 < a,$$

(14)

$$\frac{dy}{d\xi_0} = -\frac{N^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0+d)}}\left[2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\xi_0-1}{a-\xi_0}} + B\sqrt{\frac{\xi_0-1}{a-\xi_0}}\right];$$

$$\frac{d\psi}{d\xi_0} = -\frac{\varepsilon N^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{\xi_0-a}+\sqrt{\xi_0-1}}{\sqrt{\xi_0-a}-\sqrt{\xi_0-1}} + B\sqrt{\frac{\xi_0-1}{\xi_0-a}}\right],$$

(15)

$$\frac{dx}{d\xi_0} = -\frac{N^*}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0+d)}}\left[\ln\frac{\sqrt{\xi_0-a}+\sqrt{\xi_0-1}}{\sqrt{\xi_0-a}-\sqrt{\xi_0-1}} + B\sqrt{\frac{\xi_0-1}{\xi_0-a}}\right],$$

$$\frac{dy}{d\xi_0} = M^*\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0+d)}} \quad \text{pentru } a < \xi_0 < \infty,$$

unde

$$B = 2\frac{m-a}{a-1}. \tag{16}$$

Fie K și K' integralele eliptice complete de prima speță de module $\varkappa$ și $\varkappa'$ cu

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1, \quad d = \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2}. \tag{17}$$

Atunci, cu ajutorul funcțiilor lui Jacobi, vom lua [3]

$$\xi_0 = \frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2 cn^2 \nu} \quad \text{cînd} \quad -\infty < \xi_0 < -d,\ 0 \leqslant \nu \leqslant K, \tag{18}$$

$$\xi_0 = -\frac{\varkappa'^2}{\varkappa^2} cn'\,\mu \quad \text{cînd} \quad -d < \xi_0 < 0,\ 0 \leqslant \mu \leqslant K', \tag{19}$$

$$\xi_0 = \varkappa'^2 \frac{sn^2\nu}{dn^2\nu} \quad \text{cînd} \quad 0 < \xi_0 < 1,\ 0 \leqslant \nu \leqslant K, \tag{20}$$

$$\xi_0 = \frac{dn'^2\mu}{\varkappa^2\, sn'^2\mu} \quad \text{cînd} \quad 1 < \xi_0 < \infty,\ 0 \leqslant \mu \leqslant K', \tag{21}$$

accentele se referă ca de obicei la funcțiile lui Jacobi de modul $\varkappa'$. Înlocuind grupul de formule (18)—(21) în ecuațiile (10)—(15) obținem în primul rînd

$$\psi - \psi_0 = \frac{q}{K}\varepsilon\nu \quad \text{pentru} \quad -\infty < \xi_0 < -c, \tag{22}$$

$$\psi - \psi_c = -\frac{q}{K}(\nu - \nu_c) \quad \text{pentru} \quad -c < \xi_0 < -d, \tag{23}$$

$$\varphi + kH_1 = \frac{q}{K}\mu \quad \text{pentru} \quad -d < \xi_0 < 0, \tag{24}$$

$$\psi = \frac{q}{K}\nu \quad \text{pentru} \quad 0 < \xi_0 < 1, \tag{25}$$

$$\varphi + kH_2 = -\frac{q}{K}\mu \quad \text{pentru} \quad 1 < \xi_0 < a, \tag{26}$$

$$\varphi + k(H_2 + h_0) = -\frac{q}{K}(\mu - \mu_a) \quad \text{pentru } a < \xi_0 < \infty, \tag{27}$$

$$y - (H_2 + h_0) = \frac{q}{kK}(\mu - \mu_a) \quad \text{pentru } a < \xi_0 < \infty, \tag{28}$$

unde am făcut notațiile

$$\nu(-c) = \nu_c, \ \nu(a) = \nu_a; \ \mu(a) = \mu_a, \ \psi(-c) = \psi_c, \tag{29}$$

$$2M^*\varkappa = \frac{H_1 - H_2}{K'}, \quad q = k\frac{K}{K'}(H_1 - H_2). \tag{30}$$

Ținînd seama că

$$\psi(1) = \varepsilon L + \psi_0, \tag{31}$$

deducem

$$\psi(1) = q. \tag{32}$$

Deci

$$\varepsilon L + \psi_0 = q, \tag{33}$$

iar din (22) și (23)

$$\psi_c - \psi_0 = \varepsilon q\frac{\nu_c}{K}, \ \psi_c = q\left(1 - \frac{\nu_c}{K}\right). \tag{34}$$

Aceste relații conduc la egalitățile:

$$\nu_c = \frac{\varepsilon L}{1+\varepsilon}\frac{K}{q}, \quad \psi_c = q - \frac{\varepsilon L}{1+\varepsilon}, \ \psi_0 = q - \varepsilon L. \tag{35}$$

Evident, cînd $\varepsilon \to 0$, atunci $\nu_c \to 0$, deci $c \to d$ caz studiat în [3]. De asemenea, pentru $\varepsilon \to 0 \Rightarrow \psi_0 \to q$. Luînd acum în (26) și (27) $\mu = K'$ avem imediat:

$$h_0 = (H_1 - H_2)\frac{\mu_a}{K'}. \tag{36}$$

În continuare avem și

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{2kN^*\varepsilon\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} + \varkappa^{-1}\,dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} - \varkappa^{-1}\,dn\nu}\right) + \frac{B}{\varkappa}\frac{dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu}}\right],$$

$$\text{pt. } 0 \leqslant \nu \leqslant \nu_a$$

$$\frac{dy}{d\nu} = -\frac{2N^*\varepsilon\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} + \varkappa^{-1}\,dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} - \varkappa^{-1}\,dn\nu}\right) + \frac{B}{\varkappa}\frac{dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu}}\right]; \tag{37}$$

$$\frac{dy}{d\nu} = -\frac{2N^*\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} + \varkappa^{-1}\,dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} - \varkappa^{-1}\,dn\nu}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{\varkappa}\frac{dn\,\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\,\nu}}\right] \text{pt. } \nu_c \leqslant \nu \leqslant K, \tag{38}$$

$$\frac{dx}{d\mu} = \frac{2N^*\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a_1 - \varkappa'^2\,sn'^2\,\mu} + \varkappa^{-1}\,dn'\mu}{\sqrt{a_1 - \varkappa'^2\,sn'^2\,\mu} - \varkappa^{-1}\,dn'\mu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{B}{\varkappa}\frac{dn'\mu}{\sqrt{a_1 - \varkappa'^2\,sn'^2\,\mu}}\right] \text{ pt. } 0 \leqslant \mu \leqslant K', \right. \tag{39}$$

$$\frac{dy}{d\nu} = \frac{2N^*\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a - a_1\,sn^2\nu} + cn\nu}{\sqrt{a - a_1\,sn^2\nu} - cn\nu}\right) + \right.$$

$$\left. + B\frac{cn\nu}{\sqrt{a - a_1\,sn^2\nu}}\right] \text{ pt. } 0 \leqslant \nu \leqslant K, \tag{40}$$

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{2N^*\varkappa}{\pi}\left[2\,\text{arctg}\left(\frac{cn'\mu}{\sqrt{a_1 sn'^2\mu - 1}}\right) + \right.$$

$$\left. + B\frac{cn'\mu}{\sqrt{a_1 sn'^2\mu - 1}}\right] \text{ pt. } 0 \leqslant \mu \leqslant \mu_a, \tag{41}$$

iar pe suprafaţa liberă

$$\frac{d\psi}{d\mu} = \frac{2\varepsilon N^*\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{cn'\mu + \sqrt{cn'^2\mu + (1 - a_1)sn'^2\,\mu}}{cn'\mu - \sqrt{cn'^2\mu + (1 - a_1)sn'^2\mu}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B\frac{cn'\mu}{\sqrt{cn'^2\mu + (1 - a_1)sn'^2\mu}}\right], \right.$$

$$\frac{dx}{d\mu} = \frac{2N^*\varkappa}{\pi}\left[\ln\left(\frac{cn'\mu + \sqrt{cn'^2\mu + (1 - a_1)sn'^2\mu}}{cn'\mu - \sqrt{cn'^2\mu + (1 - a_1)sn'^2\mu}}\right) + \right. \tag{42}$$

$$\left. + B\frac{cn'\mu}{\sqrt{cn'^2\mu + (1 - a_1)sn'^2\mu}}\right], \quad \text{pentru } \mu_a \leqslant \mu \leqslant K'$$

cu

$$a_1 = 1 + (a - 1)\varkappa^2. \tag{43}$$

Ținînd seama de (28) deducem din a doua egalitate (42) că :

$$2N^*\varkappa = \frac{q}{kK}. \tag{44}$$

Adoptînd notațiile [3]

$$\sin\alpha = sn'\mu \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant \arcsin(sn'\mu),$$

$$\begin{cases} H_0 = \dfrac{H_1}{H_1 - H_2}, \quad L_0 = \dfrac{L}{H_1 - H_2} \\ X = -\dfrac{x}{H_1 - H_2}, \quad Y = \dfrac{y}{H_1 - H_2}, \end{cases} \tag{45}$$

avem pentru arcul liber $\overline{AB}$ ecuațiile

$$X = \frac{1}{\pi K'}\left[\int_0^\infty \ln\left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{1 - a_1\sin^2\alpha}}{\cos\alpha - \sqrt{1 - a_1\sin^2\alpha}}\right)\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \varkappa'^2\sin^2\alpha}} + \right.$$

$$\left. + B\int_0^\alpha \frac{\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{(1 - a_1^2\sin^2\alpha)(1 - \varkappa'^2\sin^2\alpha)}}\right] - L_0, \tag{46}$$

$$Y = H_1 - \frac{\mu}{K'}.$$

De asemenea, integrînd a doua egalitate (37) între 0 și ν_c găsim :

$$h_c = \frac{q\varepsilon}{\pi kK}\int_0^{\nu_c}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} + \varkappa^{-1}\,dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu} - \varkappa^{-1}\,dn\nu}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{\varkappa}\frac{dn\nu}{\sqrt{a_1 - a\,sn^2\nu}}\right] d\nu. \tag{47}$$

3. *Calculul parametrilor mișcării*

Valorile parametrilor H_1, H_2, L, T, h_0, h_c se obțin din (37)—(42) și din egalitățile (35), (36) ca în [3]

4. *Caz particular*

Cînd $\varepsilon \to 0$ regăsim rezultatul obținut de Priajinskaia [3], în plus din (47) se vede că $h_c \to 0$

Primită la redacție la 26 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. MLADEN BORLEI, MILAN VUKOVIC, *Ecoulement vers un système de drains. Solution rigoureuse*, Comptes Rendus **246**, *3*, **583** (1958).
2. V. A. BARON, *Zacritii drenaj pri nalicii dreniruiuşcego sloia na conecinoi glubine*, IAN Uzb., SSR, seriia teh., *4*, **12** (1964).
3. V. P. PRIAJINSKAIA, *Dvijenie gruntovth vod v priamougolnoi peremicike s nepronițaemoi verticalnoi stenkoi*, IAN OTN. Meh. i. maș., *2*, **41** (1964).

ASUPRA UNOR POSIBILITĂȚI DE OPTIMIZARE A TRANSPORTULUI SUCCESIV DE PRODUSE PETROLIERE

de T. OROVEANU, B. SIRO
Institutul de petrol și gaze Ploiești

În această lucrare se definește și se determină parametrul concentrației optime de secționare a unui dop de amestec, ce apare la transportul succesiv de produse petroliere, în condițiile în care acest dop se repartizează în întregime în rezervoarele produselor standard. Valoarea acesteia depinde de o serie de parametri tehnico-economici, dintre care o pondere deosebită o au pierderile de produse ce apar la respirațiile mici și mari ale rezervoarelor de depozitare. Concentrația optimă de secționare depinde și de numărul ciclurilor, ea neputînd fi considerată constantă nici în domeniul uzual al numărului de cicluri($k=60 \div 100$). Spectrul de variație al concentrației optime în funcție de numărul de cicluri depinde într-o mare măsură de tipul produselor (stabilizate sau nestabilizate) ce alcătuiesc un ciclu și de ordinea acestora în cadrul ciclului. În această idee, în cazul unui produs cu pierderi mari (prin respirație mică și mare a rezervoarelor) urmat de unul cu pierderi mici, apare imposibilă secționarea optimă a zonei de amestec chiar în domeniul uzual al numărului de cicluri.

1. INTRODUCERE

În cercetare, dar și în practica de șantier, cei ce se ocupă cu problema pompărilor succesive de produse petroliere, sînt în permanentă tangență cu noțiunile de volum și concentrație, legate direct sau indirect cu zona de amestec (ZA) ce se formează între două produse pompate succesiv.

Lucrarea prezentă se ocupă numai de problema concentrației, încercînd să definească și să analizeze un parametru de referință pentru această noțiune. Astfel, ne propunem un segment dintr-un ciclu oarecare de produse, aflate în pompare succesivă:

$$\ldots \underline{P_m}\,(P_m, P_j)\underline{P_j}\,(P_j, P_p)\underline{P_p} \ldots, \tag{1}$$

în care j este indicele produsului curent, iar pentru simplificarea indexării s-a notat $m = j - 1$ și $p = j + 1$. De asemenea, prin (P_j, P_p) s-a simbolizat zona de amestec (ZA_{jp}) ce se formează între produsele adiacente P_j și P_p aflate în pompare succesivă, iar prin $\underline{P_j}$ partea de produs curat P_j dispusă între cele două zone de amestec: anterioară (ZA_{mj} — în sensul pompării) și posterioară (ZA_{jp}). Segmentul propus în (1) este schițat, sub forma succesiunii produselor pe conductă, în figura 1.

În mod obișnuit zona de amestec ZA_{jp} dintre produsele P_j și P_p, ajunsă (în timpul pompării succesive) la capătul final al conductei, se distribuie în rezervoarele produsului curat P_j și, respectiv, în rezervoarele

produsului curat P_p. Ideal este ca întreaga zonă de amestec, formată în timpul pompării succesive a celor două produse, să fie distribuită în rezervoarele cu produse standard. Ca o consecință a acestui aspect se pune problema cum trebuie „secționată" zona de amestec ZA_{jp}, cu alte cuvinte, la ce concentrație C^0_{jp} (fig. 1) trebuie să închidă ventilul rezervorului pentru produs P_j și în același timp să se deschidă ventilul rezervorului pentru produs P_p, astfel încît costurile totale aferente depozitării și amestecării produselor transportate succesiv să fie minime? O asemenea problemă este evident o problemă de optim, iar concentrația care va respecta condițiile de optim impuse va fi denumită concentrația optimă de secționare sau, mai pe scurt, concentrația optimă (C^0).

Un aspect al unei astfel de probleme este prezentat în [1], numai că autorii, analizînd pomparea succesivă doar a două produse, sînt interesați

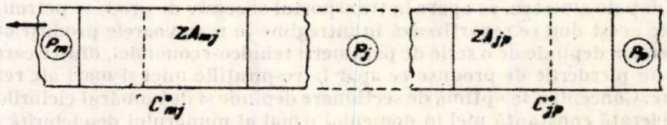


Fig. 1

n deducerea volumelor minime de depozitare, fără a lua în considerație cheltuielile aferente acestora și fără a urmări determinarea unei „secționări optime" a zonei de amestec și din acest punct de vedere.

2. DETERMINAREA CONCENTRAȚIEI OPTIME (C^0)

Unele studii deosebite privind legea de variație a concentrației unui produs în dopul de amestec, format în timpul transportului succesiv de produse petroliere, se găsesc în literatura de specialitate. Astfel, numai în cazul regimului turbulent, care este întîlnit cel mai adesea în practică, printre cele mai reprezentative lucrări (în afară de cele ale lui G.I. Taylor), putem cita [5], [6], [8].

În [8] se obține următoarea relație pentru concentrația medie într-o secțiune a conductei de transport:

$$\bar{C}_m = \frac{\bar{C}_0}{2}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\varkappa\tau}} - \frac{\mathscr{P}_m}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}\right) + e^{\frac{\mathscr{P}_m}{\varkappa}\xi} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\varkappa\tau}} + \frac{\mathscr{P}_m}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}\right)\right], \quad (2)$$

iar pentru $\varkappa/\mathscr{P}_m\xi < 0{,}0075$ (corespunzător cazurilor practice de transport succesiv al produselor), relația (2) poate fi scrisă sub formă mai simplă:

$$\bar{C}_m = \frac{\bar{C}_0}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\varkappa\tau}} - \frac{\mathscr{P}_m}{2}\sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}\right). \quad (3)$$

fără o eroare prea mare în raport cu expresia anterioară.

În (3), $\varkappa$ reprezintă coeficientul efectiv de difuzie și are expresia [8]:

$$\varkappa = 8{,}9886\, \mathscr{P}_m \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left(1 - \frac{26{,}2317}{\mathscr{R}e \cdot \mathscr{S}c \sqrt{\frac{\lambda}{8}}} \right); \tag{4}$$

λ este coeficientul de rezistență; $\mathscr{S}c = \nu/D$ este numărul lui Schmidt, ν fiind viscozitatea cinematică, iar D — coeficientul difuziei moleculare; $\mathscr{R}e = V_m r_0/\nu$ este numărul Reynolds definit cu ajutorul vitezei medii (V_m) a produsului pompat și a razei (r_0) conductei de transport; $\mathscr{P}_m$ este numărul Péclet definit prin relația:

$$\mathscr{P}_m = \frac{r_0 V_m}{D_0} \tag{5}$$

în care D_0 este o valoare de referință a coeficientului de difuzie; τ este timpul adimensional definit prin expresia:

$$\tau = \frac{t D}{r_0^2}; \tag{6}$$

$\xi = x/r_0$ este lungimea adimensională luată în sensul curgerii produselor; $\overline{\mathscr{C}}_0$ este o concentrație de referință (de obicei se ia $\overline{\mathscr{C}}_0 = 1$). Așadar, în cazul practic al transportului succesiv de produse petroliere (cînd $\tau \gg 1$), distribuția concentrației medii în zona de amestec, conform (3), poate fi exprimată cu relația:

$$C_m = \frac{1}{2}[1 - \operatorname{erf}(z)] = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{erfc}(z), \tag{7}$$

în care pentru simplificare C_m nu mai este barat superior (reținînd faptul că este vorba de o mărime mediată în sensul teoriei turbulenței); $\operatorname{erf}(z)$ este funcția de eroare

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2}\, du, \tag{8}$$

iar z este argumentul funcției de eroare dat de expresia

$$z = \frac{\xi}{2\sqrt{\varkappa \tau}} - \frac{\mathscr{P}_m}{2} \sqrt{\frac{\tau}{\varkappa}}, \tag{9}$$

în (9) toți parametrii fiind definiți anterior.

Dacă din (1) vom lua în considerație o pereche de produse pompate succesiv — P_j și P_p — atunci variația concentrației în zona de amestec ZA_{jp} poate fi reprezentată ca în figura 2.

În acest fel relația (7) reprezintă de fapt distribuția concentrației medii a produsului P_p în zona de amestec ZA_{jp}. În figura 2 s-a notat cu C^s concentrația la care poate fi „secționată", la un moment dat ZA_{jp}, în vederea repartizării dopului de amestec în rezervoarele produsului curat P_j și, respectiv, P_p. În continuare, în primul rînd se pune problema de a determina volumul de produs P_p ce va intra în rezervorul produsului curat P_j, odată cu amestecul de produse (P_j, P_p), atunci cînd ZA_{jp} se secționează după concentrația C^s. Considerînd în cazul general, concentrația produsului P_p o funcție oarecare de timp $C_p(t)$ ca și debitul volumetric $Q(t)$, avem

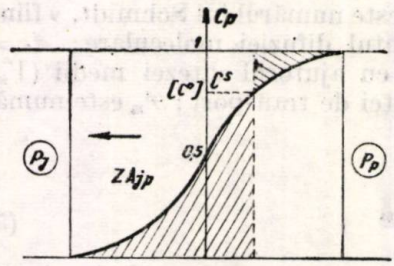


Fig. 2

$$V_p^{am}\Big|_0^{C^s} = \int_0^{t_s} Q(t)\cdot C_p(t)\cdot \mathrm{d}t, \tag{10}$$

în care t_s este „timpul de secționare" corespunzător concentrației C^s, iar cu $V_p^{am}\Big|_0^{C^s}$ s-a notat volumul de produs P_p din zona de amestec ZA_{jp} cuprins între concentrațiile $0 \div C^s$. Într-o primă aproximație putem considera $Q(t) = Q_p$ pentru că atunci cînd zona de amestec ZA_{jp} a ajuns la capătul final al conductei de transport, aceasta practic este umplută (în afară de lungimea zonei de amestec respective) cu produsul P_p și debitul va fi corespuzător acestui produs. Dacă ținem seama de expresiile parametrilor P_m, τ, ξ stabilite anterior și de faptul că la capătul final al conductei trebuie să considerăm:

$$x = L_c = V_m t_0 \tag{11}$$

în care t_0 reprezintă timpul necesar ca o anumită secțiune marcată de produs să străbată cu viteza V_m lungimea L_c a conductei de transport, atunci putem nota:

$$z = \frac{V_m t_0 - V_m t}{2\sqrt{\varkappa t D_0}} = \frac{1-\theta}{2\sqrt{\theta}}\sqrt{\frac{\mathscr{P}_e}{\varkappa}}, \tag{12}$$

în care $\theta = t/t_0$ este un timp adimensional. Relația (10) se poate transcrie acum sub forma:

$$V_p^{am}\Big|_0^{C^s} = \frac{V_c}{2}\int_0^{\theta_s}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathscr{P}_e}{\varkappa}}\frac{1-\theta}{\sqrt{\theta}}\right)\right]\mathrm{d}\theta. \tag{13}$$

unde s-a ţinut seama că $Q \cdot t_0 = V_c$ reprezintă volumul conductei de transport, iar numărul Péclet $\mathscr{P}e$ este definit prin relaţia :

$$\mathscr{P}e = \frac{V_m^2 t_0}{D_0} \cdot \tag{14}$$

Pentru a trece la variabila z, în (13) se modifică corespunzător limitele de integrare (din (12) avem : $\theta = 0 \rightarrow z = +\infty$ şi pentru $\theta = \theta_s \rightarrow z = z$), iar pentru diferenţiala dz se obţine :

$$dz = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathscr{P}e}{\varkappa}}\,\frac{1+\theta}{2\theta\sqrt{\theta}}\,d\theta$$

în care, la capătul final al conductei putem considera θ, $\sqrt{\theta} \approx 1$ şi respectiv să scriem :

$$d\theta = -2\sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}e}}\,dz. \tag{15}$$

Relaţia (13) devine în acest caz :

$$V_p^{am}\Big|_0^{Cs} = V_c\sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}e}}\int_z^{\infty}[1 - \operatorname{erf}(z)]\,dz \tag{16}$$

şi pentru că, în cazul general, din [2] avem :

$$\lim_{v\to\infty}\left[\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{\pi}} - v(1 - \operatorname{erf}(v))\right] = 0, \tag{17}$$

rezultă imediat :

$$V_p^{am}\Big|_0^{Cs} = V_c\sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}e}}\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} - z(1 - \operatorname{erf}(z))\right]. \tag{18}$$

Pentru produsul P_j relaţia (10) se poate nota :

$$V_j^{am}\Big|_{Cs}^{1} = \int_{t_s}^{\infty} Q(t)C_j(t)dt = \int_{t_s}^{\infty} Q(t)[1 - C_p(t)]\,dt \tag{19}$$

avînd în vedere că în orice moment $C_j(t) + C_p(t) = 1$. Similar, se determină volumul de produs P_j ce intră în rezervorul produsului curat P_p, odată cu amestecul (P_j, P_p), atunci cînd ZA_{jp} este secţionat după concentraţia C^s :

$$V_j^{am}\Big|_{C^s}^{1} = V_c\sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}e}}\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z(1 + \operatorname{erf}(z))\right]. \tag{20}$$

La stabilirea expresiei (20) s-a luat în considerație din [2] relația :

$$\lim_{v\to-\infty}\left[\frac{e^{-v^2}}{\sqrt{\pi}}+v(1+\operatorname{erf}(v))\right]=0, \tag{21}$$

unde v este, ca și în cazul relației (17), un argument oarecare al funcției erf.

Pentru perechile de produse ale căror proprietăți fizico-chimice sînt apropiate, factorul :

$$\Omega_{jp}=V_c\sqrt{\frac{\varkappa}{\mathscr{P}_e}} \tag{22}$$

poate fi determinat pentru amestecul de 50% al produselor din zona de amestec considerată, valoarea lui fiind astfel aceeași pentru ambele produse adiacente aflate în pompare succesivă. Din (22) rezultă imediat că factorul Ω are dimensionarea unui volum $[L]^3$. De asemenea, dacă se notează

$$f_1(z)=\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}+z[1+\operatorname{erf}(z)] \tag{23}$$

și, respectiv,

$$f_2(z)=\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}}-z[1-\operatorname{erf}(z)], \tag{24}$$

atunci relațiile (18) și (20) capătă următorul aspect :

$$V_p^{am}\Big|_0^{C^2}=\Omega_{jp}\,f_2(z), \tag{25}$$

$$V_j^{am}\Big|_{C^1}^{1}=\Omega_{jp}\,f_1(z). \tag{26}$$

În scopul determinării unor costuri, se fac următoarele notații :

C_j, C_p — costul produsului P_j, respectiv P_p, [lei/kg];

γ_j, γ_p — densitatea produsului P_j, respectiv P_p, [kg/m^3];

σ — valoarea investiției pe m^3 volum de depozitare, [lei/m^3];

α — coeficientul de amortizare anual din valoarea investiției pe m^3 volum de depozitare;

C_s — costurile ce includ retribuția și valoarea utilităților energetice corespunzătoare întreținerii și exploatării unui m^3 volum de depozitare pe an, [lei/m^3 an];

T — numărul de zile dintr-un an afectate pompării succesive pe conducta de transport dată;

G_{zj}, G_{zp} — pierderile specifice de produs P_j, respectiv P_p prin respirația mică (zilnică) a rezervoarelor de depozitare, [kg/m^3 zi];

G_{cj}, G_{cp} — pierderile specifice de produs P_j, respectiv P_p prin respirația mare (ciclică) a rezervoarelor de depozitare, [kg/m^3 ciclu];
k — numărul de cicluri din cadrul programului de pompare succesivă pe un an de zile, [nr. cicluri/an].

Conform notațiilor anterioare, diferența de preț dintre produsele P_j și P este

$$D_{jp} = |C_j - C_p|. \tag{27}$$

Dacă se consideră că produsul P_p este superior produsului $P_j (C_p > C_j)$ atunci prin faptul că ZA_{jp} se secționează după concentrația C^s, rezultă că o parte din volumul produsului P_p, dat de relația (25), va intra în rezervorul produsului inferior P_j, ceea ce duce la o pierdere

$$C_1 = D_{jp}\, \gamma_p\, \Omega_{jp}\, f_2(z) \qquad \text{[lei/ciclu]}. \tag{28}$$

Pe de altă parte, o cantitate de produs P_j, cea dată de relația (26), va intra în rezervorul produsului superior P_p, ceea ce duce la un profit

$$C_2 = D_{jp}\, \gamma_j\, \Omega_{jp}\, f_1(z) \qquad \text{[lei/ciclu]}. \tag{29}$$

Pierderea rezultantă, datorată amestecării produselor cînd se repartizează ZA_{jp} pe rezervoare, pentru un număr de cicluri k pe an, este

$$C_r = k(C_1 - C_2) = D_{jp}\, \Omega_{jp}\, k[\gamma_p f_2(z) - \gamma_j f_1(z)] \quad \text{[lei/an]}. \tag{30}$$

Este necesar de remarcat că C_r poate avea și valori negative (pierderile sînt de fapt niște profituri), aceasta depinzînd de argumentul z al funcțiilor $f_1(z)$ și $f_2(z)$ — adică de concentrația de secționare C^s din zona de amestec ZA_{jp} considerată. În ceea ce privește volumele de depozitare, este evident că volumul minim de rezervor necesar pentru produsul P_j, care primește și o parte în produs P_p (odată cu amestecul ZA_{jp}), cu condiția respectării concentrației admisibile K_{pj} a produsului P_p în produsul P_j, va fi dat de relația

$$R_j = \frac{\Omega_{jp}}{\eta_j\, K_{pj}}\, f_2(z) \tag{31}$$

și, respectiv, pentru produsul P_p, de relația

$$R_p = \frac{\Omega_{jp}}{\eta_p\, K_{jp}}\, f_1(z), \tag{32}$$

în care K_{jp} reprezintă concentrația admisibilă de produs P_j în produs P_p, iar η_j și η_p sînt coeficienții de umplere ai rezervoarelor respective de produse. Suma volumelor rezervoarelor pentru cele două produse

$$R_{jp} = \Omega_{jp}\left[\frac{f_1(z)}{\eta_p K_{jp}} + \frac{f_2(z)}{\eta_j\, K_{pj}}\right] \quad [\text{m}^3] \tag{33}$$

este, de asemenea, o funcție de argumentul z și deci depinde de concentrația de secționare C^s a zonei de amestec ZA_j. Costurile legate de investiție, exploatarea și întreținerea rezervoarelor se deduc imediat

$$I_r = (\sigma\alpha + C_s)\,\Omega_{jp}\left[\frac{f_1(z)}{\eta_p\ K_{jp}} + \frac{f_2(z)}{\eta_j\ K_{pj}}\right] \quad \text{[lei/an]}, \tag{34}$$

iar costurile legate de pierderile de produse prin respirația zilnică și ciclică a rezervoareior se pot determina prin relația

$$E_r = (TG_{zj} + kG_{cj})\,C_j \frac{\Omega_{jp}}{\eta_j\ K_{pj}}\ f_2(z) + \\ + (T\,G_{zp} + k\,G_{cp})\,C_p \frac{\Omega_{jp}}{\eta_p K_{jp}}\ f_1(z), \qquad \text{[lei/an]}. \tag{35}$$

Costul total se determină cu relațiile (30), (34) și (35)

$$C = C_r + I_r + E_r, \tag{36}$$

iar dacă se notează

$$K_1^D = \frac{\Omega_{jp}}{\eta_p K_{jp}}\,[(\sigma\alpha + C_s) + (T\,G_{zp} + kG_{cp})\,C_p - D_{jp}\ \gamma_j\ \eta_p K_{jp}\ k], \tag{37}$$

$$K_2^D = \frac{\Omega_{jp}}{\eta_j K_{pj}}\,[(\sigma\alpha + C_s) + (T\,G_{zj} + kG_{cj})\,C_j + D_{jp}\ \gamma_p\ \eta_j K_{pj}\ k], \tag{38}$$

atunci (36) se poate transcrie astfel

$$C = K_1^D\ f_1(z) + K_2^D f_2(z). \tag{39}$$

Relația (39) ne arată că, în cazul în care există posibilitatea repartizării întregii zone de amestec ZA_{jp} în rezervoarele produselor adiacente într-un ciclu, costul transportului și depozitării celor două produse va depinde de concentrația C^s la care va fi secționat amestecul respectiv. Căutînd minimul relației (39) pentru valorile argumentului z, se poate obține cu relația (7) expresia concentrației optime de secționare (C_D^0) a zonei de amestec. Astfel, dacă ținem seama de (23) și (24), relația (39) se poate scrie

$$C = (K_1^D + K_2^D)\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z\left(\frac{K_1^D + K_2^D}{K_1^D + K_2^D} + \operatorname{erf}(z)\right)\right]. \tag{40}$$

Din (40) rezultă că determinarea min C se reduce la determinarea lui min $f(z)$, unde

$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z[a + \operatorname{erf}(z)], \tag{41}$$

în care

$$a = \frac{K_1^D - K_2^D}{K_1^D + K_2^D} \tag{42}$$

este o constantă subunitară pentru un număr dat de cicluri k. Însă valoarea extremă a expresiei (41) se obține din

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} + z\left(a + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}\,du\right)\right] = 0, \tag{43}$$

în care s-a ținut seama de (8) și din care rezultă imediat

$$\operatorname{erf}(z) = -a. \tag{44}$$

Într-adevăr, deoarece derivata a doua a funcției din (41) este pozitivă pentru orice valoare a argumentului acesteia, rezultă că (44) reprezintă condiția de minim pentru (41), deci și pentru (40). Utilizînd (7), cu ajutorul expresiei (44), se obține direct concentrația optimă de secționare C_D^0 în cazul repartizării întregii zone de amestec în rezervoarele produselor adiacente

$$C_D^0 = \frac{1 + a}{2}$$

sau, ținînd seama de (42), avem

$$C_D^0 = \frac{K_1^D}{K_1^D + K_2^D}. \tag{45}$$

În expresia (45), K_1^D și K_2^D reprezintă, pentru un număr dat de cicluri k, niște constante ce depind de unii parametri tehnico-economici privitor la depozitarea și amestecarea produselor pompate succesiv.

Este interesant de remarcat faptul că admițînd o lege liniară de variație a concentrației în zona de amestec ZA_{jp}, de tipul

$$C_m = 1 - \frac{z}{2h}, \tag{46}$$

reprezentată în figura 3 (unde $2h$ reprezintă lungimea zonei de amestec, ZA_{jp}) pentru care refăcînd unele calcule de volume și costuri, se ajunge la următoarea expresie a costului total :

$$C_l = z^2 \frac{K_1' + K_2'}{4h} - K_2' z + K_2' h. \tag{47}$$

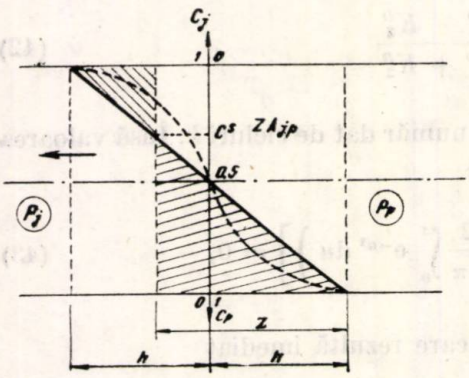


Fig. 3

În (47) avem notat

$$K_1' = \frac{Q_p}{V_m K_{jp} \eta_{jp}} [(\sigma\alpha + C_s) + (TG_{zp} + kG_{cp}) C_p - D_{jp} \gamma_j \eta_p K_{jp} k] \tag{48}$$

și, respectiv,

$$K_2' = \frac{Q_p}{V_m K_{pj} \eta_j} [(\sigma\alpha + C_s) + (TG_{zj} + k G_{cj}) C_j + D_{jp} \gamma_p \eta_j K_{pj} k], \tag{49}$$

în care Q_p este debitul pentru produsul P_p, iar V_m este viteza medie de pompare pentru același produs. Căutînd minimul expresiei (47), se obține

$$z^0 = 2h \frac{K_2'}{K_1' + K_2'} .$$

iar cu (46) se stabilește

$$C_l^0 = \frac{K_1'}{K_1' + K_2'} . \tag{50}$$

Comparînd expresiile (45) și (50), trebuie remarcat nu numai forma lor asemănătoare, ci însăși faptul că rapoartele din relațiile menționate sînt identice

$$\frac{K_1^D}{K_1^D + K_2^D} = \frac{K_1'}{K_1' + K_2'} . \tag{51}$$

Identitatea (51) ne arată că, în cazul repartizării întregii zone de amestec ZA_{jp} pe produse vandabile, pentru obținerea valorii concentrației optime de secționare, se poate utiliza o lege de variație a concentrației de tip (7) sau (46) — rezultatele obținute vor fi identice (pentru condițiile puse), valoarea lui C^0 obținîndu-se cu unul din rapoartele identității din (51).

3. ASPECTUL PIERDERILOR SPECIFICE DE PRODUSE PRIN RESPIRAȚIA REZERVOARELOR ÎN CAZUL TRANSPORTULUI SUCCESIV

Din analiza relației ce ne dă concentrația optimă de secționare a unei zone de amestec, respectiv a relațiilor (37) și (38) pentru constantele K_1^D și K_2^D, se constată că C_D^0 depinde, într-o măsură oarecare, de pierderile specifice de produse G_z și G_c ce apar datorită respirațiilor mici (zilnice) și mari (ciclice) ale rezervoarelor. În literatura de specialitate nu s-a întîlnit tratarea unui astfel de aspect. Numai V.A. Iufin în [3] mai specifică necesitatea luării în considerație a unor astfel de parametri, însă într-o altă problemă de optim (privind utilizarea separatoarelor mecanice la transportul succesiv de produse). Într-adevăr, în unele lucrări, cum sînt [7], [10], [11], există importante capitole ce tratează pierderile de produse petroliere prin respirația rezervoarelor, iar lucrarea lui N.N. Konstantinov din [4], considerată clasică, este afectată în întregime acestei probleme. Experiența și studiile unor institute de cercetare din țara noastră în această privință sînt, de asemenea, ample.

În cazul în care ne găsim în faza de „proiectare" a transportului succesiv, iar volumele unor rezervoare de depozitare abia urmează să fie determinate, parametrii nu pot fi stabiliți, abordarea prea detaliată a acestui aspect nefiind posibilă.

De aceea, într-o primă etapă, se consideră necesar să se stabilească, cu o bună aproximație, pentru anumite produse tipice pompărilor succesive, niște pierderi specifice (raportate la unitatea de volum de produs depozitat) corespunzătoare respirațiilor mici (zilnice) și mari (ciclice) ale rezervoarelor. Ulterior, acești parametri pot fi corectați corespunzător cazurilor concrete respective.

Drept produse tipice unor cicluri de transport succesiv s-au considerat a fi unele produse comerciale normale și unele produse speciale (motorina, petrol lampant, combustibil T_1, benzina CO—75, benzina CO — 90, benzina CO—98) pentru care s-a realizat seria de calcule în vederea stabilirii pierderilor specifice. Astfel, s-a constatat că tipurile de produse, luate în considerație, pot fi împărțite în două grupe :

— produse normale (românești și sovietice) pentru care pierderile prin respirație sînt normale ;

— produse de excepție sau nestabilizate (românești și sovietice) pentru care pierderile prin respirația rezervoarelor depășesc pe cele normale.

Plecînd de la datele primare ale produselor (densitatea d_4^{20}, curba de distilare STAS etc.) conform metodologiei din [12] s-au trasat curbele presiunilor de vapori pe 0% vaporizare ale fiecărui produs luat în evidență. În acest fel au fost analizate 12 benzine, 2 combustibili T_1, 5 petrol lampant și 4 motorine. Pentru benzinele cuprinse în grupa produselor normale, curbele presiunilor de vapori formează un fascicul strîns, pe cînd cele din grupa produselor nestabilizate posedă o mare dispersie.

În vederea determinării pierderilor de produse datorită respirației rezervoarelor din [7] s-au utilizat expresiile :

— pentru cazul respirațiilor mici:

$$G = V_p\left[\frac{1-c_1}{T_1} - \frac{1-c_2}{T_2}\right]\frac{c}{1-c}\cdot\frac{M}{848}, \qquad [\text{kg/zi}]; \qquad (52)$$

— pentru cazul respirațiilor mari:

$$G' = (V_1 - V_2)\frac{p}{T'}c'\frac{M}{848}, \qquad [\text{kg/ciclu}], \qquad (53)$$

în care s-au utilizat următoarele notații:

— T_1, T_2 sînt temperaturile absolute minime și maxime în cadrul zilei [°K];

— T' este temperatura absolută medie pentru intervalul ciclului [°K];

— V este volumul spațiului de vapori din rezervor [m³];

— V_1, V_2 sînt volumele spațiilor de vapori — final și inițial — la respirația mare a rezervoarelor [m³];

— p este presiunea atmosferică medie [m. col. apă];

— c_1, c_2 sînt concentrațiile volumetrice ale vaporilor de produs ce se determină după [11] cu relațiile

$$c_1 = \frac{p_1}{p_{a1}}\ ;\ c_2 = \frac{p_2}{p_{a2}}. \qquad (54)$$

În (54) avem notate:

— p_1, p_2 presiunile vaporilor de produs la temperaturile T_1, respectiv T_2;

— p_{a1} se determină după [11] cu relația

$$p_{a1} = p - p_{sv}, \qquad (55)$$

în care p_{sv} este presiunea supapei de respirație la vacuum ($p_{sv} = 40$ mm. col · H_2O);

— p_{a2} se determină după [11] cu relația

$$p_{a2} = p + p_{sd} \qquad (56)$$

în care p_{sd} este presiunea supapei de respirație la deschidere ($p_{sd} = 150$ mm. col. H_2O);

— c este concentrația medie a vaporilor de produs [$c = (c_1 + c_2)/2$];

— c' este dat de raportul p_m/p, unde p_m este presiunea vaporilor de produs la temperatura medie T;

— M este greutatea moleculară a vaporilor produsului depozitat și care se poate determina după [7] cu relația

$$M = 60 + 0{,}3\,t + 0{,}001\,t^2 \qquad \text{kg/mol}, \qquad (57)$$

în care t se ia egal cu temperatura inițială de fierbere din care se scad 30°C.

Dacă relațiile (52) și (53) se divid cu volumul rezervorului de depozitare V_r, atunci vom obține pierderile specifice ale produsului depozitat prin respirațiile mici și mari

$$G_z = \eta_{vz} p \left[\frac{1 - c_1}{T_1} - \frac{1 - c_2}{T_2} \right] \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{848} \quad [\text{kg/m}^3 \cdot \text{zi}], \tag{58}$$

$$G_c = \eta_{vc} \frac{p}{T'} c' \cdot \frac{M}{848} \quad [\text{kg/m}^3 \cdot \text{ciclu}], \tag{59}$$

în care η_{vz}, η_{vc} sînt coeficienții de volum obținuți prin raportarea volumelor de vapori ai produsului la volumul rezervorului. Pe de altă parte, în [9] se indică următoarele valori pentru coeficienții de umplere ai rezervoarelor pentru produse petroliere:

— pentru benzine . . . . . = 0,86 ÷ 0,865;

— pentru alte produse petroliere . . . . . = 0,92.

Dacă se ține seama că coeficientul de umplere al rezervorului se poate determina din relația

$$\eta_u = 1 - \eta_d - \eta_m, \tag{60}$$

în care

— η_d este coeficientul spațiului de dilatare a produsului din rezervor;

— η_m — coeficientul spațiului „mort" al rezervorului (raportul dintre volumul rezervorului dispus sub conducta de golire sau trasul pompelor și volumul total al rezervorului), atunci se constată ușor că putem nota

$$\eta_{vc} = \eta_u. \tag{61}$$

În ceea ce privește pe G din (52), se constată că acesta este variabil deoarece volumul vaporilor de produs V se modifică în fiecare zi (acest volum crește pe măsura desfacerii produsului), astfel încît în cele

$$n_k = \frac{T}{k}, \tag{62}$$

zile rezervate unui ciclu de pompare succesivă, rezervorul este din nou golit (pînă la spațiul mort) și pregătit pentru a recepționa o nouă partidă de produs, pompat succesiv în cadrul ciclului următor. Așadar, dacă vom nota

$$p \left[\frac{1 - c_1}{T_1} - \frac{1 - c_2}{T_2} \right] \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{848} = H \tag{63}$$

și dacă vom lua în considerație valorile relative ale volumelor (volumul spațiului de vapori raportat la volumul rezervorului — V/V_r), atunci pierderile de produs pe toate cele n_k zile ale ciclului vor fi date de seria

$$G_k = \sum_{i=1}^{n_k} G_i = \left[n_k \eta_{id} + \eta_{iv} \frac{1}{n_k - 1} (1 + 2 + \ldots + (n_k - 1)) \right] H$$

sau

$$G_k = n_k \left[\eta_{id} + \frac{\eta_{iv}}{2} \right] H,$$

iar pierderea medie pe o zi va fi dată de expresia

$$G_z = \frac{G_k}{n_k} = \left[\eta_{id} + \frac{\eta_{iv}}{2} \right] H. \qquad (64)$$

Comparînd relațiile (59) și (64), rezultă imediat expresia coeficientului de volum căutat

$$\eta_{vz} = \eta_{id} + \frac{\eta_{iv}}{2}. \qquad (65$$

În vederea determinării practice a pierderilor de produse prin respirația rezervoarelor s-a luat în considerație experiența unor institute de proiectare din țară în ceea ce privește dotarea cu capacități de depozitare a depozitelor de aprovizionare și desfacere a produselor petroliere. S-a constatat că cele mai utilizate tipuri de rezervoare sînt cele de 5500 m³ și, respectiv, de 10 000 m³ cu capac fix. În tabelul 1 sînt dați unii parametri constructivi pentru aceste două tipuri de rezervoare ca și coeficienții de volum corespunzători. În calculul pierderilor specifice de produse s-au luat în considerație ambele variante de rezervor, dar diferențele sînt nesemnificative. În tabelul 2 sînt date valorile pierderilor specifice G_z și G_c pentru unele produse petroliere normale și nestabilizate. Aceste valori reprezintă de fapt valorile medii pe perioada unui an, variațiile lunare ale pierderilor fiind destul de mari. Pentru calculul pierderilor G_z și G_c medii lunare s-au extras din atlasul climatologic [13] temperaturile medii maxime și minime corespunzătoare zonei Ploiești. Din tabelul 2 se poate constata că pierderile specifice ale produselor nestabilizate sînt cu mult mai mari decît ale produselor normale și ele pot apare chiar la unele produse inferioare (petrol lampant S) la care în mod obișnuit nu se pune problema pierderilor de produs prin respirația rezervoarelor. Desigur că acest element poate influența substanțial problema optimizării în cazul în care transportul succesiv se realizează în cicluri cu produse normale și nestabilizate.

De asemenea, se poate remarca că pierderile specifice ciclice G_c sînt de circa (8÷12) ori mai mari decît pierderile specifice zilnice (cel puțin

Tabelul nr. 1

Coeficienții de volum η_{vz} și η_{vc} pentru rezervoarele de 5500 și 10.000 m³

Nr. crt.	Caracteristicile principale ale rezervorului / Tipul rezervorului		Înălțimea rezervorului H [m]	Diametrul rezervorului D [m]	Diametrul conductei de tragere [mm]	Cota de montare a conductei de tragere h [mm]	η_{im}	η_{iu}	η_{id}	Valori luate în calcul	
										η_{ivz}	η_{ivc}
1	5500 [m³]	pt. benzine	10,835	26	200	550	0,053	0,860 ÷0,865	0,087 ÷0,082	0,5155	0,863
		pt. alte produse					0,053	0,92	0,027	0.487	0,918
2	10 000 [m³]	pt. benzine	13	32,41	200 ÷ 250	550 ÷ 650	0,064	0,860 ÷0,865	0,076 ÷0,071	0,5045	0,863
		pt. alte produse					0,064	0,92	0,016	0,477	0,918

Tabelul nr. 2

Valorile medii pentru pierderile specifice G_z și G_c ale unor produse petroliere normale și de excepție

Tipul pierderilor / Tipul produsului petrolier		Produse normale									Produse nestabilizate			
		Motorina B	Motorina P	Petrol lampant B	Pentrol lampant P	Comb. T_1 B	Benzină CO—75 B	Benzină CO—90 B	Benzină CO—92 P	Benzină CO—98 B	Petrol lampant S	Benzină CO—70 S	Benzină CO—95,8 P	Benzină CO—98 S
Pierderea specifică prin respirația mică (zilnică) a rezervoarelor — G_z [kg/m³.zi]	Rezervor 500 [m³]	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,0225	0,0286	0,0174	0,040	0,0123	0,055	0,123	0,123
	Rezervor 10000 [m³]	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,022	0,028	0,017	0,039	0,012	0,054	0,120	0,120
Pierderea specifică prin respirația mare (ciclică) a rezervoarelor — G_c [kg/m³.ciclu]	Rezervor 5500 [m³]	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,262	0,323	0,208	0,369	0,220	0,476	0,656	0,658
	Rezervor 10000 [m³]	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,262	0,323	0,208	0,369	0,220	0,476	0,656	0,658

în cazul produselor normale). De aceea este posibil ca în cadrul unui transport succesiv cu un număr mare de cicluri

$$k > T \frac{G_z^2}{G_c} \tag{66}$$

anume acest parametru să posede ponderea mai mare la stabilirea optimului. Oricum, din cele anterioare se poate constata într-o suficientă măsură, că problema optimului în transportul succesiv de produse nu poate fi tratată fără a lua în considerație pierderile de produse datorate respirației rezervoarelor.

4. INFLUENȚA NUMĂRULUI DE CICLURI ASUPRA CONCENTRAȚIEI OPTIME DE SECȚIONARE C_D^0

Dacă se ține seama de (37) și (38), atunci (45) poate fi transcrisă sub forma

$$C_D^0 = \frac{A_1^D + k\,B^D}{A_1^D + k\,B_1^D}, \tag{67}$$

expresie ce ne arată cum variază concentrația optimă de secționare C_D^0 în funcție de numărul ciclurilor k. În (67) avem următoarele constante:

$$A^D = [\sigma\alpha + C_s + T\,G_{zp}C_p]\,\eta_j K_{pj}; \quad B^D = [G_{cp}C_p - D_{jp}\gamma_j\eta_p K_{jp}]\,\eta_j K_{pj};$$

$$A_1^D = (\sigma\alpha + C_s)\,(\eta_j K_{pj} + \eta_p K_{jp}) + T(G_{zj}C_j\eta_p K_{jp} + G_{zp}C_p\eta_j K_{pj}); \tag{68}$$

$$B_1^D = G_{cj}C_j\eta_p K_{jp} + G_{cp}C_p\eta_j K_{pj} + D_{jp}(\gamma_p - \gamma_j)\,\eta_j\eta_p K_{jp}K_{pj},$$

care depind de unii parametri tehnico-economici ai produselor.

În activitatea practică a pompărilor succesive este posibil însă să se opereze și cu cicluri în care ordinea produselor este inversă în raport cu schema din (1)

$$\leftarrow \ldots \xrightarrow{P_p} (P_p, P_j) \xrightarrow{P_j} (P_j, P_m) \xrightarrow{P_m} \ldots, \tag{69}$$

adică ciclul începe cu produsul cel mai superior și se încheie cu produsul cel mai inferior. Astfel de cicluri se vor denumi cicluri inverse, iar parametrii respectivi vor purta indicele I. Referitor la ciclurile inverse, relația (30) trebuie scrisă sub forma

$$C^I = D_{jp}\,\Omega_{jp} k\,[\gamma_j f_1(z) - \gamma_p f_2(z)] \quad \text{[lei/an]}, \tag{70}$$

iar expresiile constantelor B și B_1 din (68) devin

$$B^I = [G_{cp}\,C_p + D_{jp}\,\gamma_j\,\eta_p\,K_{jp}]\,\eta_j\,K_{pj}, \tag{71}$$

$$B_1^I = G_{cj}\, C_j\, \eta_p\, K_{jp} + G_{cp}\, C_p\, \eta_j\, K_{pj} + D_{pj}\,(\gamma_j - \gamma_p)\,\eta_j\,\eta_p\,K_{jp}\,K_{pj}$$

datorită modificării expresiei lui C_r.

Din analiza relațiilor (68) și (71) se desprind unele observații :

a) pentru ambele tipuri de cicluri constantele A și A_1 nu pot avea decît valori pozitive, iar B și B_1 pot avea valori pozitive sau negative, mai ales în cazul în care G_{cj}, $G_{cp} = 0$ (produse fără pierderi : motorina, petrol lampant, combustibil T_1) ;

b) există relațiile

$$A_1^D = A_1^I = A_1\,;\; B_1^D = B_1^I = B_1 \tag{72}$$

deoarece produsul cu indice j din cadrul ciclului direct devine produs de indice p din cadrul ciclului invers, iar semnul diferenței (—) se păstrează la trecerea de la ciclul direct la cel invers ;

c) de asemenea, avînd în vedere „regula de comutare" a indicilor la trecerea de la un tip de produs la altul, există relațiile

$$A_1^D = A^D + A^I = A_1^I = A_1, \tag{73}$$

$$B_1^D = B^D + B^I = B_1^I = B_1, \tag{74}$$

d) conform (67), pentru un ciclu invers, concentrația optimă de secționare are expresia

$$C_1^D = \frac{A^I + k\,B^I}{A_1 + k\,B_1}, \tag{75}$$

iar dacă ținem seama de (72), (73) și (74), rezultă imediat relația

$$C_D^0 + C_I^0 = 1, \tag{76}$$

ceea ce înseamnă că concentrațiile C_D^0 și C_I^D sînt complementare.

Analizînd expresia $dC^0/dk = 0$, rezultă că funcția $C^0 = f(k)$ nu are un extrem, valorile mai deosebite ale funcției $C^0 = f(k)$ fiind date în tabelul 3.

Tabelul nr. 3

Valorile principale pentru $C^0 = f(k)$

Valoarea argumentului k	$-\frac{A_1}{B_1}$	$-\frac{B}{A}$	0	$\frac{A_1 - A}{B - B_1}$	∞
Valoarea funcției C^0	∞	0	$C^0_{zero} = \frac{A}{A_1}$	1	$C^0_{\infty} = \frac{B}{B_1}$

Pentru valorile extreme ale numărului de cicluri rezultă expresiile concentrației optime de secționare, avem

$$C^0_{zero} = \lim_{k\to 0} C^0 = \frac{A}{A_1} = \frac{1}{1 + \frac{K_{jp}\eta_p}{K_{pj}\eta_j} \cdot \frac{1 + \frac{TG_{zj}C_j}{\sigma\alpha + C_s}}{1 + \frac{TG_{zp}C_p}{\sigma\alpha + C_s}}}, \tag{77}$$

respectiv

$$C^0_{\infty} = \lim_{k\to\infty} C^0 = \frac{B}{B_1} = \frac{1}{1 + \frac{K_{jp}\eta_p}{K_{pj}\eta_j} \cdot \frac{G_{cj}C_p \pm D_{jp}\gamma_p K_{pj}\eta_j}{G_{cp}C_p \mp D_{jp}\gamma_j K_{jp}\eta_p}}, \tag{78}$$

din care se desprind, de asemenea, unele observații :

a) C^0_{zero} este influențat mai ales de pierderile specifice zilnice, iar C^0_{∞} de către pierderile specifice ciclice de produse ;

b) C^0_{zero} va avea valori subunitare pentru orice tip de ciclu (direct sau invers), pe cînd C^0_{∞} poate avea valori subunitare sau supraunitare, pozitive sau negative. Semnificația fizică directă, în cadrul transportului succesiv de produse petroliere, pentru limitele din (77) și (78) nu poate fi găsită, ele ne arată doar către ce valori pot tinde concentrațiile optime cînd numărul de cicluri scade (pentru $k = 0$ nu mai poate fi vorba de transport succesiv propriu-zis de produse) sau crește foarte mult și care sînt parametrii care încep să aibă pondere în stabilirea valorii concentrației optime. Desigur nici $C^0_{\infty} > 1$ nu are temei fizic direct, iar acest aspect trebuie interpretat astfel : există un număr de cicluri k_1 la care C^0 va atinge valoarea unitară (maximă), iar peste acest număr de cicluri, secționarea optimă a zonei de amestec corespunzătoare perechii de produse respective, pe baza condițiilor de optimizare stabilite, nu mai este posibilă. Similar, se poate interpreta și valoarea negativă (subunitară sau supraunitară) pentru C^0.

Pentru studiul variației concentrației optime de secționare C^0 în funcție de numărul de cicluri k a fost întocmit un program corespunzător în limbaj FORTRAN pentru un calculator FELIX C.256. În figura 4 este redată schema logică de principiu a programului.

Prin program se analizează în total șase variante de cicluri ce corespund :

— celor trei grupe de produse tipice unor pompări succesive de produse petroliere : grupa produselor normale, grupa produselor nestabilizate și grupa combinată de produse (formată din produse normale și nestabilizate) ce se transportă în :

— cele două variante de cicluri : ciclul direct (începe cu produs inferior și se încheie cu produs superior) și ciclul invers (începe cu produs superior și se încheie cu produs inferior).

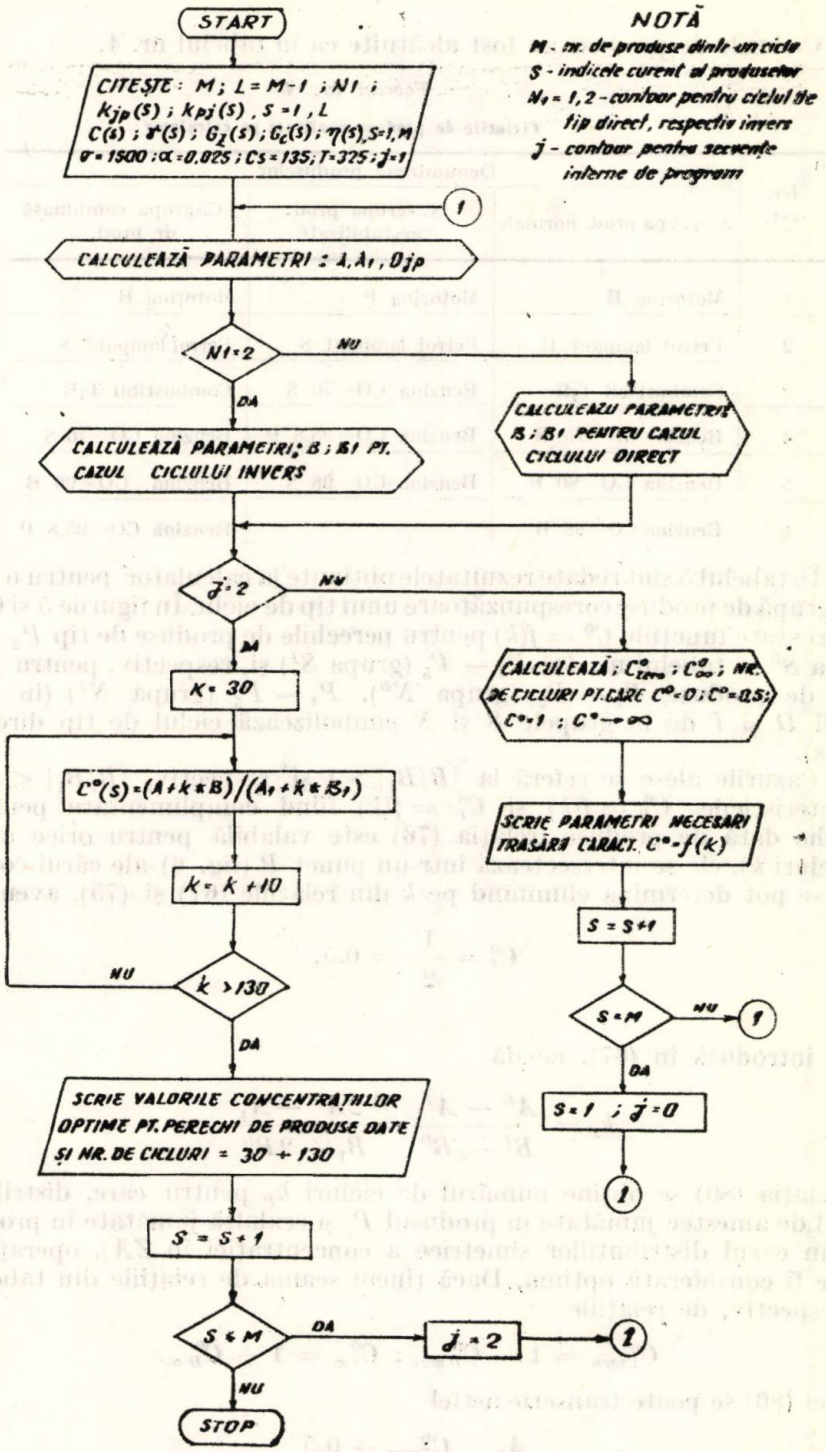

START
CITEȘTE: M; L = M-1; N1;
$k_{jp}(S)$; $k_{pj}(S)$, S = 1, L
C(s); $\vartheta^*(S)$; $G_L(S)$; $G_C(S)$; $\eta(S)$, S=1,M
ϑ = 1500; α = 0,025; Cs = 135; T = 325; j = 1
1
CALCULEAZĂ PARAMETRI: A, A_1, D_{jp}
N1 = 2
NU
DA
CALCULEAZĂ PARAMETRII B; B_1 PT. CAZUL CICLULUI INVERS
CALCULEAZĂ PARAMETRII B; B_1 PENTRU CAZUL CICLULUI DIRECT
j = 2
NU
DA
K = 30
$C^\circ(S) = (A + k * B)/(A_1 + k * B_1)$
K = K + 10
NU
k > 130
DA
SCRIE VALORILE CONCENTRAȚIILOR OPTIME PT. PERECHI DE PRODUSE DATE ȘI NR. DE CICLURI = 30 ÷ 130
S = S + 1
S < M
DA
j = 2
1
NU
STOP
CALCULEAZĂ: C°_{zero}; C°_{∞}; NR. DE CICLURI PT. CARE $C^\circ = 0$; $C^\circ = 0,5$; $C^\circ = 1$; $C^\circ \to \infty$
SCRIE PARAMETRI NECESARI TRASĂRII CARACT. $C^\circ = f(k)$
S = S + 1
S < M
NU
1
DA
S = 1; j = 0
1
NOTĂ
M - nr. de produse dintr-un ciclu
S - indicele curent al produselor
N_1 = 1, 2 - contor pentru ciclul de tip direct, respectiv invers
j - contor pentru secvențe interne de program

Fig. 4

Ciclurile de produse au fost alcătuite ca în tabelul nr. 4.

Tabelul nr. 4

Ciclurile de produse analizate pe calculator

Nr. crt,	Denumirea produselor		
	S. -grupa prod. normale	N. -grupa prod. nestabilizate	C.-grupa combinată de prod.
1	Motorina B	Motorina P	Motorina B
2	Petrol lampant B	Petrol lampant S	Petrol lampant S
3	Combustibil T_1B	Benzina CO—70 S	Combustibil T_1B
4	Benzina CO—75 B	Benzina CO—95,8 P	Benzina CO—70 S
5	Benzina CO—90 B	Benzina CO—98 S	Benzină CO—90 B
6	Benzina CO—98 B		Benzină CO—95,8 P

În tabelul 5 sînt redate rezultatele obținute la calculator pentru o anumită grupă de produse corespunzătoare unui tip de ciclu. În figurile 5 și 6 sînt reprezentate funcțiile $C^0 = f(k)$ pentru perechile de produse de tip $P_2 - P_3$ (grupa S^D — tabelul nr. 4); $P_4 - P_5$ (grupa S^I) și, respectiv, pentru perechile de produse $P_1 - P_2$ (grupa N^D), $P_4 - P_5$ (grupa N^I) (în care indicii D și I de la grupele S și N simbolizează ciclul de tip direct și invers).

Cazurile alese se referă la $|B/B_1| > 1$ și, respectiv, $|B/B_1| < 1$. Caracteristicile $C^0_D = f(k)$ și $C^0_I = f(k)$ fiind complimentare pentru o pereche dată de produse (relația (76) este valabilă pentru orice număr de cicluri k), ele se intersectează într-un punct P (fig. 6) ale cărui coordonate se pot determina eliminînd pe k din relațiile (67) și (75), avem

$$C^0_P = \frac{1}{2} = 0{,}5, \tag{79}$$

care, introdusă în (67), ne dă

$$k_P = \frac{A^D - A^I}{B^I - B^D} = \frac{2A^D - A_1}{B_1 - 2B^D}. \tag{80}$$

Cu relația (80) se obține numărul de cicluri k_P pentru care, distribuind dopul de amestec jumătate în produsul P_j și cealaltă jumătate în produsul P_g (în cazul distribuțiilor simetrice a concentrației în ZA), operațiunea poate fi considerată optimă. Dacă ținem seama de relațiile din tabelul 3 și, respectiv, de relațiile

$$C^0_{I\,\text{zero}} = 1 - C^0_{D\,\text{zero}};\quad C^0_{I\infty} = 1 - C^0_{D\infty}, \tag{81}$$

atunci (80) se poate transcrie astfel

$$k_P = k_{0,5} = \frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{C^0_{D\text{zero}} - 0{,}5}{0{,}5 - C^0_{D\infty}}, \tag{82}$$

Tabelul nr. 5

Grupa C. – prod. normale și nestabil. – ciclul invers: începe cu prod. sup. (benz. 98) — se termină cu prod. inf. (motorină)

Per. prod.	COZERO	COINF	NCICE QO	NCICE Q1	NCICE Q05	NCICINF	A	A_1	B	B_1
1–2	0,2008	1,707	$0,29169.10^{2}$	$0,26755.10^{3}$	$0,60833.10^{2}$	$0,25669.10^{3}$	4,75	23,64	$0,16270.10^{0}$	$0,92086.10^{-1}$
2–3	0,2051	5,523	$0,15825.10^{2}$	$0,74888.10^{2}$	$0,25076.10^{2}$	$0,42608.10^{3}$	4,08	19,90	$0,25794.10^{0}$	$0,46706.10^{-1}$
3–4	0,1250	0,604	$0,96540.10^{2}$	$-0,10293.10^{4}$	$0,16804.10^{4}$	$0,46622.10^{3}$	0,74	5,95	$0,77101.10^{-2}$	$0,12772.10^{-1}$
4–5	0,0925	26,208	$0,33778.10^{2}$	$0,34456.10^{3}$	$0,15171.10^{3}$	$0,95707.10^{4}$	1,01	17,45	$0,47782.10^{-1}$	$0,18232.10^{-2}$
5–6	0,2274	0,829	$0,33471.10^{3}$	$-0,55070.10^{4}$	$0,10112.10^{4}$	$0,12199.10^{4}$	4,75	20,89	$0,14193.10^{-1}$	$0,17124.10^{-1}$

Variația concentrației optime funcție de nr. ciclurilor

Per. prod	CO(30)	CO(40)	CO(50)	CO(60)	CO(70)	CO(80)	CO(90)	CO(100)	CO(110)	CO(120)	CO(130)	CO(140)
1–2	0,36464	0,41190	0,45608	0,49747	0,53032	0,57287	0,60731	0,63981	0,67053	0,69965	0,72725	0,75345
2–3	0,55488	0,66140	0,76357	0,86148	0,95544	0,04568	1,13243	1,21588	1,29622	1,37361	1,44823	1,52020
3–4	0,15394	0,16282	0,17136	0,17958	0,18749	0,19511	0,20245	0,20954	0,21638	0,22298	0,22931	0,23554
4–5	0,17410	0,20118	0,22821	0,25519	0,28211	0,30898	0,33578	0,36254	0,38923	0,41588	0,44240	0,46900
5–6	0,24184	0,24650	0,25109	0,25560	0,26004	0,26442	0,26873	0,27297	0,27715	0,28127	0,28533	0,28932

LEGENDA

– COZERO = C^0 pentru $k = 0$
– COINF = C^0 pentru $k \to \infty$
– NCICE QO = nr. de cicluri pentru care $C^0 = 0$
– NCICE Q1 = nr. de cicluri pentru care $C^0 = 1$
– NCICE Q05 = nr. de cicluri pentru care $C^0 = 0,5$
– NCICINF = nr. de cicluri pentru care $C^0 = \infty$

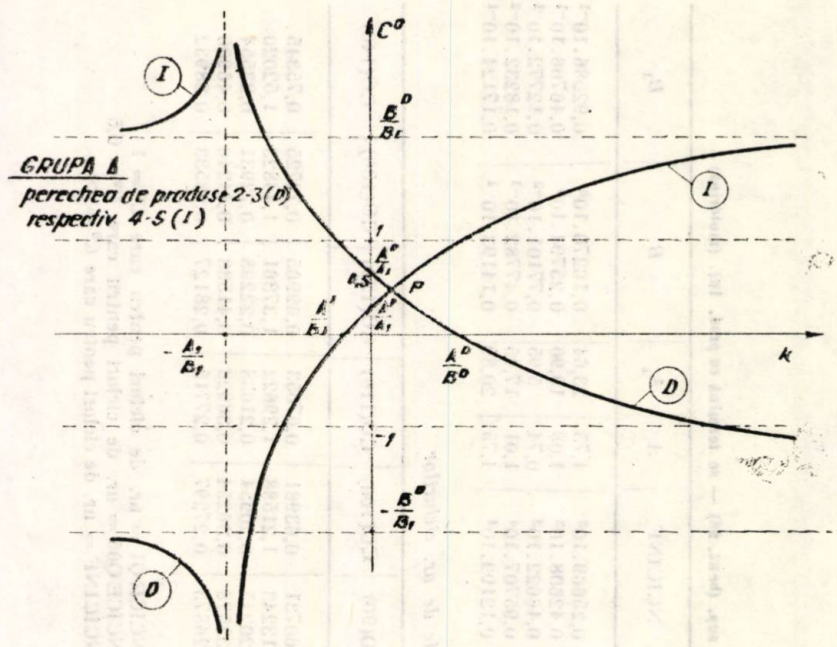

GRUPA A
perechea de produse 2-3(D)
respectiv 4-5 (I)
I
D
P
k

Fig. 5

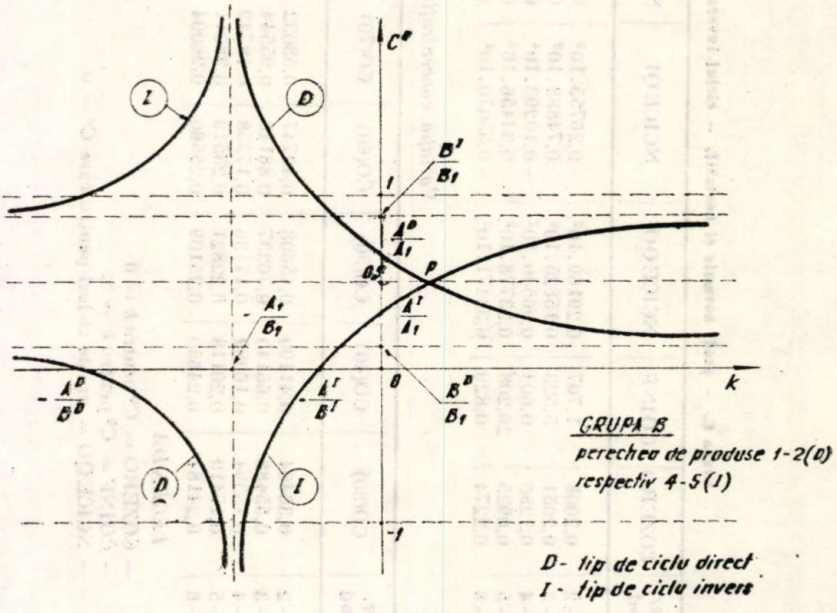

GRUPA B
perechea de produse 1-2(D)
respectiv 4-5(I)
D- tip de ciclu direct
I - tip de ciclu invers
I
D
P
k

Fig. 6

iar dacă realizăm o translaţie a axelor de coordonate astfel încît originea lor să ajungă în punctul P, atunci axa k devine axa de simetrie pentru caracteristicile complimentare $C^0 = f(k)$. Exprimată în noul sistem de coordonate, funcţia (67) devine

$$C^0_{Dx} = \frac{0{,}5\, k_x\, (B_1 - 2B^D)^2}{2(A_1B^D - A^DB_1) + k_x\,(2B^D - B_1)B_1}, \tag{83}$$

în care C^0_{Dx} şi k_x sînt coordonatele curente în noul sistem de coordonate cu centrul în punctul P pentru cazul ciclurilor directe. Dacă se iau în consideraţie relaţiile (72) şi (74), atunci funcţia complimentară celei din (83) are forma

$$C^0_{Ix} = \frac{0{,}5\, k_x (B_1 - 2B^I)^2}{2(A_1B^I - A^IB_1) + k_k(2B^I - B_1)B_1}. \tag{84}$$

Expresiile (83) şi (84) conduc imediat la relaţia

$$C^0_{Dx} + C^0_{Ix} = 0, \tag{85}$$

care este valabilă, de asemenea, pentru orice număr dat de cicluri. Deci în comparaţie cu funcţia din (67), ale cărei limite de variaţie sînt $(0 \div 1)$, funcţia din (83) are limitele de variaţie cuprinse între $(-0{,}5)$ şi $(+0{,}5)$. Utilitatea reprezentării caracteristicilor $C^0 = f(k)$ prin expresii de tipul (83) sau (84) constă în aceea că (în cazul distribuţiilor simetrice a concentraţiei în zona de amestec) concentraţiile determinate cu aceste relaţii se raportează totdeauna la concentraţia secţiunii de produs dispuse în centrul dopului de amestec.

5. CONCLUZII

În cazul în care zona de amestec, formată în timpul transportului succesiv de produse, se repartizează pe rezervoarele produselor standard, secţionarea acesteia trebuie să se facă după o concentraţie optimă a cărei expresie — relaţia (45) sau (67) — se stabileşte în funcţie de unii parametri tehnico-economici dintre care nu pot fi neglijaţi cei ce se referă la pierderile de produse prin respiraţia rezervoarelor.

Referitor la numărul de cicluri, concentraţia optimă C^0 nu poate fi considerată constantă (decît doar într-o largă măsură) nici măcar în domeniul uzual al numărului de cicluri pe an ($k = 60 \div 100$). Spectrul de variaţie al concentraţiei optime în funcţie de numărul ciclurilor, poate fi mai restrîns ($2 \div 4\,\%$) sau mai larg pînă la ($30 \div 35\,\%$) şi el depinde de tipul produselor şi de ordonarea lor în cadrul unui ciclu. Astfel, în cazul produselor fără pierderi, domeniul de variaţie al funcţiei $C^0 = f(k)$ este în general mic, iar în cazul produselor cu pierderi prin respiraţia rezervoarelor, do-

meniul de variație crește mult. Într-adevăr, în cazul G_z, $G_e \equiv 0$, relația (67), ținînd seama de (68), devine

$$C^0 = \frac{(\sigma\alpha + C_s)\,\eta_j K_{pj} + k\,(-D_{jp}\,\gamma_j\,\eta_j K_{jp} K_{pj})}{(\sigma\alpha + C_s)\,(\eta_j K_{pj} + \eta_p K_{jp}) + k\,D_{jp}\,(\gamma_j - \gamma_p)\eta_j\eta_p K_{jp} K_{pj}}. \tag{86}$$

Coeficienții lui k din (86) avînd valori mici în raport cu termenii liberi, rezultă imediat influența scăzută a variației lui k asupra lui C^0. Din analiza rezultatelor obținute la calculator rezultă că cele mai mari variații ale lui C^0 se produc în cazul perechilor produs nestabilizat urmat de produs fără pierderi, iar în cazul perechilor de produse cu pierderi mari (produse nestabilizate) sau pierderi mici (produse normale) dar de același ordin de mărime, domeniul de variație al funcției $C^0 = f(k)$ rămîne în general mic. De aici necesitatea de a nu realiza grupe combinate de produse (normale și nestabilizate). Acest aspect este important deoarece în cazul unei perechi de produse : unul cu pierderi mari urmat de unul cu pierderi mici (sau fără pierderi), poate apare situația imposibilității secționării optime a zonei de amestec (tabelul 5 — perechea de produse $P_2 - P_3$) chiar în domeniul uzual al numărului de cicluri (apar $C^0 > 1$ sau $C^0 < 0$). În această idee, în cadrul unui program de transport succesiv de produse, este necesar ca un ciclu dat să fie de tip invers celui precedent — adică succesiunea să se realizeze conform schemei

$$\leftarrow \ldots \xrightarrow{P_1} (P_1, P_2) \xrightarrow{P_2} \ldots \xrightarrow{P_{n-1}} (P_{n-1}, P_n) \xrightarrow{P_n} (P_n, P_{n-1}) \xrightarrow{P_{n-1}} \ldots \xrightarrow{P_2} (P_2, P_1) \xrightarrow{P_1} \tag{87}$$

în care caz se evită „contactul" direct dintre produsul cel mai superior al unui ciclu cu produsul cel mai inferior (sau invers). De altfel, evitarea acestei situații este de dorit și din punct de vedere al volumelor de amestec, ce se formează, schema din (87) permițînd ca în „nodul de racordare" dintre două cicluri de tipul (P_n, P_n) sau (P_1, P_1), zona de amestec să devină nulă.

Primită la redacție la 16 ianuarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. K. D. Frolov, B. N. Golubev, *Cisla ţiklov pri posledovatelnoi perekacike*, Transport i hranenie nefti i nefteproduktov, *1* (1964).
2. V. S. Iablonski ş.a., *Proektirovanie, ekspluatatiia i remont nefteprodukto-provodov*, Nedra, Moskva, p. 145—224, 1965.
3. V. A. Iufin, *Metodica tehnico-ekonomiceskogo sravneniia posle dovatelnoi perekaciki nefteproduktov s razdeliteliami i bez razdelitelei*, Ekonomika neftedobîvaiuşcei promîşlennosti, 7 (1972).
4. N. N. Konstantinov, *Borba s poteriami ot ispareniia nefti i nefteproduktov*, Gostoptehizdat, p. 120—189, 1961.
5. V. I. Maron, *Peremeşivanie vzaimno-rastvorimîh jidkostei*, Jurnal prikladnoi mehaniki i tehniceskoi fiziki, *3* (1971).

6. V. I. Maron, *Turbulentnoe peremeşivanie jidkostei razlicinoi plotnosti, dvijuhscihstia v trube.* Trudî, vîpusk 101 Institut neftehimiceskoi i gazovoi promîşlennosti im. akad. I. M. Gubkina, izd. Nedra, Moskva, 1972.

7. N. M. Olenev, *Hranenie nefti i nefteproduktov*, Nedra, Leningrad, p. 339—354, 1964.

8. T. Oroveanu, *Sur un problème de diffusion convective en régime turbulent*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **19**, *2*, 163—188, (1974).

9. G. A. Pektemirov, *Metodika rasceta koeffiţienta ispolzovaniia emkosti rezervuarov dlia hraneniia nefteproduktov*, Neftianoe hoziaistvo, *1* (1969).

10. I. Toma, *Îndreptar pentru transportul şi depozitarea ţiţeiului şi produselor petroliere*, Ed. tehnică, Bucureşti, p. 155—166, 1962.

11. P. I. Tugunov, *Transport i hranenie nefti i gaza*, Nedra, Moskva, p. 205—215, 1975.

12. R. C. Ţunescu, *Tehnologia distilării ţiţeiului*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, p. 85—156, 1970.

13. * * * *Atlas climatologic al Republicii Socialiste România*, Comitetul de stat al apelor, Institutul meteorologic Bucureşti, 1966.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

OPTIMIZAREA PROBABILISTĂ CU VALORI DISCRETE A STRUCTURILOR METALICE ÎN DOMENIUL PLASTIC[1)]

de DAN FRANGOPOL
Institutul de construcții București

Plecînd de la formularea generală a problemei de optimizare probabilistă, care intervine în dimensionarea structurilor metalice în domeniul plastic, se arată că tehnica actuală de alegere a secțiunilor profilelor nu este totdeauna cea mai indicată. Metoda propusă, permițînd luarea în considerare a tuturor soluțiilor posibile, are avantajul de a furniza soluții mai economice decît cele preconizate în prezent.

1. Optimizarea probabilistă a structurilor se reduce din punct de vedere matematic la găsirea soluției unei probleme de programare stochastică. În această lucrare se presupune că o soluție este complet cunoscută cînd se atribuie valori unor variabile de dimensionare $Z_j, j = 1, 2, \ldots, n$. Vectorul n-dimensional al variabilelor de dimensionare Z_j, notat $\{Z\}$, este denumit vector soluție.

2. Problema dimensionării structurilor în domeniul plastic poate fi formulată ca o problemă de optimizare probabilistă după cum urmează :

$$\text{„Găsește } \{Z\} = \{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}^T \tag{1}$$

$$\text{astfel încît } G\,[\{Z\}] \text{ să fie minim} \tag{2}$$

și condiția de siguranță a structurii în raport cu cedarea plastică

$$P_{(-)} \leqslant P_{(-)\,a} \tag{3}$$

să fie respectată".

În formularea generală (1)—(3), $\{Z\}$ este vectorul soluției; $G\ [.]$ este greutatea totală a structurii și reprezintă funcția-obiectiv, adică funcția care exprimă eficiența unei soluții; $P_{(-)}$ este probabilitatea de cedare plastică a structurii; $P_{(-)a}$ este probabilitatea de distrugere fixată apriori și considerată acceptabilă pentru structura respectivă.

Este evident că atît $G\,[.]$, cît și $P_{(-)}$ sînt ambele funcții de $\{Z\}$.

[1)] Text revăzut al comunicării „Discrete-optimum probability solution of plastic structures" prezentate la a doua Conferință Anuală a Secției de Inginerie Mecanică (EMD) din cadrul Societății Americane de Inginerie de Construcții (ASCE), North Carolina State University, Raleigh, S.U.A., 23—25 mai, 1977.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 3, 1979, P. 419—424

3. În cazul structurilor metalice alcătuite din bare utilizate curent în construcții, se poate admite că minimizarea greutății totale a structurii (2) revine la minimizarea expresiei liniare

$$F = \sum_{i=1}^{k} L_i \bar{M}_i , \tag{4}$$

în care k este numărul barelor din structură pentru care valorile medii ale momentelor plastice M_i sînt diferite, iar L_i este lungimea totală a barelor caracterizate prin aceeași valoare medie a momentului plastic $\bar{M}_i$.

Între momentul plastic din secțiunea critică j, notat M_j, și limita de curgere a oțelului σ_c există relația

$$M_j = W_j \cdot \sigma_c , \tag{5}$$

în care W_j este modulul de rezistență plastic al secțiunii j. Deoarece variabilitatea modulului de rezistență plastic W_j este în general extrem de redusă în comparație cu cea a limitei de curgere σ_c, se poate considera, fără riscul unor erori semnificative, existența relației aproximative

$$V(M_j) \simeq V(\sigma_c) \tag{6.a}$$

în locul relației exacte

$$V(M_j) = \sqrt{V^2(W_j) + V^2(\sigma_c)}, \tag{6.b}$$

în care prin $V(X)$ s-a notat coeficientul de variație al variabilei aleatoare X.

În consecință, funcția — obiectiv (4) se poate scrie sub forma

$$F = \sum_{i=1}^{k} L_i W_i \cdot \bar{\sigma}_c , \tag{7}$$

în care $\bar{\sigma}_c$ este valoarea medie a limitei de curgere a oțelului din care sînt confecționate barele structurii, iar i reprezintă indicele barelor pentru care modulul de rezistență plastic W_i este același. În această situație, minimizarea greutății totale (2) poate fi echivalată cu minimizarea funcției :

$$F_0 = \frac{F}{\bar{\sigma}_c} = \sum_{i=1}^{k} L_i \cdot W_i . \tag{8}$$

4. Probabilitatea de cedare plastică a unei structurii, $P_{(-)}$, este dată de relația

$$P_{(-)} = P\left(\bigcup_{j=1}^{m} E_j\right), \tag{9}$$

unde E_j reprezintă evenimentul asociat apariției mecanismului de cedare plastică j; m este numărul total al mecanismelor de cedare posibile ale structurii : $\bigcup$ este simbolul reuniunii.

Calculul exact al probabilității de cedare plastică a unei structuri fiind dificil de efectuat pe baza expresiei (9), în practică se utilizează următoarele borne ale probabilității $P_{(-)}$:

$$\max_{j=1}^{m} \{P(E_j)\} \leqslant P_{(-)} \leqslant \sum_{j=1}^{m} P(E_j). \tag{10}$$

Deoarece borna superioară, care reprezintă suma probabilităților de apariție a tuturor mecanismelor de cedare posibile ale structurii, se situează de partea siguranței, pentru calculul probabilității (9) se poate utiliza următoarea relație de aproximare :

$$P_{(-)} \simeq \sum_{j=1}^{m} P(E_j). \tag{11}$$

Se menționează că eroarea rezultată din aproximarea probabilității $P_{(-)}$ prin relația (11) este cu atît mai mică cu cît corelația existentă între variabilele aleatoare (încărcări, momente plastice...) care produc lucru mecanic în cadrul celor m mecanisme de cedare este mai slabă. Această eroare devine nulă în cazul în care cele m evenimente E_j sînt incompatibile, în sensul că apariția simultană a două sau mai multe mecanisme de cedare este imposibilă.

5. Formularea generală folosită pentru optimizarea probabilistă a structurilor în domeniul plastic (1)—(3), se reduce prin utilizarea relațiilor (8) și (11) la forma următoare :

„Găsește $\{W\} = \{W_1, W_2, \ldots, W_k\}^T$ \tag{12}

astfel încît $F_0 = \sum_{i=1}^{k} L_i W_i$ să fie minim \tag{13}

și condiția de siguranță a structurii în raport cu cedarea plastică

$$\sum_{j=1}^{m} P(E_j) \leqslant P_{(-)a} \tag{14}$$

să fie respectată".

Componentele vectorului soluție $\{W\}$ reprezintă modulele de rezistență plastice ale barelor structurii. Deoarece între vectorii $\{\bar{M}\}$ și $\{W\}$ există relația (v. rel. (5)) :

$$\{\bar{M}\} = \bar{\sigma}_c \{W\}, \tag{15}$$

găsirea vectorului $\{W\}$ revine la specificarea valorilor componentelor vectorului $\{\bar{M}\}$, adică la identificarea valorilor medii ale momentelor plastice ale barelor structurii.

6. Pe baza soluției teoretice furnizate de rezolvarea problemei de optimizare (12)—(14), proiectantul trebuie să aleagă o soluție reală din gama discretă a profilelor laminate existente pentru marca oțelului considerat. Acest aspect este dezvoltat în cele ce urmează.

Înainte de aceasta, este însă utilă ilustrarea grafică a problemei de optimizare probabilistă.

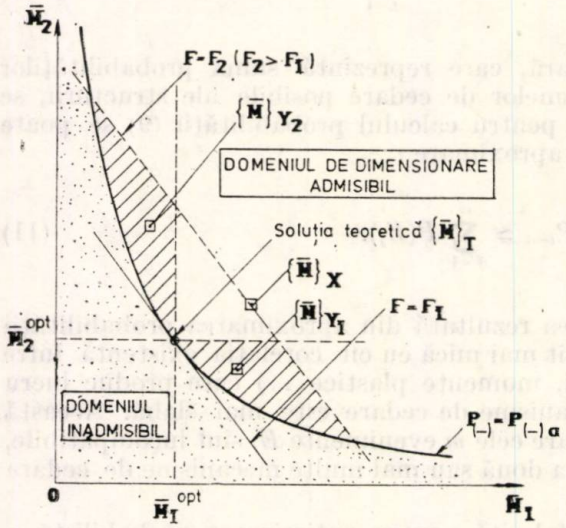


Fig. 1

Un exemplu în care soluția optimă depinde de două variabile $\bar{M}_1$ și $\bar{M}_2$ este reprezentat în figura 1. Toate punctele situate pe curba de egală siguranță $P_{(-)} = P_{(-)a}$ reprezintă soluții structurale caracterizate prin aceeași probabilitate de cedare plastică $P_{(-)}$. Sînt reprezentate, de asemenea, două contururi ($F = F_1$ și $F = F_2$) ale funcției liniare de optimizat (4) care trebuie minimizată, soluția optimă teoretică $\{\bar{M}\}_T$ (caracterizată prin componentele $\bar{M}_1^{opt}$ și $\bar{M}_2^{opt}$) care rezultă din rezolvarea problemei (12)—(14), și trei soluții discrete $\{\bar{M}\}_X$, $\{\bar{M}\}_{Y_1}$, $\{\bar{M}\}_{Y_2}$ care se obțin prin alegerea profilelor din setul de laminate standard existent.

Tehnica actuală de alegere a soluției optime-discrete constă în selectarea profilelor care sînt caracterizate printr-o valoare medie a momentelor plastice imediat superioară celei care corespunde soluției optime teoretice (în exemplul din figura 1, soluția optimă-discretă corespunzătoare acestei tehnici este notată $\{\bar{M}\}_X$). Tehnica actuală de selectare a profilelor nu este întotdeauna cea mai indicată, deoarece o regiune importantă (hașurată în figura 1) a spațiului de dimensionare admisibil, care conține soluții mai economice (exemple : $\{\bar{M}\}_{Y_1}$, $\{\bar{M}\}_{Y_2}$, ...), nu este luată în considerare.

Discuția precedentă va fi exemplificată în cele ce urmează cu ajutorll unei aplicații de calcul. Pentru aceasta se propune găsirea soluției optime a cadrului portal cu un singur nivel și cu două deschideri reprezentat în figura 2.

Încărcările P_1, P_2, H și momentele plastice M_1, M_2, M_3 se presupun variabile aleatoare care urmează o repartiție normală, iar coeficienții de variație ai acestora au valorile $V(P_1) = V(P_2) = 15\%$, $V(H) = 20\%$ și $V(M_1) = V(M_2) = V(M_3) = 10\%$; valorile medii ale încărcărilor sînt următoarele : $\bar{P}_1 = 77{,}00$ kN, $\bar{P}_2 = 115{,}50$ kN, $\bar{H} = 15{,}05$ kN. Pentru a defini complet ansamblul acestor variabile aleatoare trebuie cunoscute și valorile coeficienților de corelație dintre ele ; în această aplicație soluția

optimă teoretică se obţine presupunînd următoarele valori ale acestor coeficienţi :

— corelaţie între încărcări

$$\rho(P_1, H) = \rho(P_2, H) = \rho(P_1, P_2) = 0 ;$$

— corelaţie între momentele plastice

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(M_1, M_3) = \rho(M_2, M_3) = 1.$$

O dimensionare optimă-discretă ce respectă condiţia de siguranţă rezultă prin alegerea secţiunilor profilelor imediat superioare celor indicate de soluţia optimă teoretică, soluţie ce corespunde unei valori minime a funcţiei (4), care măsoară greutatea structurii, $F = 12\,\bar{M}_1 + 8\,\bar{M}_2 + 12\,\bar{M}_3 = 8644$ kN.m^2 şi unei probabilităţi de cedare plastică a portalului $P_{(-)a} = 10^{-5}$ (vezi linia A din tabelul 1).

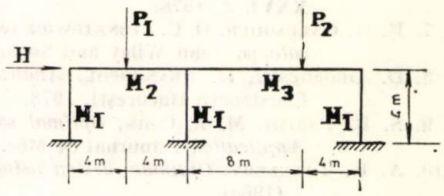


Fig. 2

Tabelul 1

Soluţii optime ale cadrului portal din figura 2

Tipul soluţiei		Soluţia optimă (kN.m)			Funcţia de optimizat (kN.m^2)	Probabilitatea de cedare plastică a structurii
		$\bar{M}_1$	$\bar{M}_2$	$\bar{M}_3$	F	$P_{(-)a}$
Teoretică	A	148,8	187,2	446,7	8644,0	10^{-5}
Cu profile	B	170,5	188,5	460,3	9077,6	$0{,}31 \cdot 10^{-5}$
laminate	C	145,2	180,5	460,3	8710,0	$0{,}94 \cdot 10^{-5}$

Dimensionarea cu valori discrete care se obţine astfel este indicată în linia B a tabelului 1 ; aceasta conduce la valoarea 9077,6 kN.m^2 a funcţiei de optimizat şi la probabilitatea de cedare plastică $0{,}31 \cdot 10^{-5} < P_{(-)a}$.

Acest mod de alegere a profilelor nu conduce întotdeauna la soluţia cea mai economică. Într-adevăr, în linia C a aceluiaşi tabel se poate remarca existenţa unei soluţii mai economice — ($F = 8710{,}0 < 9077{,}6$), care se obţine prin alegerea numai a secţiunii unei singure bare, M_3, superioară celei indicate de soluţia optimă teoretică — şi care respectă în acelaşi timp şi condiţia de siguranţă ($0{,}94 \cdot 10^{-5} < P_{(-)a}$).

7. În concluzie, se poate afirma că optimizarea probabilistă cu valori discrete a structurilor metalice alcătuite din bare cu comportare perfect plastică, propusă în această lucrare, permite obţinerea unor economii, deseori semnificative, faţă de soluţiile optime preconizate în prezent.

BIBLIOGRAFIE

1. A CELLA, R. D. LOGCHER, *Automated optimum design from discrete components*, J. Struct. Div. ASCE, **97**, ST. *1* (1971).
2. A. CELLA, *Properties of the discrete optima in structural optimization*, J. Struct. Div. ASCE, **99**, ST *3* (1972).
3. D. FRANGOPOL, *Etude probabiliste de la sécurité des constructions*, Collection des Publications de la Faculté des Sci. Appl. de l'Univ. de Liège, 64 (1977).
4. D. FRANGOPOL, N. D. HUNG, *Calcul plastique probabiliste des structures en acier formées de barres*, Construction Métallique, *1* (1977).
5. D. FRANGOPOL, J. RONDAL, *Optimum probability-based design of plastic structures*, Engineering Optimisation, **3**, Liverpool (1977).
6. D. FRANGOPOL, N. D. HUNG, J. RONDAL, *Reliability analysis and optimum probability-based design of plastic structures*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences, Série des Sci. Tech., **XXVI**, *5* (1978).
7. R. H. GALLAGHER, O. C. ZIENKIEWICZ (editors), *Optimum structural design-Theory and applications*, John Wiley and Sons, 1973.
8. D. GEORGESCU, D. FRANGOPOL, *Analiza siguranței structurilor metalice*, Vol. I, Inst. de Construcții București, 1978.
9. S. R. PARIMI, M. Z. COHN, *Optimal solutions in probabilistic structural design, Part II: Applications*, Journal de Méc. Appl., **2**, *1* (1978).
10. A. R. TOAKLERY, *Optimum design using available sections*, J. Struct. Div. ASCE, **94**, ST *5* (1968).

CALCULUL DALELOR ORTOTROPE PRIN METODA FÎŞIILOR FINITE

de CORNELIU BOB, VALENTIN BOTA, TUDOR CLIPII
Institutul politehnic „Tr. Vuia", Timişoara

În lucrarea de faţă, metoda fîşiilor finite, iniţiată de Cheung şi folosită de Loo, Cusens şi Das, este generalizată pentru calculul dalelor ortotrope oblice, frecvent întîlnite la suprastructura podurilor; s-au stabilit algoritmii de calcul şi s-au testat subrutinele necesare calculului dalelor ortotrope oblice.

1. INTRODUCERE

Dezvoltarea vertiginoasă, în ultimul timp, a transporturilor în general şi a celor rutiere în special a condus la extinderea şoselelor şi, în consecinţă, a numărului şi varietăţii de poduri.

Utilizarea la suprastructura podurilor a unor secţiuni dublu sau multiplu conexe reprezintă calea cea mai des întîlnită la sistemele de poduri moderne.

Practica prezentă a proiectării unor astfel de structuri presupune folosirea teoriei de grindă sau a teoriei plăcilor ortotrope, teorii care includ numeroase grade de aproximaţie şi care conduc la obţinerea unor distribuţii prea aproximative a eforturilor unitare pe lăţimea elementelor de placă. Cunoaşterea distribuţiei reale a eforturilor, în asemenea structuri, facilitează aprecierea mai corectă a comportării lor la oboseală cît şi introducerea efectului precomprimării orizontale sau verticale.

Metodele de discretizare fizică — elemente finite şi fîşii finite — permit eliminarea dezavantajelor pe care le ridică în calcul metodele clasice, determinarea eforturilor şi deplasărilor putînd fi făcută convenabil prin utilizarea calculatoarelor numerice. Metoda elementelor finite, utilizată cu succes la variate tipuri de structuri inginereşti, a fost aplicată şi la calculul dalelor ortotrope [5], obţinîndu-se rezultate remarcabile. Metoda fîşiilor finite, iniţiată de Cheung şi folosită de Loo şi Cusens [2] şi Das [1], are avantajul folosirii unui timp de calcul la computer mult mai redus pentru obţinerea unei precizii a mărimilor calculate ca şi în metoda elementelor finite.

În lucrarea de faţă metoda fîşiilor finite este generalizată pentru calculul dalelor ortotrope oblice, frecvent întîlnite la suprastructura podurilor; s-au stabilit algoritmii de calcul şi s-au testat subrutinele necesare calculului la calculator a dalelor ortotrope oblice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 3, 1979, P. 425–433

2. MATRICEA DE RIGIDITATE

2.1. MATRICEA DE RIGIDITATE PENTRU SOLICITAREA LA ÎNCOVOIERE

Se consideră fişia finită oblică din figura 1 cu caracteristicile geometrice notate pe figură. Proprietăţile ortotrope ale fişiei se presupun că se manifestă în direcţiile x şi y. Legătura dintre coordonatele în cele două sisteme de axe este :

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [I] \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \tag{1}$$

unde

$$[I] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

iar

$$[I]^{-1} = \frac{1}{\cos\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}. \tag{3}$$

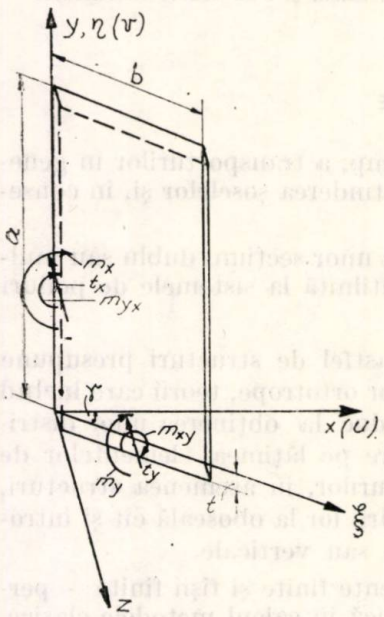


Fig. 1

Fişia finită este simplu rezemată pe laturile mici, iar pentru exprimarea întregii stări de deformare la încovoiere este suficientă numai săgeata w. În metoda fişiilor finite săgeata, în sistemul oblic de axe, se exprimă ca un produs de forma :

$$w = \sum_{1}^{nm} w_n = \sum_{1}^{nm} (p) \sin k_n \eta \tag{4}$$

în care

$$k_n = \frac{n\,\Pi}{a}.$$

În continuare, pentru uşurarea scrierii, se va nota termenul w_n, din exprimarea în serie trigonometrică, prin notaţia w. Polinomul (p), ce exprimă variaţia săgeţii transversal pe fişia finită, s-a ales de ordinul trei, astfel că termenul al n-lea al săgeţii se poate scrie :

$$w = (\alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \xi^2 + \alpha_4 \xi^3) \sin k_n \eta =$$

$$= \left(\alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{\cos\gamma} + \alpha_3 \frac{x^2}{\cos^2\gamma} + \alpha_4 \frac{x^3}{\cos^3\gamma}\right) \sin k_n (y + x\operatorname{tg}\gamma). \tag{5}$$

Valorile parametrilor necunoscuţi α se exprimă în deplasări ale marginilor i şi j ale fişiei finite ; pentru aceasta alegîndu-se următorul vector

de deplasări :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \left[w_i, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i, w_j, \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j \right]^T =$$

$$= [w_i, \theta_i, w_j, \theta_j]^T. \tag{6}$$

Prin scrierea deplasărilor marginilor, conform notaţiilor de mai sus, ecuaţia (5) devine :

$$\{\delta\} = [C] \cdot \{\alpha\}, \tag{7}$$

în care $[C]$ este o matrice patrată (4×4) în funcţie de lăţimea b a fişiei şi de unghiul γ.

Parametrii necunoscuţi α se determină, astfel, din ecuaţia :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{\delta\}. \tag{8}$$

Se constată că parametrii necunoscuţi sînt daţi în funcţie de vectorul deplasărilor marginale $\{\delta\}$, care sînt necunoscutele problemei şi care urmează a fi determinate. Din relaţiile (5) şi (8) se poate scrie expresia săgeţii pentru armonica n.

$$w = [P]\,[C]^{-1} \sin k_n \eta \{\delta\} = [N] \sin k_n \eta \{\delta\}, \tag{9}$$

în care

$$P = [1, \xi, \xi^2, \xi^3], \tag{10}$$

iar $[N]$ este funcţie de ξ, γ şi b.

Pentru o fişie finită solicitată la încovoiere, cîmpul deformaţiilor specifice $\{\varepsilon\}$ este

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Prin efectuarea derivatelor din expresia (11), cîmpul deformaţiilor specifice la încovoiere se poate scrie :

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} = [Q]\,[C]^{-1}\{\delta\} = [B]\{\delta\}. \tag{12}$$

Matricea de elasticitate $[D]$, caracteristică încovoierii plăcilor ortotrope, este

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

în care (5)

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}; \; D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)},$$

$$D_1 = \frac{\nu_x F_y \; (= \nu_y E_x)}{1 - \nu_y \nu_x} \cdot \frac{t^3}{12}; \; D_{xy} = \frac{Gt^3}{12} \tag{14}$$

unde E_x, E_y, G, ν_y, ν_x sînt proprietăţile elastice ale fişiei.

Considerîndu-se o fîşie finită sub acţiunea unor încărcări verticale $q(\xi, \eta)$ acestea dau un cîmp de deplasări marginale $\{\delta\}$. Se presupune că în direcţia cîmpului de deplasări se dau deplasările virtuale $\{d\delta\}$. În concordanţă cu relaţiile (9) şi (12) săgeata (în general deplasările) şi deformaţiile specifice din deplasările virtuale, vor fi :

$$\{dw\} = [N] \sin k_n \eta \{d\delta\} \tag{15}$$

şi

$$\{d\varepsilon\} = [B] \{d\delta\}. \tag{16}$$

Lucrul mecanic virtual dat de eforturile unitare interioare va fi egal cu cel al încărcărilor exterioare q; se presupune că fişia nu este supusă la deformaţii iniţiale $\{\varepsilon_0\}$ şi la eforturi interioare iniţiale $\{\sigma_0\}$. Rezultă

$$\{d\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{dw\}^T q(\xi, \eta) = 0, \tag{17}$$

sau

$$\{d\delta\}^T ([B]^T \{\sigma\} - [N]^T \sin k_n \eta \, q(\xi, \eta)) = 0 \tag{18}$$

deoarece în algebra matriceală

$$([A] [B])^T = [B]^T [A]^T. \tag{19}$$

Lucrul mecanic pentru întreaga fîşie se obţine prin integrare asupra întregului volum; pentru încovoiere integrarea se face pe suprafaţă

$$\{d\delta\}^T \left(\int_0^a \int_0^b ([B]^T \{\sigma\} \, d\xi \, d\eta - \int_0^a \int_0^b [N]^T \sin k_n \eta \, q(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta) \right) = 0. \tag{20}$$

Relația de mai sus este valabilă pentru orice deplasare virtuală arbitrară astfel încît se poate scrie :

$$\int_0^a \int_0^b [B]^T \{\sigma\} \, d\xi \, d\eta = \int_0^a \int_0^b [N]^T q(\xi, \eta) \sin k_n \eta \, d\xi \, d\eta. \tag{21}$$

Din teoria elasticității se cunoaște că

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \tag{22}$$

și cu relația (12) rezultă

$$\left(\int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] \, d\xi \, d\eta \right) \{\delta\} = \int_0^a \int_0^b [N]^T q(\xi, \eta) \sin k_n \eta \, d\xi \, d\eta \tag{23}$$

sau

$$[k] \{\delta\} = \{F\}, \tag{24}$$

în care $[k]$ — matricea de rigiditate,

$\{F\}$ — matricea forțelor.

În consecință, pentru o fișie supusă la încovoiere, forma standard a matricei de rigiditate este

$$[k^t] = \int_0^a \int_0^b [B]^T [D] [B] \, d\xi \, d\eta \tag{25}$$

în cazul unei grosimi constante t. Cu notațiile din ecuația (12) matricea de rigiditate se poate scrie sub forma

$$[k^t] = \{[C]^{-1}\} \left(\iint [Q]^T [D] [Q] \, d\xi \, d\eta \right) [C]^{-1} \tag{26}$$

deoarece matricea $[C]^{-1}$ este independentă de coordonatele ξ și η.

2.2. MATRICEA DE RIGIDITATE PENTRU SOLICITAREA ÎN PLANUL FIȘIEI

Procedeul de obținere a matricei de rigiditate este analog cu cel prezentat anterior. Pentru termenul n din dezvoltarea în serie, funcțiile deplasărilor u (în direcția x) și v (în direcția y) s-au ales în concordanță cu condițiile de margine, astfel :

$$u = (\alpha_5 + \alpha_6 \xi) \sin k_n \eta = \left(\alpha_5 + \alpha_6 \frac{x}{\cos \gamma} \right) \sin k_n (y + x \operatorname{tg} \gamma),$$

$$v = (\alpha_7 + \alpha_8 \xi) \cos k_n \eta = \left(\alpha_7 + \alpha_8 \frac{x}{\cos \gamma} \right) \cos k_n (y + x \operatorname{tg} \gamma) \tag{27,28}$$

vectorul deplasărilor necunoscute în plan s-a ales :

$$\{\delta^P\} = [u_i,\ u_j,\ v_i,\ v_j]. \tag{29}$$

La fel ca şi la încovoiere, parametrii necunoscuţi sînt :

$$\{\alpha^P\} = \{C^P\}^{-1}\{\delta^P\}. \tag{30}$$

Pentru solicitarea în plan, cîmpul deformaţiilor specifice este

$$\{\varepsilon^P\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \tag{31}$$

Cîmpul deformaţiilor în plan poate fi scris :

$$\{\varepsilon^P\} = [Q^P]\{\alpha^P\} = [Q^P]\,[C^P]^{-1}\{\delta^P\} = [B^P]\{\delta^P\}. \tag{32}$$

Matricea de elasticitate în plan are aceeaşi formă cu cea la încovoiere cu deosebirea că dispare multiplicatorul $(t^3/12)$; rezultă că

$$[D^P] = \frac{12}{t^3}\,[D]. \tag{33}$$

Forma standard a matricei de rigiditate în plan, este

$$[k^P] = \iint [B^P]^T\,[D^P]\,[B^P]\,t\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta =$$

$$= \{[C^P]^{-1}\}^T \left(\iint [Q^P]^T\,[D^P]\,[Q^P]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right) t\,[C^P]^{-1}. \tag{34}$$

2.3. MATRICEA DE RIGIDITATE PENTRU SOLICITAREA ÎN PLAN ŞI LA ÎNCOVOIERE A FÎŞIEI FINITE

Cele două acţiuni pot fi cuplate simplu deoarece se consideră că nu se interacţionează reciproc. Astfel, matricea de rigiditate a unei fîşii finite, pentru armonica n, este

$$[K] = \begin{bmatrix} [k^P], & 0 \\ 0 & [k^i], \end{bmatrix}, \tag{35}$$

în care matricele $[k^P]$ și $[k^i]$ sînt de dimensiunile (4×4), matricea de rigiditate a fîșiei fiind de (8×8).

Matricele de rigiditate scrise mai sus sînt stabilite pentru sisteme de coordonate locale, legate de fîșia finită (fig. 1). În cazul rezolvării unor structuri, descompuse în fîșii finite, este necesar să se aleagă sisteme de coordonate generale față de care să fie reperate toate fîșiile. Considerînd sistemul local de coordonate $\xi\eta z(xyz)$ (fig. 2*a*) față de care sistemul de deplasări și de forțe sînt notate fără asterisc și sistemul general $\xi'\eta'z'$ $(x'y'z')$ față de care deplasările și forțele sînt notate prin asterisc, va rezulta

$$\{\delta\} = [R]\{\delta'\}, \tag{36}$$

în care $[R]$ este matricea cosinusurilor directori (8x8), iar vectorul deplasărilor este

$$\{\delta\} = [u_i\ ,\ u_j\ ,\ v_i\ ,\ v_j\ ,\ w_i\ ,\ \theta_i\ ,\ w_j\ ,\ \theta_j]^T. \tag{37}$$

Presupunînd vectorul forțelor în sistemul local $\{F\}$, iar în cel general $\{F'\}$, lucrul mecanic al forțelor în cele două sisteme de coordonate este identic :

$$(\{F'\})^T\ \{\delta'\} = (\{F\})^T\ \{\delta\}. \tag{38}$$

Prin înlocuirea relației (36) în (38) rezultă

$$(\{F'\})^T\ \{\delta'\} = (\{F\})^T\ [R]\{\delta'\} \tag{39}$$

sau

$$\{F'\} = [R]^T\ \{F\}. \tag{40}$$

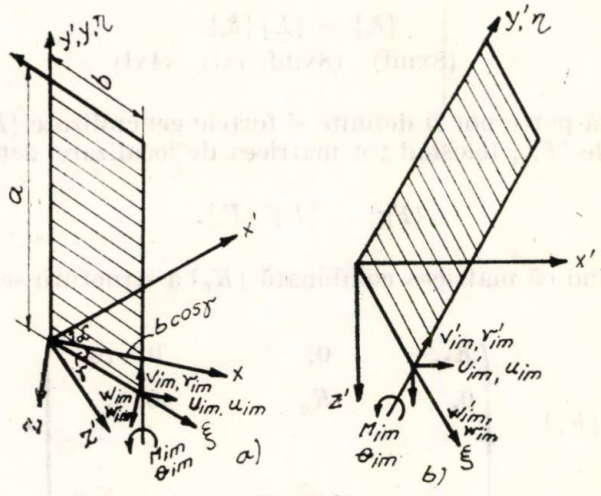


Fig. 2a,b.

În aceste relații vectorul forțelor este analog celui al deplasărilor, adică (fig. 2*b*) :

$$\{F\} = [U_i\ ,\ U_j\ ,\ V_i\ ,\ V_j\ ,\ W_i\ ,\ M_i W_j\ ,\ M_j]^T. \tag{41}$$

Pentru sistemul local de coordonate, relaţia standard care leagă sistemul de deplasări de cel al încărcărilor este (24). Din relaţiile (36), (40) şi (24) rezultă :

$$[K][R]\{\delta'\} = \{F\}, \tag{42}$$

iar prin preînmulţire cu $[R]^T$ se obţine

$$[R]^T\ [K][R]\{\delta'\} = [R]^T\ \{F\} \tag{43}$$

sau

$$[K']\{\delta'\} = \{F'\}, \tag{44}$$

în care

$$[K'] = [R]^T\ [K]\ [R] \tag{44}$$

este matricea de rigiditate a unei fîşii, pentru armonica n, în sistemul general de axe.

3. ASAMBLAREA MATRICELOR DE RIGIDITATE

Considerînd că numărul total al fişiilor finite dintr-o structură este mf şi că fiecare fîşie are 8 deplasări necunoscute pe cele două linii nodale, atunci numărul tuturor deplasărilor necunoscute ale fîşiilor $\{\delta_t\}$ este (8 xmf). Dacă numărul total de linii ale structurii este l, atunci deplasărilor generalizate $\{\delta_g\}$ ale liniilor este (4xl). Este posibil de a se forma o matrice $[L]$, numită matrice de localizare (de incidenţă sau booleană), astfel ca

$$\underset{(8\text{xmf})}{\{\delta_t\}} = \underset{(8\text{xmf, }4\text{xl})}{[L]}\ \underset{(4\text{xl})}{\{\delta_g\}}. \tag{45}$$

Pe de altă parte pot fi definite şi forţele generalizate $\{F_g\}$ în funcţie de forţele totale $\{F_t\}$, folosind tot matricea de localizare, astfel

$$\{Fg\} = [L]^T\ \{F_t\}. \tag{46}$$

Considerînd că matricea combinată $[K_c]$ a structurii se formează ca mai jos :

$$[K_c] = \begin{pmatrix} K_1, & 0, & 0 \ldots 0 \\ 0, & K_2 & 0 \ldots . \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & Kmf \end{pmatrix}, \tag{47}$$

legătura dintre sistemul de deplasări şi de forţe este :

$$[K_c]\{\delta_t\} = \{F_t\}. \tag{48}$$

Din relaţiile (45) şi (48) rezultă

$$[K_c][L]\{\delta_g\} = \{F_t\}.$$

Prin preînmulţire cu $[L]^T$, se obţine

$$[L]^T\ [K_c][L]\{\delta_g\} = \{F_g\}, \tag{49}$$

în care

$$[K] = [L]^T\ [K_c]\,[L] \tag{50}$$

este matricea de rigiditate a ansamblului.

Primită la redacţie la 5 martie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. P. C. Das, *Analysis of box — type structures*, Proceedings, The Institution of Civil Engineers June 53, 19—40 (1972).
2. Y. C. Loo şi A. R. Cusens, *Developments of the finite strip method in the analysis of bridge decks*, Proc. conference Developments in bridge design and construction, Cardiff, 1971.
3. Ch. Massonnet ş.a., *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1974.
4. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1971.
5. * * * *Proceedings conference Development in bridge design and construction*, University College, Cardiff, 1971.

INFLUENȚA REGLAJULUI CARACTERISTICII DE AMORTIZARE LA VITEZE MICI DE LUCRU ASUPRA CONFORTULUI ȘI ADERENȚEI ROATĂ-SOL

de T. SIRETEANU, O. GÜNDISCH, S. PĂRĂIAN
Institutul de Fizica și Tehnologia Materialelor,
V. HORNEA
I.P.A. – Sibiu

Lucrarea conține o analiză experimentală a influenței reglajului amortizoarelor hidraulice în zona vitezelor mici de lucru asupra confortului și aderenței roată-sol pentru autoturismul Dacia 1300. Este analizat, de asemenea, efectul forțelor de frecare uscată din amortizor asupra confortului.

1. CRITERII DE CONFORT ȘI ADERENȚĂ ROATĂ-SOL

Parametrii utilizați în mod obișnuit la aprecierea confortului și aderenței roată-sol (factorul principal în asigurarea unei bune ținute de drum) pe care le conferă suspensia unui autovehicul sînt accelerația caroseriei și forța dinamică dintre roată și sol ce se suprapune peste cea statică n timpul mersului [1], [2].

Notînd cu M, Z și m, z masa suspendată și deplasarea sa și, respectiv, masa nesuspendată și deplasarea sa, forța dinamică dintre roată și sol, care este suma forțelor dinamice ce acționează asupra masei suspendate și masei nesuspendate, poate fi scrisă sub forma

$$F_d = M\ddot{Z} + m\ddot{z}. \tag{1}$$

Întrucît denivelările drumului sînt aleatoare, parametrii Z (accelerația masei suspendate) și F_d (forța dinamică dintre roată și sol) sînt de asemenea aleatori. O măsură globală a mărinii acestor parametrii este dată de valoarea medie pătratică (r.m.s.), definită prin relațiile

$$\sigma_{\ddot{z}} = \sqrt{\mathcal{M}[\ddot{z}^2]}, \tag{2}$$

$$\sigma_{Fd} = \sqrt{\mathcal{M}[(M\ddot{Z} + m\ddot{z})^2]}, \tag{3}$$

unde $\mathcal{M}$ este operatorul de mediere statistică.

Relația (3) se poate transforma după cum urmează:

$$\sigma_{Fd} = \sqrt{\mathcal{M}[M^2\ddot{Z}^2 + m^2\ddot{z}^2 + 2Mm\ddot{Z}\ddot{z}]} =$$

$$= \sqrt{M^2\sigma^2_{\ddot{Z}} + m^2\sigma^2_{\ddot{z}} + 2Mm\,\sigma_{\ddot{Z}}\,\sigma_{\ddot{z}}\,\rho_{\ddot{Z}\ddot{z}}}, \tag{4}$$

unde

$$\rho_{\ddot{Z}\,\ddot{z}} = \frac{\mathcal{M}[\ddot{Z}\ddot{z}]}{\sigma_{\ddot{Z}}\ \sigma_{\ddot{z}}}, \tag{5}$$

reprezintă coeficientul de corelaţie al acceleraţiilor caroseriei $\ddot{Z}$ şi ale punţii $\ddot{z}$. Întrucît frecvenţa proprie de oscilaţie a caroseriei este mult mai mică decît cea a punţii (de peste 10 ori), se poate considera că oscilaţiile caroseriei sînt statistic necorelate cu oscilaţiile punţii [3] şi deci se poate pune $\rho_{\ddot{Z}\,\ddot{z}} = 0$ în relaţia (4) obţinînd

$$\sigma_{Fd} = \sqrt{M^2\,\sigma^2_{\ddot{Z}} + m^2\sigma^2_{\ddot{z}}}. \tag{6}$$

Prin urmare, pentru aprecierea confortului şi aderenţei roată-sol, este suficientă determinarea mediilor pătratice ale acceleraţiilor caroseriei şi punţilor ($\sigma_{\ddot{Z}}$ şi respectiv $\sigma_{\ddot{z}}$).

2. INSTALAŢIA DE MĂSURĂ ŞI MODUL DE EFECTUARE A EXPERIENŢELOR

Pentru determinarea mediilor pătratice ale acceleraţiilor caroseriei şi punţilor au fost alese patru puncte de măsură pe un autoturism Dacia 1300.

Schema bloc a instalaţiei de măsură este reprezentată în figura 1.

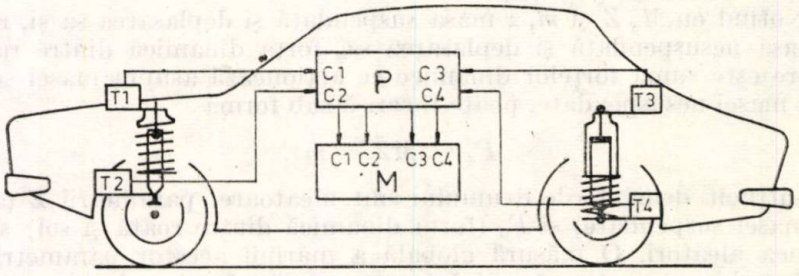


Fig. 1

Semnificaţia notaţiilor din figura 1 este următoarea :

$T1$, $T2$, $T3$, $T4$ — traductoare de acceleraţie Hottinger tip B1/250—50 ;

P — punte tensometrică de măsură IEMI tip N2302 ;

M — magnetofon de măsură Brüel & Kjaer tip 7003 ;

$C1$, $C2$, $C3$, $C4$ — canale de măsură.

Punctele de măsură au fost alese pe caroserie (faţă şi spate) şi pe punţi (fără şi spate) astfel încît să se afle aproximativ pe verticalele ce trec prin punctele de prindere ale amortizoarelor, fapt care permite utilizarea directă a relaţiei (6) pentru calculul forţei dinamice dintre roată şi sol.

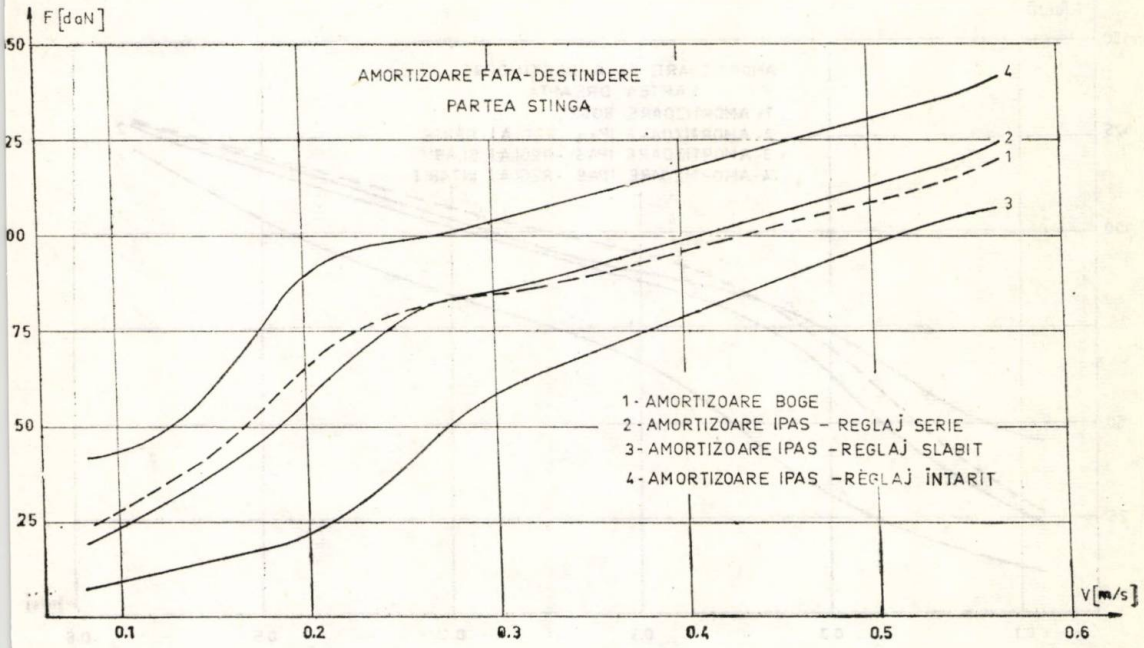

F [daN]
AMORTIZOARE FATA-DESTINDERE
PARTEA STINGA
1 - AMORTIZOARE BOGE
2 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SERIE
3 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SLABIT
4 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ INTARIT
V [m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 2

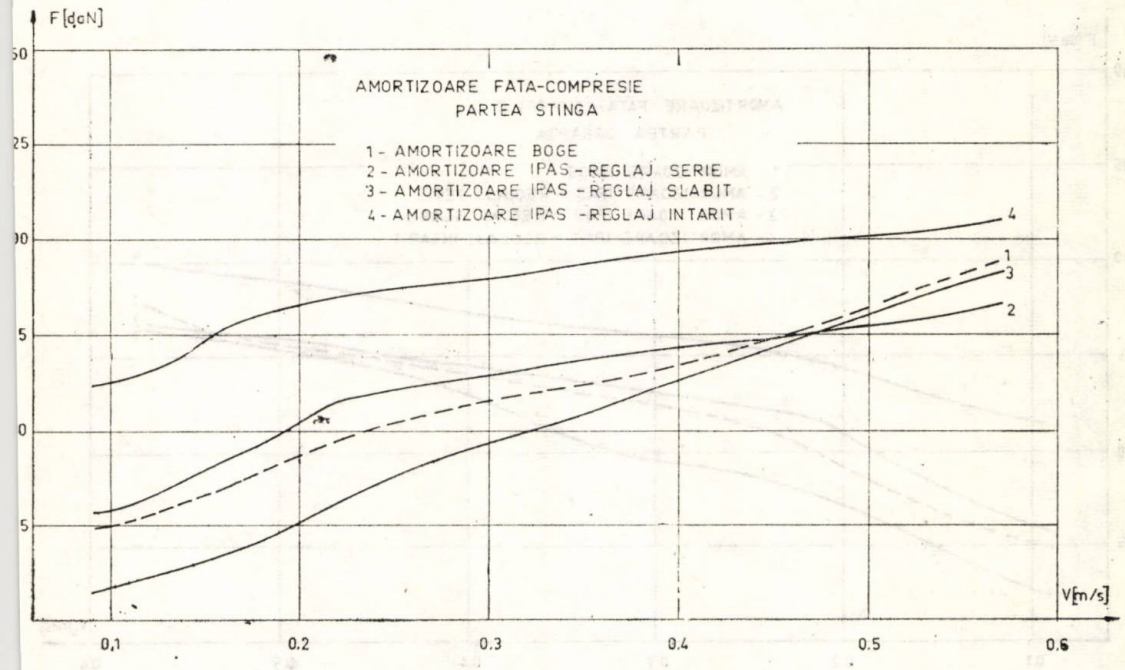

F [daN]
AMORTIZOARE FATA-COMPRESIE
PARTEA STINGA
1 - AMORTIZOARE BOGE
2 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SERIE
3 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SLABIT
4 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ INTARIT
V [m/s]
0,1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 3

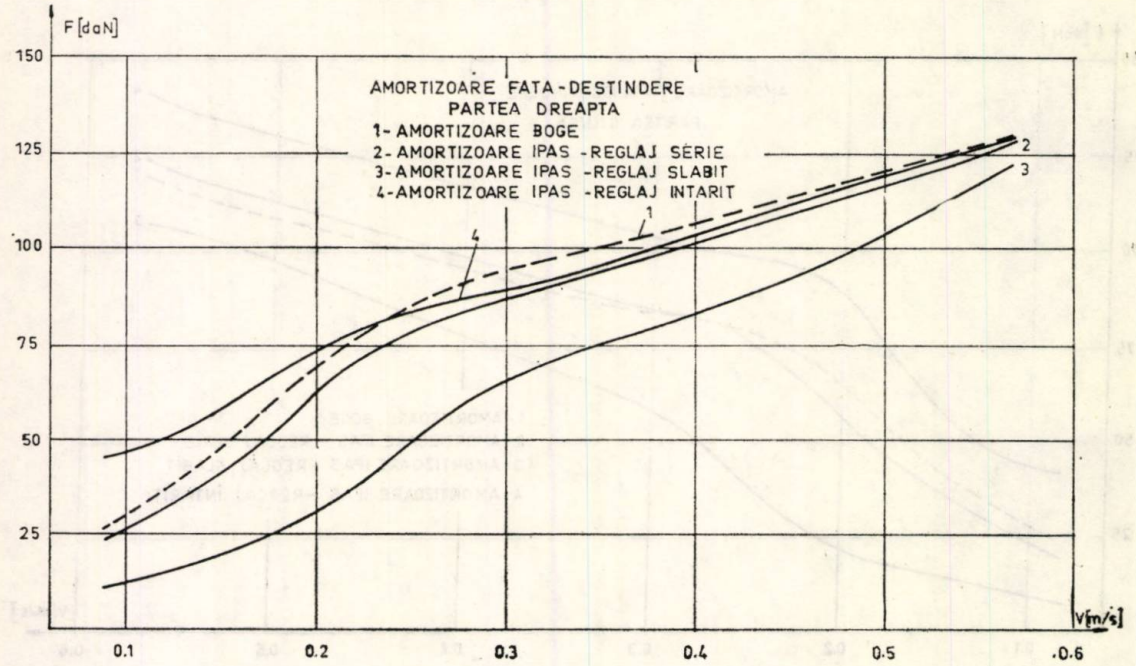

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE FATA - DESTINDERE
PARTEA DREAPTA
1- AMORTIZOARE BOGE
2- AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SERIE
3- AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SLABIT
4- AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ INTARIT
1
2
3
4
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 4

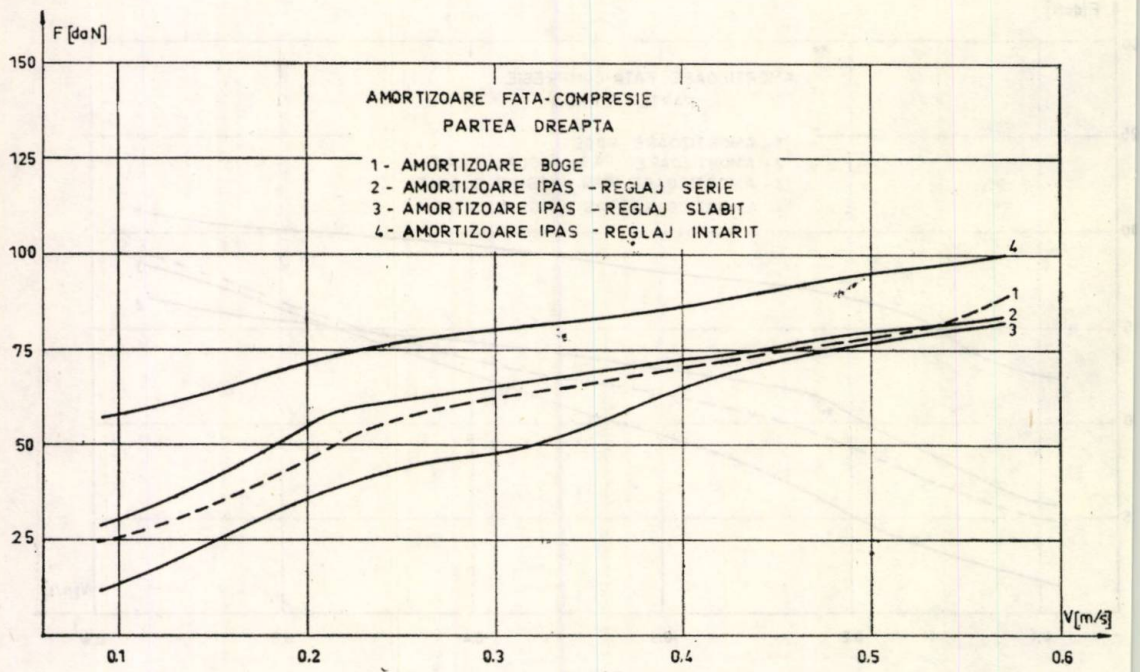

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE FATA - COMPRESIE
PARTEA DREAPTA
1 - AMORTIZOARE BOGE
2 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SERIE
3 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SLABIT
4 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ INTARIT
4
1
2
3
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 5

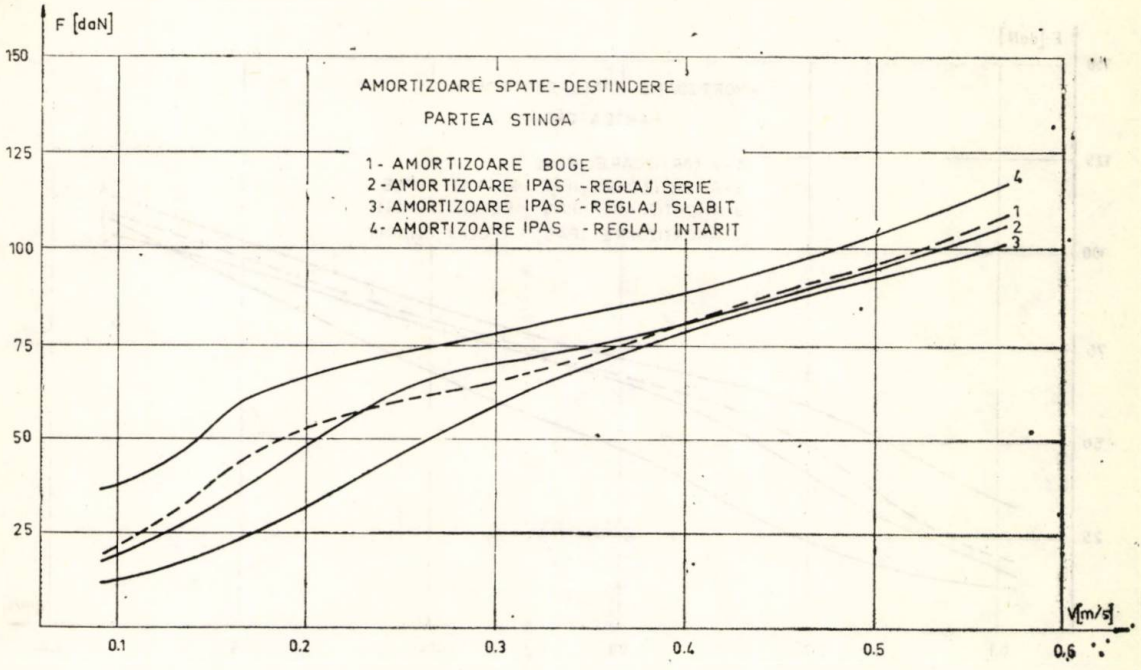

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE SPATE-DESTINDERE
PARTEA STINGA
1- AMORTIZOARE BOGE
2-AMORTIZOARE IPAS -REGLAJ SERIE
3-AMORTIZOARE IPAS -REGLAJ SLABIT
4-AMORTIZOARE IPAS -REGLAJ INTARIT
4
1
2
3
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 6

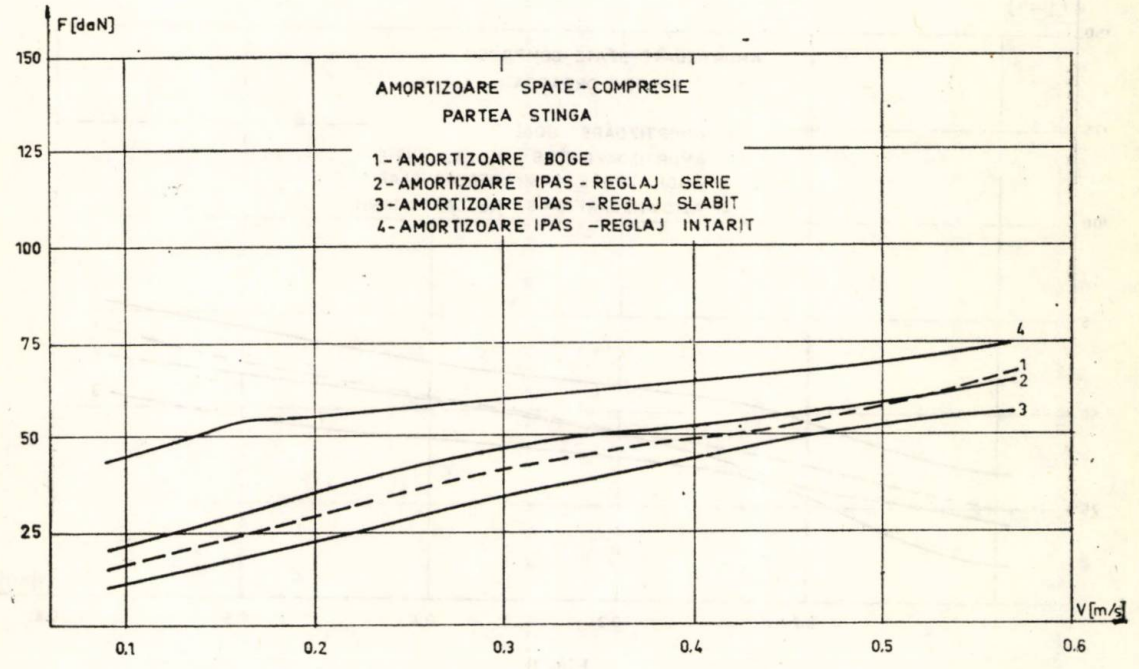

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE SPATE-COMPRESIE
PARTEA STINGA
1-AMORTIZOARE BOGE
2-AMORTIZOARE IPAS-REGLAJ SERIE
3-AMORTIZOARE IPAS -REGLAJ SLABIT
4-AMORTIZOARE IPAS -REGLAJ INTARIT
4
1
2
3
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 7

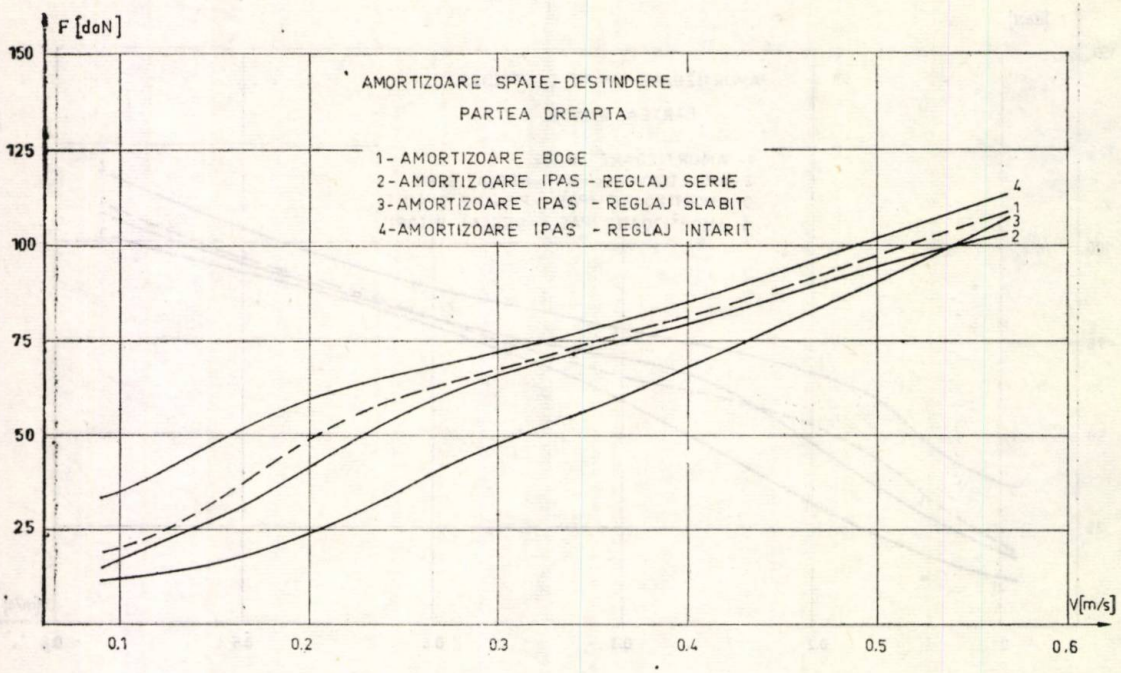

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE SPATE-DESTINDERE
PARTEA DREAPTA
1-AMORTIZOARE BOGE
2-AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SERIE
3-AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SLABIT
4-AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ INTARIT
4
1
3
2
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 8

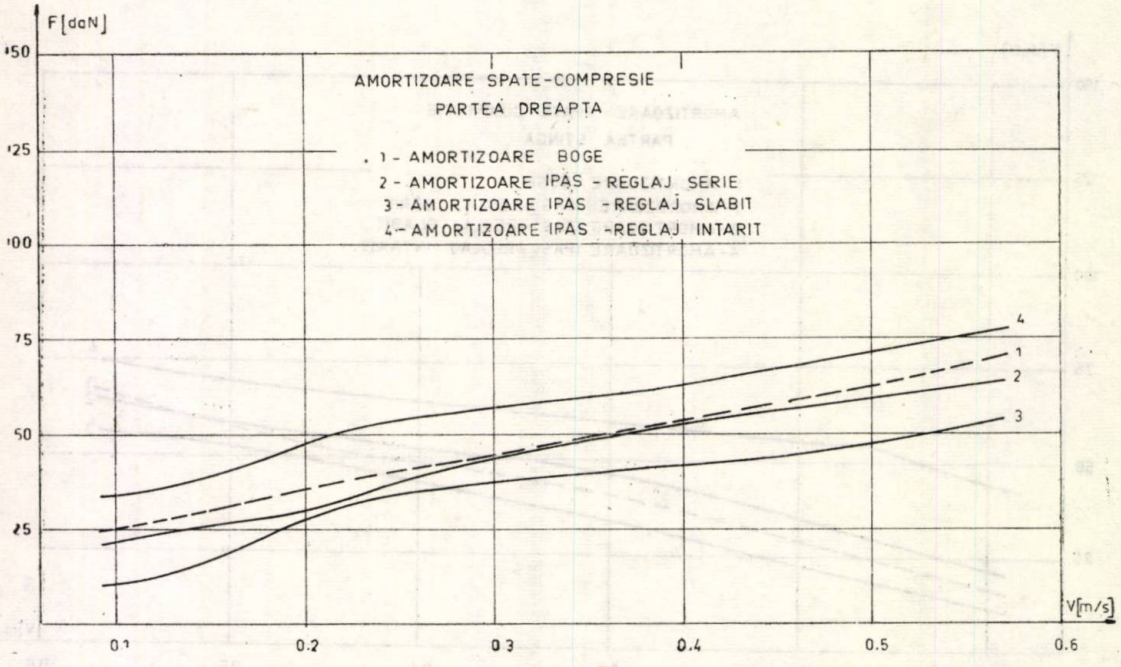

F [daN]
AMORTIZOARE SPATE-COMPRESIE
PARTEA DREAPTA
1 - AMORTIZOARE BOGE
2 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SERIE
3 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ SLABIT
4 - AMORTIZOARE IPAS - REGLAJ INTARIT
4
1
2
3
V[m/s]
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6

Fig. 9

Punctele de măsură au fost alese pe partea stîngă avîndu-se în vedere că variația calității suprafeței drumului în raport cu abaterile laterale de la calea medie urmărită de roți în timpul experimentărilor este mai mică în zona de mijloc decît în zona de margine a drumului.

Experimentările s-au efectuat pe trei categorii de drumuri și anume: drum asfaltat ($v = 70$ km/oră), drum acoperit cu piatră cubică ($v = 60$ km/oră) și drum de țară ($v = 40$ km/oră). Din fiecare categorie au fost alese tronsoane de drum reprezentative urmărindu-se totodată și aspectul staționarității denivelărilor pe întregul parcurs.

Pentru a analiza efectul reglajului amortizoarelor asupra confortului și aderenței roată-sol, s-au efectuat experimentări cu patru seturi de amortizoare și anume:

a) amortizoare BOGE;

b) amortizoare I.P.A.S. — cu reglaj de serie;

c) amortizoare I.P.A.S. — cu reglaj slăbit;

d) amortizoare I.P.A.S. — cu reglaj întărit.

Cele două variante de încadrare a reglajului de serie al amortizoarelor I.P.A.S. au fost realizate prin modificarea suprafeței orificiilor calibrate din supapa pistonului și supapa inferioară.

Caracteristicile de lucru forță-viteză (F-v) ale amortizoarelor încercate sînt date în figurile 2—9.

După cum reiese din figurile 2—9, caracteristicile amortizoarelor I.P.A.S. încercate au diferit esențial în zona vitezelor mici (pînă la deschiderea supapei de destindere), ele încadrîndu-se la viteza de 0,586 m/s în limitele toleranțelor admise pentru reglajul de serie. Pe intervalul 0,09 m/s—0,21 m/s la amortizoarele față forțele date de reglajul slăbit au fost în medie cu 62% mai mici decît cele corespunzătoare reglajului de serie, iar cele obținute pentru reglajul întărit au fost în medie cu 77% mai mari decît cele corespunzătoare reglajului de serie. La amortizoarele spate aceste procente au fost, respectiv, 39% și 77%. Reglajul amortizoarelor BOGE încercate nu a diferit practic în medie de cel al amortizoarelor ALC9 cu reglaj de serie.

Cu fiecare set de amortizoare au fost parcurse tronsoanele de drum menționate, înregistrîndu-se simultan pe cele patru canale ale magnetofonului de măsură semnalele de accelerație date de traductoarele $T1 - T4$.

3. INSTALAȚIA ȘI MODUL DE PRELUCRARE A DATELOR EXPERIMENTALE

Pentru determinarea valorilor medii pătratice ale accelerațiilor înregistrate a fost utilizată o instalație analogo-digitală a cărei schemă bloc este dată în figura 10.

Semnificația notațiilor din figura 10 este următoarea:

M — magnetofon de măsură Brüel & Kjaer tip 7003;

F — filtru trece-jos: RFT tip OF201 și Hottinger tip TP6;

$A.M$ — amplificator de măsură Brüel & Kjaer tip 2607;

V.D — voltmetru digital RFT tip 4027;

I — imprimantă de date RFT tip 3534b.

Filtrul trece-jos are rolul de a filtra semnalele de acceleraţie în scopul eliminării componentelor de frecvenţă relativ mare în raport cu frecvenţele proprii de oscilaţie ale caroseriei sau punţilor. Aceste componente apar datorită vibraţiilor tablei sau unor piese metalice pe care s-a făcut

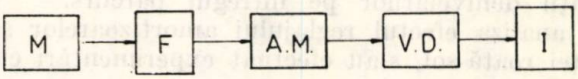


Fig. 10

prinderea traductoarelor de acceleraţii. Întrucît frecvenţa proprie a caroseriei se situează în jurul valorii de 1,2 Hz, iar cea a punţilor în jurul valorii de 14 Hz sînt necesare două filtre trece-jos. Filtrul RFT cu banda de trecere 0—5,6 Hz a fost utilizat la prelucrarea semnalelor de acceleraţii înregistrate pe caroserie (faţă şi spate), iar filtrul Hottinger cu banda de trecere 0—30 Hz a fost folosit la prelucrarea semnalelor de acceleraţii înregistrate pe punţi (faţă şi spate).

Amplificatorul de măsură permite determinarea cu o bună precizie a valorilor medii pătratice (r.m.s.) ale semnalelor de acceleraţie după relaţiile

$$\sigma_{\ddot{Z}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{Z}^2\,(t)\mathrm{d}t}\,, \qquad \sigma_{\ddot{z}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T z^2\,(t)\,\mathrm{d}t}, \tag{7}$$

întrucît timpul de integrare T poate lua valori pînă la 300 secunde. Menţionăm că erorile statistice care afectează estimaţiile (7) ale mediilor pătratice ale acceleraţiilor sînt date de relaţia [4]

$$\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{BT}}, \tag{8}$$

unde T este timpul de integrare, iar B lăţimea benzii filtrului trece-jos utilizat ($B = 5{,}6$ Hz pentru caroserie şi $B = 30$ Hz pentru punţi). Alegerea timpului de integrare T se face în funcţie de durata înregistrării ţinînd seama că trebuie să treacă 2—3 intervale de timp T pînă la stabilizarea rezultatelor [4]. Durata înregistrărilor de acceleraţii efectuate pe traseu au permis utilizarea unui timp de integrare $T = 30$s, care, conform cu relaţia (8), conduce la erori statistice neglijabile.

Voltmetrul digital permite digitalizarea cu o anumită rată de eşantionare a semnalului de tensiune de la ieşirea amplificatorului de măsură, semnal ce reprezintă variaţia în timp a mediei pătratice a acceleraţiei.

Imprimanta de date tipăreşte pe o bandă de hîrtie valorile afişate de voltmetrul digital. Calculînd media aritmetică a acestor valori se obţine un număr proporţional cu valoarea medie pătratică a acceleraţiei. Factorul

de proporționalitate se determină prin etalonarea instalației de prelucrare a datelor reprezentată schematic în figura 10.

Pentru fiecare set de amortizoare și fiecare categorie de drum au fost efectuate patru înregistrări, reprezentînd semnalele de accelerație obținute la parcurgerea tronsonului ales în ambele sensuri de cîte două ori. S-au determinat mediile pătratice ale accelerațiilor pentru fiecare înregistrare și s-a calculat media lor aritmetică. Valoarea astfel obținută a fost considerată ca reprezentînd media pătratică a accelerațiilor corespunzătoare setului de amortizoare încercat și categoriei de drum respective.

Corespunzător încărcării autoturismului în timpul experimentărilor, masele suspendate pe puntea față stînga și puntea spate stînga au avut valorile

$$M_{\text{față}} = 300\,\text{kg},$$
$$M_{\text{spate}} = 255\,\text{kg}. \tag{9}$$

Masele nesuspendate ce revin semipunților față și spate au valorile

$$m_{\text{față}} = 31{,}5\ \text{kg},$$
$$m_{\text{spate}} = 30\,\text{kg}. \tag{10}$$

4. REZULTATELE OBȚINUTE PRIN PRELUCRAREA DATELOR EXPERIMENTALE. CONCLUZII

Mediile pătratice ale accelerațiilor caroseriei și punților obținute prin prelucrarea datelor experimentale sînt date în tabelele 1 și 2.

Tabelul 1

Mediile pătratice ale accelerațiilor caroseriei $\sigma_{\ddot{z}}$ /g/

Drum	Poziție	BOGE	I.P.A.S. reglaj serie	I.P.A.S. reglaj slăbit	I.P.A.S. reglaj întărit
Drum asfaltat	față	0,160	0,161	0,134	0,257
	spate	0,199	0,204	0,171	0,313
Drum acoperit cu piatră cubică	față	0,209	0,212	0,172	0,284
	spate	0,289	0,300	0,258	0,395
Drum de țară	față	0,285	0,292	0,264	0,363
	spate	0,347	0,357	0,335	0,452

În tabelul 3 sînt date mediile pătratice ale forțelor dinamice dintre roată și sol determinate prin relația (1) în care s-au introdus valorile din tabelele 1 și 2 și s-a ținut seama de relațiile (9) și (10).

Tabelul 2

Mediile pătratice ale accelerațiilor punților $\sigma_{\ddot{z}}$ /g/

Drum	Poziție	BOGE	I.P.A.S. reglaj serie	I.P.A.S. reglaj slăbit	I.P.A.S. reglaj întărit
Drum asfaltat	față	2,80	3,04	4,13	2,34
	spate	3,45	3,29	3,70	2,87
Drum acoperit cu piatră cubică	față	5,65	5,46	6,53	4,58
	spate	6,22	5,52	6,09	4,89
Drum de țară	față	7,38	7,18	9,84	6,29
	spate	8,40	7,81	8,58	7,18

Tabelul 3

Mediile pătratice ale forțelor dinamice dintre roată și sol σ_{F_d} /daN/

Drum	Poziție	BOGE	I.P.A.S. reglaj serie	I.P.A.S. reglaj slăbit	I.P.A.S. reglaj întărit
Drum asflatat	față	100	108	136	103
	spate	115	112	119	127
Drum acoperit cu piatră cubică	față	190	184	212	168
	spate	201	182	194	178
Drum de țară	față	248	243	320	230
	spate	267	251	271	244

Rezultatele din tabelul 1 sînt în concordanță cu senzațiile subiective de confort ale echipei care a efectuat încercările pe traseu. Menționăm că din acest punct de vedere variații chiar mici ale mediilor pătratice ale accelerațiilor pot indica sensul de îmbunătățire sau înrăutățire a confortului.

Din această tabelă rezultă:

— Din punct de vedere al confortului amortizoarele I.P.A.S. cu reglaj slăbit sînt mai bune în toate situațiile;

— Amortizoarele BOGE sînt ușor superioare amortizoarelor I.P.A.S. cu reglaj de serie în ceea ce privește confortul;

— Amortizoarele I.P.A.S. cu reglaj întărit conduc la o înrăutățire substanțială a confortului în toate situațiile.

Din tabelul 3 rezultă:

— Amortizoarele BOGE, I.P.A.S. -serie și I.P.A.S. cu reglaj întărit sînt apropiate din punct de vedere al aderenței roată-sol, observîndu-se în general o ușoară superioritate a amortizoarelor I.P.A.S. cu reglaj întărit.

— Amortizoarele I.P.A.S. cu reglaj slăbit înrăutățesc aderența roată-sol în toate situațiile și în special pe drumul de țară. Se observă, de asemenea, că înrăutățirea aderenței roată-sol se manifestă mai puternic la față unde slăbirea reglajului a fost mai accentuată decît la spate (vezi § 2).

Faptul că amortizoarele BOGE sînt ușor superioare în ceea ce privește confortul, deși reglajul lor nu a diferit practic de cel al amortizoarelor I.P.A.S. -serie, poate fi pus pe seama forțelor de frecare uscată care sînt mai mici la amortizoarele BOGE decît la amortizoarele I.P.A.S. Pornind de la această constatare a fost efectuat un studiu experimental privind influența frecării uscate din amortizoare asupra confortului.

5. INFLUENȚA FRECĂRII USCATE DIN AMORTIZOARE ASUPRA CONFORTULUI

Prin forțe de frecare uscată în amortizoare înțelegem forțele care apar în funcționarea amortizoarelor și care nu se datoresc trecerii lichidului prin orificii calibrate sau interstiții. Aceste forțe se manifestă în mod important la începutul cursei de destindere sau compresie, afectînd esențial caracteristica hidraulică, în zona vitezelor mici (pînă la 0,1 m/s). Deși denumirea de forțe de frecare uscată în amortizoare este improprie întrucît pe toate piesele din interiorul amortizoarelor există pelicule de ulei, o utilizăm ca atare pentru a face o distincție între aceste forțe și forțele hidraulice care sînt de frecare vîscoasă.

Pentru a pune în evidență experimental influența frecării uscate din amortizoare asupra confortului au fost realizate două seturi de amortizoare I.P.A.S. cu frecare uscată mărită, respectiv micșorată, în raport cu situația de serie.

Caracteristicile de lucru forță — viteză ($F-v$) ale amortizoarelor cu frecare uscată mărită și frecare uscată micșorată sînt date în figurile 11—14.

Din aceste diagrame rezultă că modificările operate au afectat caracteristicile hidraulice numai în zona vitezelor de lucru foarte mici (pînă la 0,07 m/s), pentru celelalte viteze forțele fiind practic identice cu cele realizate de amortizoarele respective înainte de modificare.

Întrucît s-a avut în vedere numai aprecierea confortului, au fost înregistrate simultan accelerațiile în două puncte de măsură situate pe podeaua habitacului sub scaunele din față, la același autoturism care a fost utilizat pentru probe de confort și aderență roată-sol. Fiecare set de amortizoare a fost încercat pe drumul asfaltat și drumul de țară în condițiile specificate la §. 2.

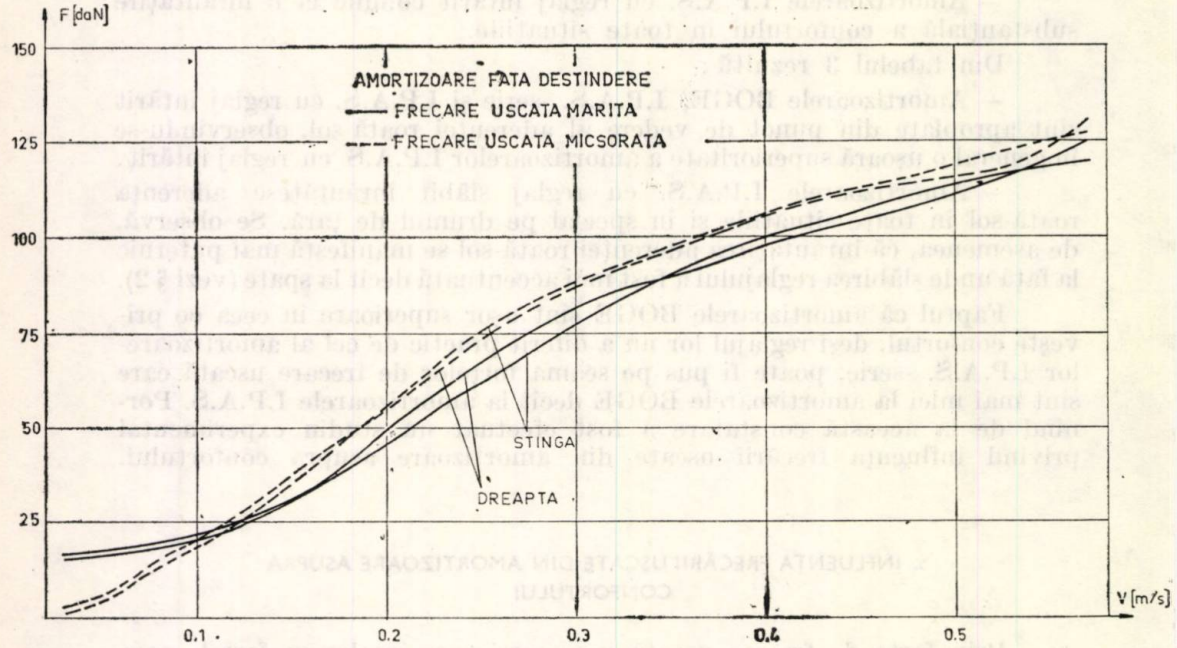

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE FATA DESTINDERE
FRECARE USCATA MARITA
FRECARE USCATA MICSORATA
STINGA
DREAPTA
V [m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Fig. 11

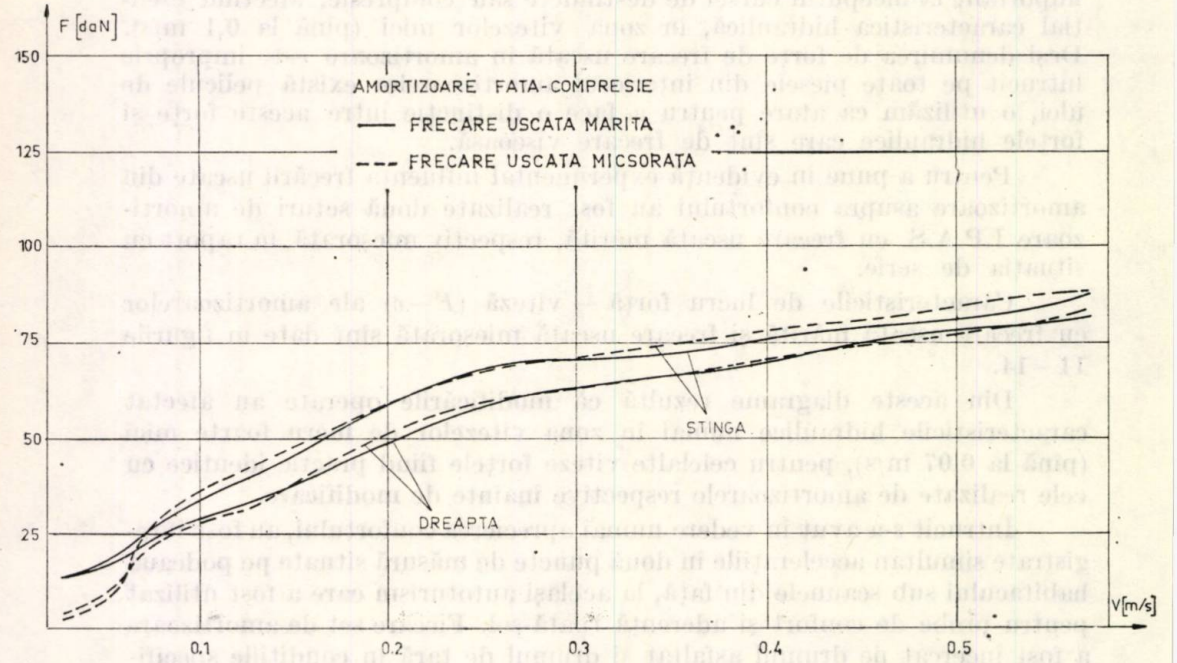

F [daN]
150
125
100
75
50
25
AMORTIZOARE FATA-COMPRESIE
FRECARE USCATA MARITA
FRECARE USCATA MICSORATA
STINGA
DREAPTA
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Fig. 12

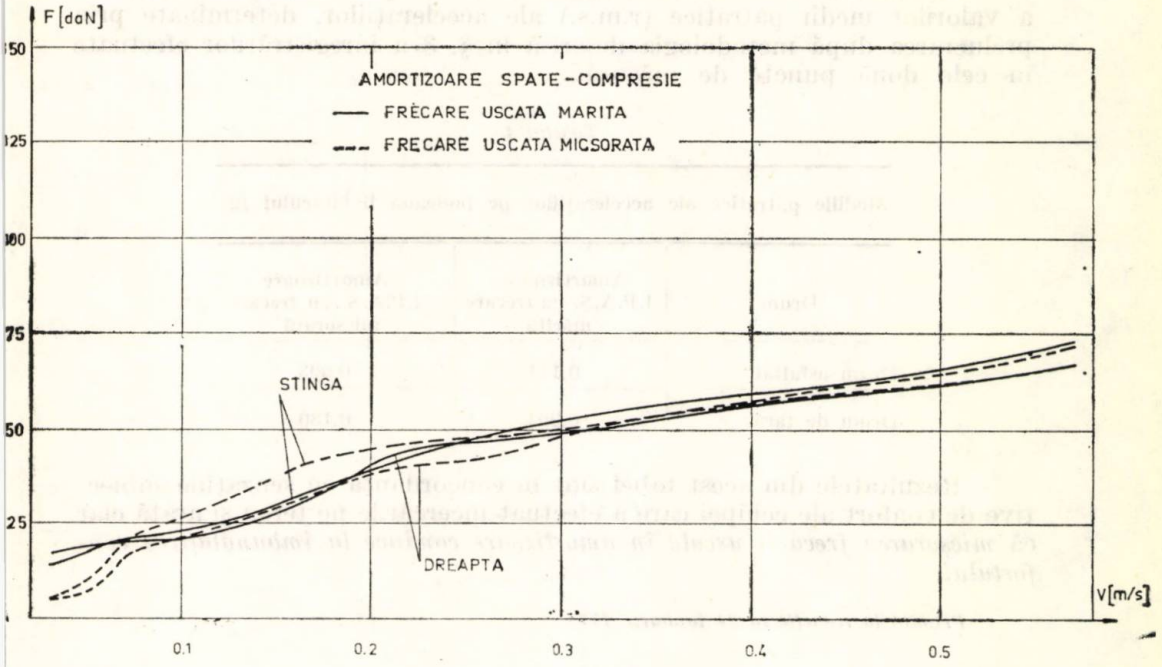

F [daN]
AMORTIZOARE SPATE-COMPRESIE
FRECARE USCATA MARITA
FRECARE USCATA MICSORATA
STINGA
DREAPTA
V[m/s]
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Fig. 13

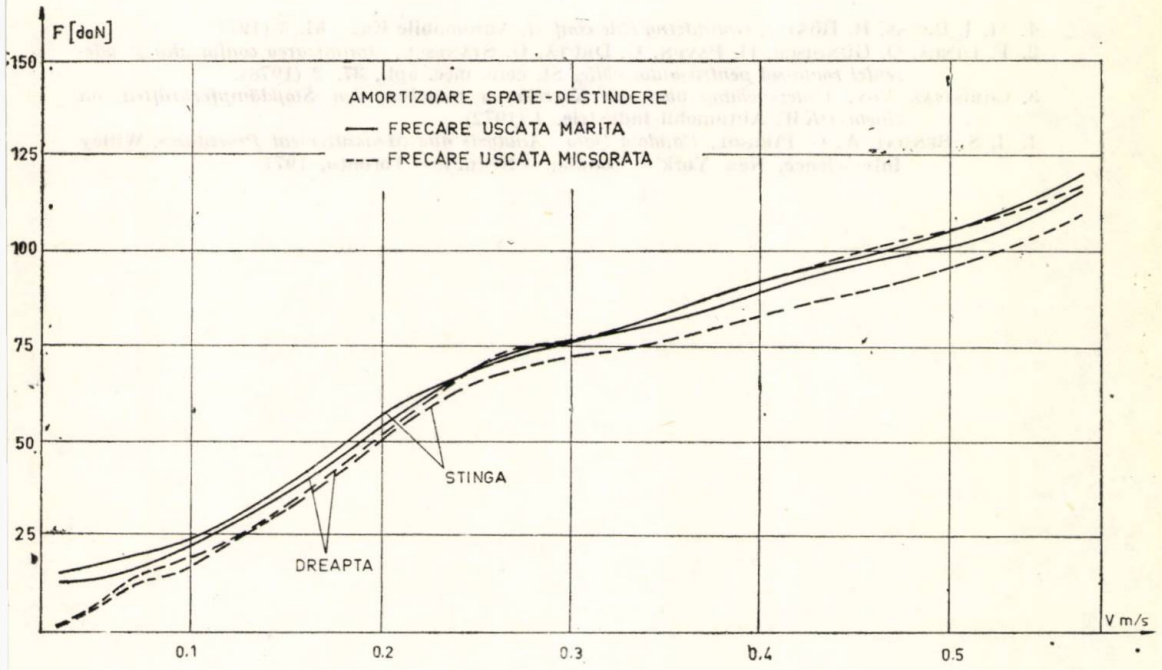

F [daN]
AMORTIZOARE SPATE-DESTINDERE
FRECARE USCATA MARITA
FRECARE USCATA MICSORATA
STINGA
DREAPTA
V m/s
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Fig. 14

În tabelul 4 sînt date rezultatele obținute prin medierea aritmetică a valorilor medii pătratice (r.m.s.) ale accelerațiilor, determinate prin prelucrarea după metodologia descrisă în §. 3 a înregistrărilor efectuate în cele două puncte de măsură.

Tabelul 4

Mediile pătratice ale accelerațiilor pe podeaua habitaculul /g/

Drum	Amortizoare I.P.A.S. cu frecare mărită	Amortizoare I.P.A.S. cu frecare micșorată
Drum asfaltat	0,111	0,093
Drum de țară	0,204	0,180

Rezultatele din acest tabel sînt în concordanță cu senzațiile subiective de confort ale echipei care a efectuat încercările pe teren și arată clar că *micșorarea frecării uscate în amortizoare conduce la îmbunătățirea confortului.*

Primită la redacție la 24 ianuarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. H. I. Bruns, R. Rönitz, *Optimizing ride confort*, Automobile Eng., **61**, *3* (1971).
2. F. Dincă, O. Gündisch, H. Paven, G. Druță, G. Stănescu, *Optimizarea confortului și aderenței roată-sol pentru automobile*, St. cerc. mec. apl., **37**, *2* (1978).
3. Christian Voy, *Untersuchung über die Korrelation zwischen den Stoßdämpferkräften an einem PKW*, Automobil-Industrie, *1* (1972).
4. J. S. Bendat, A. G. Piersol, *Random Data: Analysis and Meassurement Procedures*, Willey Interscience, New York — London — Sydney — Toronto, 1971.

DINAMICA MAȘINILOR COMPACTOARE VIBRATOARE AUTOPROPULSATE MIXTE

de POLIDOR BRATU
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor — INCERC

Mașinile vibratoare compactoare autopropulsate mixte, sau cum mai sînt denumite „compactoare vibratoare autopropulsate mixte (combinate)" au în componența lor, ca organe de lucru, un rulou vibrator plasat în față, care realizează compactarea dinamică a stratului în adîncime și o pereche de roți cu pneuri pentru compactarea la suprafață, deci acestea realizează procesul de compactare prin efect combinat (mixt).
În lucrare se tratează dinamica mașinii la vibrații forțate, fiind schematizată printr-un model viscoelastic liniar cu opt grade de libertate. Astfel se prezintă sub forma analitică ecuațiile diferențiale de mișcare, care permit o imagine a intercorelării elementelor masice cu cele ale rigidității precum și evidențierea cuplării modurilor de mișcare. De asemenea, ecuațiile diferențiale de mișcare sînt prezentate și sub formă matriceală în vederea automatizării calculului pulsațiilor proprii și celorlalți parametri ai vibrațiilor, pentru diverse variante constructive de proiectare.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Volumul mare de investiții din ramura construcții impune folosirea unor mașini cît mai perfecționate care să asigure un nivel calitativ ridicat al lucrărilor de construcții. În acest context se înscriu și lucrările de compactat, etapă integrantă a tehnologiilor moderne atît la sistemele rutiere, cît și la fundații speciale.

Din sistema de mașini de construcții care deservește tehnologiile utilizate în mod curent face parte și clasa mașinilor de compactat prin vibrare. Tehnologiile moderne, însă, au impus folosirea unor mașini de compactat cu *acțiune combinată*, adică, procesul de compactare în profunzimea stratului se realizează prin vibrare, iar compactarea de suprafață se realizează prin apăsarea stratului de către pneuri care sînt și de tracțiune.

Conceptele de ergonomie, fiabilitate, mentenabilitate au condus, în general, la o gîndire sistemică a acestor mașini, astfel încît să se realizeze elementele de design și de performanță tehnică. Problema confortului în cabină (postul) de lucru ale mecanicului operator este primordială și se realizează mergîndu-se pe concepția umanizării elementelor mașinii.

Parametrii de confort sînt legați în primul rînd de nivelul higrotermic, vizibilitatea, eforturile și cursele la manetele de comandă, poziția comodă pe scaun.

La mașinile de compactat prin vibrare trebuie să fie satisfăcuți parametrii vibrațiilor de lucru la ruloul vibrator, precum și nivelul de vibrații admis la postul de lucru al mecanicului, durabilitatea ridicată

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 3, 1979, P. 449—464

în funcţionare a maşinii. Faţă de aceste deziderate structura maşinilor s-a modificat cunoscînd o evoluţie explozivă în ultima vreme. Astfel, şasiul este articulat cu părţile componente, de regulă, echilibrate pe cele două axe (rulou faţă, pneuri spate), vibratorul este de tip inerţial cu vibraţii circulare sau unidirecţionale, tracţiunea este pe pneuri sau atît pe pneuri, cît şi pe ruloul vibrator.

În articolul de faţă se vor prezenta toate fazele intermediare privind scrierea ecuaţiilor diferenţiale de mişcare în regim de vibraţii, modificarea principalilor parametri ai vibraţiilor sub influenţa variaţiei parametrilor masici şi de rigiditate.

Avînd în vedere evoluţia pînă în prezent şi tendinţele în construcţia unor astfel de tipuri de maşini în figura 1 se prezintă un model de cilindru compactor vibrator cu acţiune combinată (rulou vibrator şi pneuri). Astfel de maşini sînt produse în serie la firmele DYNAPAC, AVELING — BARFORD LTD, MASHINENBAU (MBU) ş.a.

Faţă de modelele existente [27], această maşină prezintă particularitatea că mai conţine încă o treaptă de amortizare înglobată în articulaţia şasiului.

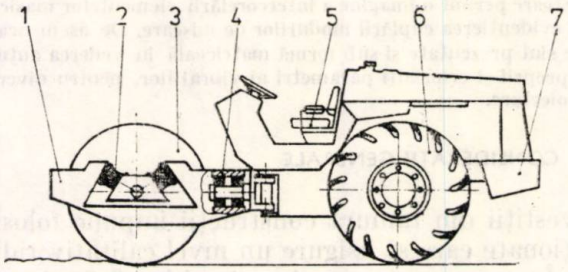


Fig. 1. — Schema constructivă a unui compactor vibrator autopropulsat mixt, cu două trepte de izolare şi amortizare a vibraţiilor.

2. MODELAREA DINAMICĂ STRUCTURALĂ A MAŞINII

În figura 1 se prezintă un model real de cilindru compactor vibrator cu acţiune combinată. Acesta se compune din următoarele elemente:

— ruloul (cilindrul) vibrator 3, amplasat în faţă;

— şasiul anterior 1, amplasat în faţa maşinii deasupra ruloului vibrator;

— prima treaptă de izolare şi amortizare a vibraţiilor amplasată între ruloul vibrator şi şasiul anterior, compusă din elemente amortizoare de cauciuc 2. Are menirea să izoleze vibraţiile transmise de ruloul vibrator (compactor) la şasiul anterior;

— a doua treaptă de izolare şi amortizare a vibraţiilor este înglobată în articulaţia şasiului şi se compune din inele amortizoare de cauciuc 4, îndeplinind rolul de a izola vibraţiile transmise de la şasiul anterior la postul de lucru 5, al mecanicului şi subansamblurilor componente;

— şasiul posterior 7, al maşinii constituie suportul postului de comandă, grupului de acţionare, instalaţiei de forţă şi comandă;

— roţile cu pneuri 6, sînt dispuse în spate şi constituie elementele

de tracțiune pentru deplasarea mașinii. Ele pot fi acționate mecanic, sau mai modern, hidrostatic cu roți motoare înglobate în jantă.

În general, toate mașinile din această clasă prezintă un ridicat grad de simetrie față de planul longitudinal median.

2.1. MODELAREA ELEMENTELOR MASICE

În timpul funcționării mașinii în regim de vibrații toate subansamblele se află în mișcare vibratorie, de aceea influența elementelor masice (inerțiale) este deosebit de importantă, atît asupra parametrilor vibrațiilor de lucru cît și asupra gradului de vibroizolare.

Funcție de structura geometrică și masică a piesei sau subansamblului și ținînd seama de tipul mișcărilor posibile se realizează modelul simplificat sub formă de bară sau corp, caracterizat din punct de vedere inerțial prin masă și momentele de inerție principale care pot fi determinate experimental [22], [23].

2.2. MODELAREA ELEMENTELOR ELASTICE DE IZOLARE ȘI AMORTIZARE A VIBRAȚIILOR

În categoria mașinilor de compactat cu acțiune vibrantă se folosesc numai elemente antivibratile de cauciuc [4], [5], [28].

Acestea sînt fie sub formă cilindrică, prismatică, solicitate la compresiune și forfecare, fie sub formă inelară solicitate radial și axial.

Funcție de configurația geometrică, rețeta cauciucului și mărimea solicitării, elementele antivibratile din cauciuc pot fi reprezentate într-o gamă variată de modele reologice. Astfel, au fost concepute mai multe modele reologice pentru elementele din cauciuc reținînd atenția următoarele: modelul elastic Hooke, modelul vîscoelastic Kelvin-Voigt, modelul vîscoelastic Maxwell, modelul Zener și modelul vîscoelastic ereditar Voterra-Boltzmann [8], [9], [13], [18], [19], [26].

Experiența acumulată în acest domeniu a permis ca pentru anumite rețete de cauciuc, în prezent să se utilizeze elemente antivibratile care să poată fi reprezentate prin modelul reologic Kelvin-Voigt, pentru o anumită durată de funcționare a mașinilor [5], [9].

2.3. MODELAREA MEDIULUI DE COMPACTAT

Prin mediu de compactat se va înțelege totalitatea materialelor care urmează a fi compactate: asfalt bituminos, straturi de balast, piatră spartă, nisip, pămînt. Toate materialele prezentate sînt caracterizate prin legături elastice, vîscoase și plastice, iar sub acțiunea solicitării exterioare are loc o stabilizare a fenomenului de deformare (modificarea volumului). Au fost analizate modele reologice complexe, încercîndu-se o reprezentare cît mai fidelă a fenomenelor reale care au loc în structura materialelor de compactat sub influența unor factori caracteristici cum ar fi, consistența, umiditatea, forma și mărimea granulelor, coeziunea. Pro-

cesul de compactare legat de proprietăţile predominante ale materialelor a condus la elaborarea următoarelor modele elastovîsco-plastice : modelul Bathelt, modelul Ephremidis, modelul Dvorak — Peter, modelul Hartman [14], [15], [18], [26].

Influenţa mediului de compactat asupra parametrilor maşinilor de compactat poate fi aproximată însă cu suficientă precizie cu ajutorul modelului Kelvin-Voigt, deoarece frecvenţele de lucru sînt de 4 ... 6 ori mai mari decît frecvenţele de rezonanţă. Determinările experimentale au confirmat această ipoteză [4].

2.4. MODELAREA ROŢILOR CU PNEURI

Rezemarea maşinii în partea posterioară se realizează printr-o pereche de roţi cu pneuri. Pneurile au rolul de a asigura compactarea la suprafaţa materialului, existînd posibilitatea varierii presiunii aerului din camera pneului funcţie de necesităţile tehnologice. Într-o primă aproximaţie, din punct de vedere al dinamicii vibraţiilor, pneurile se reprezintă ca un model reologic de tip Kelvin-Voigt a cărui componentă elastică este dată de cauciucul pneului, iar componenta vîscoasă este dată de proprietăţile vîscoase ale cauciucului şi aerului din camera pneului [9], [25].

2.5. MODELUL DINAMIC AL MAŞINII

Ţinînd seama de structura maşinii privind existenţa şi repartiţia elementelor masice, elastice, amortizoare, de rezemare, precum şi de proprietăţile mediului de compactat, maşina poate fi schematizată din punct de vedere al comportării la vibraţii ca un model cu opt grade de libertate (fig. 2).

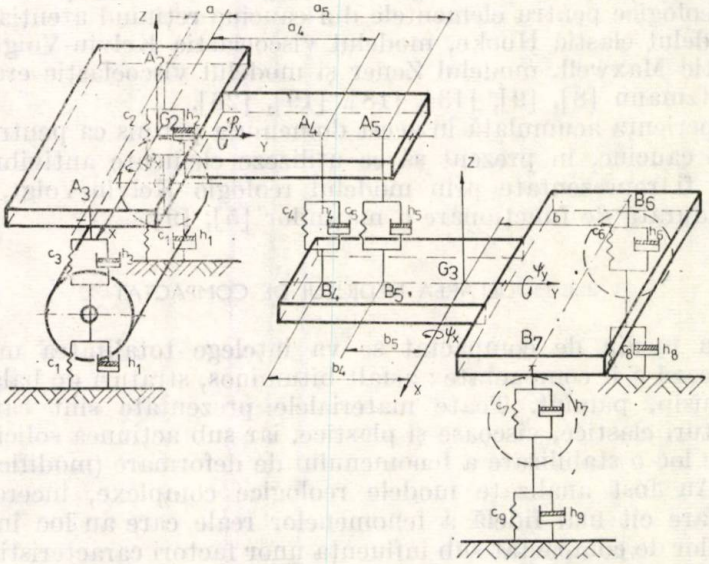


Fig. 2. — Modelul dinamic al compactorului vibrator autopropulsat mixt.

Avînd în vedere construcţia simetrică în raport cu planul longitudinal median al acestor maşini, precum şi posibilităţile de mişcare ale maselor la vibraţii undirecţionale pe verticală, coordonatele generalizate ale sistemului vor fi :

z_1 — deplasarea pe verticală a ruloului vibrator ;
z_2 — deplasarea pe verticală a şasiului anterior ;
z_3 — deplasarea pe verticală a şasiului posterior ;
θ_y — rotirea ruloului vibrator faţă de axa orizontală G_1y care trece prin centrul de masă al ruloului ;
φ_x — rotirea şasiului anterior în raport cu axa G_2x care trece prin centrul de masă G_2 ;
φ_y — rotirea şasiului anterior în rapot cu axa G_2y care trece prin centrul de masă G_2 ;
Ψ_x — rotirea şasiului posterior în raport cu axa G_3x care trece prin centrul de masă G_3 ;
Ψ_y — rotirea şasiului posterior în raport cu axa G_3y care trece prin centrul de masă G_3.

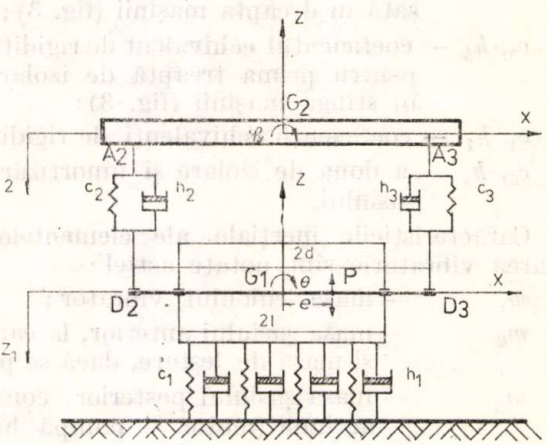


Fig. 3. — Modelul dinamic al maşinii (vedere din faţă).

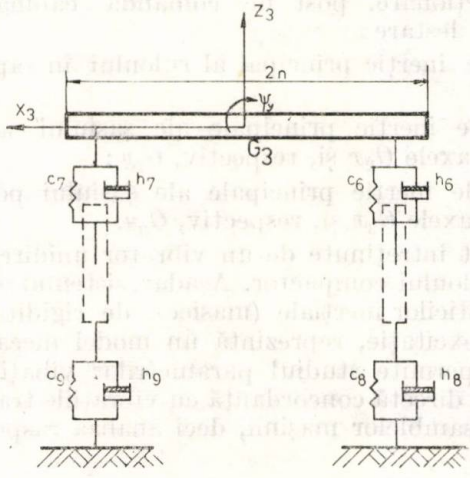


Fig. 4. — Modelul dinamic al maşinii (vedere din spate).

Deoarece în timpul exploatării mașinii, pentru anumite tehnologii de compactare există posibilitatea modificării proprietăților vîscoelastice ale sistemelor de amortizare a vibrațiilor atît la prima treaptă de amortizare, cît și la cea de-a doua, ale mediului de compactat și pneurilor, s-au utilizat notații diferite pentru elemente identice ca formă și funcționalitate. Astfel, s-au folosit următoarele notații cu semnificațiile corespunzătoare :

c_1, h_1 — coeficientul de rigiditate, respectiv de amortizare al mediului de compactat în starea inițială de compactare (fig. 3) ;

c_8, h_8 — coeficientul de rigiditate, respectiv de amortizare al terenului sub pneul din dreapta, după o trecere a ruloului vibrator (fig. 4) ;

c_9, h_9 — coeficientul de rigiditate, respectiv de amortizare al terenului sub pneul din stînga, după o trecere a ruloului vibrator (fig. 4) ;

c_2, h_2 — coeficientul echivalent de rigiditate, respectiv de amortizare, pentru prima treaptă de izolare și amortizare amplasată în dreapta mașinii (fig. 3) ;

c_3, h_3 — coeficientul echivalent de rigiditate, respectiv de amortizare pentru prima treaptă de izolare și amortizare amplasată în stînga mașinii (fig. 3) ;

c_4, h_4 — coeficienții echivalenți de rigiditate și amortizare ai treptei

c_5, h_5 a doua de izolare și amortizare, amplasată în articulația șasiului.

Caracteristicile inerțiale ale elementelor discrete participante la mișcarea vibratorie sînt notate astfel :

m_1 — masa ruloului vibrator ;

m_2 — masa șasiului anterior, la care se mai adaugă, eventual și masa de lestare, dacă se prevede această posibilitate ;

m_3 — masa șasiului posterior, compusă din masa grupului de acțiune (motor + pompă hidraulică), instalația de comandă și acționare, post de comandă, cabină, roți, elemente de lestare ;

J_{1y} — momentul de inerție principal al ruloului în raport cu axa G_1y ;

J_{2x}, J_{2y} — momentele de inerție principale ale șasiului anterior în raport cu axele G_2x și, respectiv, G_2y ;

J_{3x}, J_{3y} — momentele de inerție principale ale șasiului posterior în raport cu axele G_3x și, respectiv, G_3y.

Vibrațiile sistemului sînt întreținute de un vibrator unidirecțional armonic plasat în interiorul ruloului compactor. Așadar, sistemul schematizat, prin precizarea caracteristicilor inerțiale (masice), de rigiditate, de amortizare, geometrice și de excitație, reprezintă un model mecanic cu opt grade de libertate, care permite studiul parametrilor vibațiilor de lucru ale ruloului compactor în directă concordanță cu vibrațiile transmise postului de comandă și subansamblelor mașinii, deci analiza răspunsului sistemului la excitația dată.

3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE PENTRU MODELUL ELASTIC

Există situații cînd proprietățile elastice sînt predominate în raport cu cele vîscoase pentru anumite regimuri de lucru, în acest caz modelul prezentat în figura 2 simplificîndu-se prin eliminarea elementelor de amortizare vîscoasă, rezultînd un model elastic. În acest caz se permite o metodă de lucru mai puțin laborioasă, rezultatele din analiza răspunsului sistemului mecanic fiind afectate, însă, de anumite erori.

3,1. DETERMINAREA DEPLASĂRILOR PUNCTELOR DE REAZEM

Fiecare din cele trei subansamble, rulou, șasiu anterior, șasiu posterior, se vor considera ca solide rigide rezemate elastic.

Poziția unui punct oarecare A_i, față de centrul de masă G este dată de vectorul de poziție $\bar{r}_i$, iar pentru o rotire foarte mică $\bar{\alpha}$ vom avea o deplasare elementară $\delta\bar{r}_i$ astfel [9], [10], [11], [12], [24]:

$$\delta\bar{r}_i = \bar{\alpha} \times \bar{r}_i, \tag{1}$$

Considerînd că sistemul de axe fix $G_j\,XYZ$ trece prin centrul de masă G_j ($j = 1, 2, 3$) al fiecărui solid în poziția de echilibru static al mașinii și se confundă, în această situație, cu sistemul de axe mobil $G_j\,xyz$, deplasarea totală a punctului A_i, pentru o rotație și o translație instantanee în raport cu sistemul fix, va fi:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_G + \bar{\alpha} \times \bar{r}_i \tag{2}$$

sau

$$\bar{u}_i = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Ținînd seama de faptul că $\alpha_z = 0$, $z_i = 0$, $X = 0$ și $Y = 0$ conform ipotezelor adoptate anterior, vom avea:

$$\bar{u}_i = Z\bar{k} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & 0 \\ x_i & y_i & 0 \end{vmatrix} \tag{4}$$

sau proiectînd pe axa G_jZ, obținem

$$u_{iz} = Z + y_i\alpha_x - x_i\,\alpha_y, \tag{5}$$

deplasarea după verticală a punctului A_i la o rotație instantanee $\bar{\alpha}(\alpha_x, \alpha_y, 0)$ și o deplasare instantanee de mărime Z.

La relaţia (5) se mai poate ajunge şi prin exprimare matriceală, [12] a relaţiei (4) astfel :

$$u_{i_z} = Z + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

unde matricea pătratică

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}$$

este numită matricea antisimetrică a vectorului $\overline{\alpha}$ $(\alpha_x, \alpha_y, 0)$.

Pentru vibraţiile de amplitudine mică (sub 1,5 mm) în scopul determinării deplasării totale instantanee a unui punct al solidului rezemat elastic, ce efectuează simultan o rotaţie şi o translaţie instantanee faţă de sistemul fix, a fost utilizată relaţia (4), constatîndu-se o foarte bună concordanţă a rezultatelor teoretice cu cele experimentale [4], [24]. De asemenea, în domeniul proiectării, construcţiei şi exploatării compactoarelor vibratoare mixte, amplitudinea vibraţiilor de lucru a ruloului compactor vibrator, luată în calcul, nu depăşeşte valoarea de 1,5 mm, care poate fi considerată foarte mică în comparaţie cu dimensiunile subansamblelor ce se află în mişcare vibratorie, de aceea şi în acest caz se va lucra cu relaţia (4) sau (6).

3.2. DETERMINAREA DEFORMAŢIILOR ELEMENTELOR ELASTICE

Defomaţia unui element elastic o vom considera ca fiind deplasarea relativă a punctelor de prindere în mişcarea vibratoare pe verticală. Astfel, vom avea :

$$\begin{aligned}
v_2 &= u_2 - \delta_2 = z_2 - z_1 + a\varphi_x - l\theta_y, \\
v_3 &= u_3 - \delta_3 = z_2 - z_1 + a\varphi_x - d\varphi_y + l\theta_y, \\
v_4 &= u_4 - u'_4 = z_2 - z_3 + a_4\varphi_x - b_4\Psi_x, \\
v_5 &= u_5 - u'_5 = z_2 - z_3 + a_5\varphi_x - b_5\Psi_x, \\
v_{68} &= u_6 = z_3 + b\Psi_x + n\Psi_y, \\
v_{79} &= u_7 = z_3 + b\Psi_x - n\Psi_y.
\end{aligned} \tag{7}$$

unde v_i, $i = 2, 3, 4, 5, 68, 79$ — reprezintă deformaţia elementelor elastice cu coeficientul de rigiditate, respectiv, c_2, c_3, c_4, c_5, c_{68} ale elementelor serie c_6 şi c_8, precum şi c_{79} ale elementelor c_7 şi c_9 ;

u_i, $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ — reprezintă deplasările totale ale punctelor, respectiv A_2, A_3, A_4, A_5, B_6, B_7;

δ_i, $i = 2, 3$ — reprezintă deplasările totale ale punctelor, respectiv, D_2 și D_3;

u_i', $i = 4, 5$ — reprezintă deplasările totale ale punctelor B_4 și, respectiv, B_5.

3.3. *Energia sistemului mecanic*

Energia cinetică totală a sistemului mecanic va fi:

$$2T = m_1\dot{z}_1^2 + m_2\dot{z}_2^2 + m_3\dot{z}_3^2 + J_{1x}\dot{\theta}_x^2 + J_{2x}\dot{\varphi}_x^2 + J_{2y}\dot{\varphi}_y^2 + J_{3x}\dot{\Psi}_x^2 + J_{5y}\dot{\Psi}_y^2 \quad (8)$$

Energia potențială totală de deformare, ținînd seama de relațiile (7) va fi:

$$2\Pi = c_1z_1^2 + c_0\theta_y^2 + c_2(z_2 - z_1 + a\varphi_x + d\varphi_y - l\theta_y)^2 + c_3(z_2 - z_1 +$$

$$+ a\varphi_x + l\theta_y)^2 + c_4(z_2 - z_3 + a_4\varphi_x - b_4\Psi_x)^2 + c_5(z_2 - z_3 + a_5\varphi_x -$$

$$- b_5\Psi_x)^2 + c_{68}(z_3 + b\Psi_x + n\Psi_y)^2 + c_{79}(z_3 + b\Psi_x - n\Psi_y)^2. \quad (9)$$

3.4. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE VIBRAȚIILOR FORȚATE PENTRU MODELUL ELASTIC

Mașina are în componența ei ruloul compactor vibrator ale cărui vibrații sînt produse de un generator unidirecțial pe verticală avînd forța $P = P_0 \sin \omega t$.

Scriind ecuațiile lui Lagrange de speța a doua pentru vibrațiile forțate în absența elementelor de amortizare, [6], [20], [21], [22], [27], vom avea:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} + Q_{kP}. \quad (10)$$

unde q_k, $k = 1, \ldots 8$ — coordonata generalizată corespunzătoare gradului de libertate k;

Q_{kP} — forța generalizată a forțelor perturbatoare.

Utilizînd relațiile (8), (9) și (10) se va putea scrie sistemul de ecuații diferențiale ale vibrațiilor forțate armonice pentru cazul elastic, astfel:

$$m_1\ddot{z}_1 + z_1(c_1 + c_2 + c_3) - z_2(c_2 + c_3) + \theta_y(c_2 - c_3)l - \varphi_x(c_2 + c_3)a +$$

$$+ \varphi_y(c_3 + c_2)d = P_0 \sin \omega t,$$

$$m_2\ddot{z}_2 - z_1(c_2 + c_3) + z_2(c_2 + c_3 + c_4 + c_5) + \theta_y(c_3 - c_2)l - z_3(c_4 + c_5) +$$

$$+ \varphi_x(c_2a + c_3a + c_4a_4 + c_5a_5) + \varphi_y(c_2 - c_3)d - \Psi_x(c_4b_4 + c_5b_5) = 0,$$

$$m_3\ddot{z}_3 - z_2(c_4 + c_5) + z_3(c_4 + c_5 + c_{68} + c_{79}) - \varphi_x(c_4a_4 + c_5a_5) + \Psi_x(c_4b_4 +$$

$$+ c_5b_5 + c_{68}b - c_{79}b) + \Psi_y(c_{68} - c_{79})n = 0,$$

$$J_{1y}\ddot{\theta}_y + z_1(c_2 - c_3)\,l + z_2(c_3 - c_2)\,l + \theta_y(c_0 + c_3l^2 + c_2l^2) + \varphi_x(c_3 -$$

$$- c_2)al - \varphi_y(c_2 + c_3)ld = P_0 \text{ e } \sin \omega t,$$

$$J_{2x}\ddot{\varphi}_x - z_1(c_2 + c_3)a + z_2(c_2a + c_3a + c_4a_4 + c_5a_5) - z_3(c_4a_4 + c_5a_5) +$$

$$+ \varphi_x(c_2a^2 + c_3a^2 + c_4a_4^2 + c_5a_5^2) + \varphi_y(c_2 - c_3)ad - \Psi_x(c_5a_5b_5 + c_4a_4b_4) = 0,$$

$$J_{2y}\ddot{\varphi}_y + z_1(c_3 - c_2)d + z_2(c_2 - c_3)d - \theta_y(c_2 + c_3)ld + \varphi_x(c_2 - c_3)ad +$$

$$+ \varphi_y(c_2 + c_3)d^2 = 0,$$

$$J_{3x}\ddot{\Psi}_x - z_2(c_4b_4 + c_5b_5) + z_3(c_4b_4 + c_5b_5 + c_{68}b + c_{79}b) - \varphi_x(c_4b_4a_4 +$$

$$+ c_5b_5a_5) + \Psi_x(c_4b_4^2 + c_5b_5^2 + c_{68}b^2 + c_{79}b^2) + \Psi_y(c_{68} - c_{79})bn = 0,$$

$$J_{3y}\ddot{\Psi}_y + z_3(c_{68} - c_{79})n + \Psi_x(c_{68} - c_{79})nb + \Psi_y(c_{68} + c_{79})n^2 = 0. \tag{11}$$

4. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE PENTRU MODELUL VÎSCOELASTIC

Avînd în vedere modelul vîscoelastic al mașinii prezentat în figura 2 se introduce funcția disipativă D care se află în următoarea relație cu forța disipativă [22]:

$$Q_{kR} = -\frac{\partial D}{\partial q_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots 8,$$

unde

Q_{kR} este forța generalizată a forțelor disipative.

Procedînd analog ca la § 3.2. și derivînd odată relațiile (7) în raport cu timpul, introducînd coeficienții de amortizare vîscoasă h_k, se va obține funcția disipativă D.

$$2D = h_1\dot{z}_1^2 + h_0\,\dot{\theta}_y^2 + h_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1 + a\dot{\varphi}_x + d\dot{\varphi}_y - l\dot{\theta}_y)^2 + h_3(\dot{z}_2 - \dot{z}_1 +$$

$$+ a\dot{\varphi}_x - d\dot{\varphi}_y + l\dot{\theta}_y)^2 + h_4(\dot{z}_2 - \dot{z}_3 + a_4\dot{\varphi}_x - b_4\dot{\Psi}_x)^2 + h_5(\dot{z}_2 - \dot{z}_3 +$$

$$a_5\dot{\varphi}_x - b_5\dot{\Psi}_x)^2 + h_{68}(\dot{z}_3 + b\dot{\Psi}_x + n\dot{\Psi}_y)^2 + h_{79}(\dot{z}_3 + b\dot{\Psi}_x - n\dot{\Psi}_y)^2. \tag{12}$$

Ecuațiile lui Lagrange de speța a doua pentru sistemul mecanic vîscoelastic cu forță perturbatoare se scrie astfel [23]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} + Q_{kP}. \tag{13}$$

Utilizînd relaţiile (11), (12) şi (13) se obţin ecuaţiile diferenţiale ale vibraţiilor forţate pentru modelul vîscoelastic :

$$m_1\ddot{z}_1 + \dot{z}_1(h_1 + h_2 + h_3) - \dot{z}_2(h_2 + h_3) + \dot{\theta}_y(h_2 - h_3)l - \dot{\varphi}_x(h_2 + h_3)\,a +$$

$$+ \dot{\varphi}_y(h_3 - h_2)d + z_1(c_1 + c_2 + c_3) - z_2(c_2 + c_3) + \theta_y(c_2 - c_3)l -$$

$$- \varphi_x(c_2 + c_3)a + \varphi_y(c_3 - c_2)d = P_0 \sin\omega t,$$

$$m_2\ddot{z}_2 - \dot{z}_1 + (h_2 + h_3 + \dot{z}_2(h_2 + h_3 + h_4 + h_5) - \dot{z}_3(h_4 + h_5) + \dot{\theta}_y(h_3 - h_2)l +$$

$$+ \dot{\varphi}_x(h_3a + h_2a + h_4a_4 + h_5a_5) + \dot{\varphi}_y(h_2 - h_3)d - \dot{\Psi}_y(h_4b_4 + h_5b_5) -$$

$$- z_1(c_2 + c_3) + z_2(c_2 + z_3 + c_4 + c_5) - z_3(c_4 + c_5) + \theta_y(c_3 - c_2)l +$$

$$+ \varphi_x(c_2a + c_3a + c_4a_4 + c_5a_5) + \varphi_y(c_2 - c_3)d - \Psi_x(c_4b_4 + c_5b_5) = 0,$$

$$m_3\ddot{z}_3 - \dot{z}_2(h_4 + h_5) + \dot{z}_3(h_4 + h_5 + h_{68} + h_{79}) - \dot{\varphi}_x(h_4a_4 + h_5a_5) +$$

$$+ \dot{\Psi}_x(h_4b_4 + h_5b_5 + h_{68}b + h_{79}b) + \dot{\Psi}_y(h_{68} - h_{79})n - z_2(c_4 + c_5) + z_3(c_4 +$$

$$+ c_5 + c_{68} + c_{79}) - \varphi_x(c_4a_4 + c_5a_5) + \Psi_x(c_4b_4 + c_5b_5 + c_{68}b + c_{79}b) +$$

$$+ \Psi_y(c_{68} - c_{79})n = 0,$$

$$J_{1y}\ddot{\theta}_y\,\dot{z} + {}_1(h_2 - h_3)l + \dot{z}_2(h_3 - h_2)l + \dot{\theta}_y(h_\theta + h_2l^2 + h_3l^2) + \dot{\varphi}_x(h_3 -$$

$$- h_2)al - \dot{\varphi}_y(h_2 + h_3)ld + z_1(c_2 - c_3)l + z_2(c_3 - c_2)l + \theta_y(c_\theta + c_3l^2 +$$

$$+ c_2l^2) + \varphi_x(c_3 - c_2)al - \varphi_y(c_2 + c_3)ld = P_0\,\mathrm{e}\sin\omega t,$$

$$J_{2x}\ddot{\varphi}_x - \dot{z}_1(h_2 + h_3)a + \dot{z}_2(h_2a + h_3a + h_4a_4 + h_5a_5) - \dot{z}_3(h_4a_4 + h_5a_5) +$$

$$+ \dot{\theta}_y(h_3 - h_2)al + \dot{\varphi}_x(h_2a^2 + h_3a^2 + h_4a_4^2 + h_5a_5^2) + \dot{\varphi}_y(h_2 - h_3)ad -$$

$$- \dot{\Psi}_x(h_4a_4b_4 + h_5a_5b_5) - z_1(c_2 + c_3)a + z_2(c_2a + c_3)\,a + c_4a_4 + c_5a_5) -$$

$$- z_3(c_4a_4 + c_5a_5) + \theta_y(c_3 - c_2)al + \varphi_x(c_2a^2 + c_3a^2 + c_4a_4^2 + c_5a_5^2) +$$

$$+ \varphi_y(c_2 - c_3)ad - \Psi_x(c_5a_5b_5 + c_1a_4b_4) = 0,$$

$$J_{2y}\ddot{\varphi}_y - \dot{z}_1(h_2 + h_3)d + \dot{z}_2(h_2 - h_3)d - \dot{\theta}_y(h_2 + h_3)ld + \dot{\varphi}_x(h_2 - h_3)\,ad +$$

$$+ \dot{\varphi}_y(h_2 + h_3)d^2 - z_1(c_2 - c_3)d + z_2(c_2 - c_3)d - \theta_y(c_2 + c_3)ld +$$

$$+ \varphi_x(c_2 - c_3)ad + \varphi_y(c_2 + c_3)d^2 = 0,$$

$$J_{3x}\ddot{\Psi}_x - \dot{z}_2(h_4b_4 + h_5b_5) + \dot{z}_3(h_4b_4 + h_5b_5 + h_{68}b + h_{79}b) - \dot{\varphi}_x(h_4a_4b_4 +$$

$$+ h_5a_5b_5) + \dot{\Psi}_x(h_4b_4^2 + h_5\,b_5^2 + h_{68}\,b^2 + h_{79}b^2) + \dot{\Psi}_y(h_{68} - h_{79})nb -$$

$$- z_2(c_4b_4 + c_5b_5) + z_3(c_4b_4 + c_5b_5 + c_{68}b + c_{79}b) - \varphi_x(c_4b_4a_4 + c_5b_5a_5) +$$

$$+ \Psi_x(c_4b_4^2 + c_5b_5^2 + c_{79}\,b^2 + c_{68}\,b^2) + \Psi_y(c_{68} - c_{79})bn = 0,$$

$$J_{3y}\ddot{\Psi}_y + \dot{z}_3(h_{68} - h_{79})n + \dot{\Psi}_x(h_{68} - h_{79})nb + \dot{\Psi}_y(h_{68} + h_{79})n^2 + z_3(c_{68} -$$

$$- c_{79})n + \Psi_x(c_{68} - c_{79})nb + \Psi_y(c_{68} + c_{79})n^2 = 0. \tag{16}$$

5. FORMULAREA MATRICEALĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE MIȘCARE

Scrierea matriceală a ecuațiilor diferențiale permite, într-o formă mai accesibilă, adaptarea la calculul automat în vederea determinării pulsațiilor proprii și al analizei răspunsului sistemului la excitația dată [1], [2], [3], [17].

Pentru aceasta se exprimă atît energia cinetică, cît și energia potențială de deformație a sistemului sub formă matriceală.

Astfel, energia cinetică, ținînd seama și de relația (8), se scrie :

$$2T = \langle \dot{\boldsymbol{q}}, M\dot{\boldsymbol{q}} \rangle = \dot{\boldsymbol{q}}^T M\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{17}$$

unde $\dot{\boldsymbol{q}}^T = [\dot{z}_1, \dot{z}_2, \dot{z}_3, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\Psi}_x, \dot{\Psi}_y, \dot{\theta}_y]$ — reprezintă vectorul transpus al vitezelor

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & & & & \\ & m_2 & & & & & & \\ & & m_3 & & & & & \\ & & & J_{2x} & & & & \\ & & & & J_{2y} & & & \\ & & & & & J_{3x} & & \\ & & & & & & J_{3y} & \\ & & & & & & & J_{1y} \end{bmatrix}$$

— reprezintă matricea de inerție

Energia potențială a sistemului, față de poziția de echilibru static, ținînd seama de forma pătratică (9), se scrie astel :

$$2\Pi = \langle V,\ C_0\, V \rangle. \tag{18}$$

unde

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_1 & & & & & & & \\ & c_2 & & & & & & \\ & & c_3 & & & & & \\ & & & c_4 & & & & \\ & & & & c_5 & & & \\ & & & & & c_{68} & & \\ & & & & & & c_{79} & \\ & & & & & & & c_\theta \end{bmatrix}$$

— reprezintă matricea de rigiditate

$$\mathbf{v} = A\mathbf{q}, \tag{19}$$

în care

* $\mathbf{v}^T = [v_1, \ldots v_8]$ — reprezintă vectorul transpus al deformațiilor elementelor elastice, avînd următoarele componente :

$$v_1 = q_1,$$

$$v_2 = -q_1 + q_2 + aq_4 + dq_5 - lq_8,$$

$$v_3 = -q_1 + q_2 + aq_4 - dq_5 + lq_8,$$

$$v_4 = q_2 - q_3 + a_4q_4 - b_4q_6,$$

$$v_5 = q_2 - q_3 + a_5q_4 - b_5q_6,$$

$$v_6 = q_3 + bq_6 + nq_7,$$

$$v_7 = q_3 + bq_6 - nq_7,$$

$$v_8 = q_8.$$

** $\boldsymbol{q}^T = [q_1, \ldots q_8]$ — reprezintă vectorul transpus al deplasărilor, cu următoarele componente :

$$q_1 = z_1;\ q_2 = z_2;\ q_3 = z_3;\ q_4 = \varphi_x;$$

$$q_5 = \varphi_y;\quad q_6 = \Psi_x;\quad q_7 = \Psi_y;\quad q_8 = \theta_y;$$

*** A — matricea de influență a deplasărilor asupra deformațiilor [13],

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & a & d & 0 & 0 & -l \\ -1 & 1 & 0 & a & -d & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & -1 & a_4 & 0 & -b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & a_5 & -b_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Folosind relația (19), expresia (18) se poate scrie astfel :

$$2\Pi = \langle A\boldsymbol{q},\ C_0 A\boldsymbol{q}\rangle,$$

sau :

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{q},\ A^T C_0 A\boldsymbol{q}\rangle.$$

în care, notînd,

$$C = A^T C_0 A,$$

avem

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{q}, C\boldsymbol{q} \rangle. \tag{20}$$

Funcţia disipativă D se poate exprima astfel :

$$2D = \langle \dot{\boldsymbol{v}}, H_0 \dot{\boldsymbol{v}} \rangle,$$

sau, ţinînd seama de expresia,

$$\dot{\boldsymbol{v}} = A\dot{\boldsymbol{q}},$$

vom avea

$$2D = \langle A\dot{\boldsymbol{q}}, H_0 A\dot{\boldsymbol{q}} \rangle = \langle \dot{\boldsymbol{q}}, A^T H_0 A\dot{\boldsymbol{q}} \rangle.$$

Dacă notăm

$$H = A^T H_0 A,$$

vom avea

$$2D = \langle \dot{\boldsymbol{q}}, H\dot{\boldsymbol{q}} \rangle. \tag{21}$$

S-a notat cu H_0 — matricea amortizărilor, care are forma

$$H_0 = \begin{bmatrix} h_1 & & & & & & \\ & h_2 & & & & \mathbf{0} & \\ & & h_3 & & & & \\ & & & h_4 & & & \\ & \mathbf{0} & & & h_5 & & \\ & & & & & h_{68} & \\ & & & & & & h_{79} \\ & & & & & & & h_0 \end{bmatrix}.$$

Utilizînd relaţiile (17), (20) şi (21) ecuaţia diferenţială a mişcării sub forma matriceală se scrie astfel

$$M\ddot{\boldsymbol{q}} + H\dot{\boldsymbol{q}} + C\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}, \tag{22}$$

unde

$$\boldsymbol{f}^T = [P_0 \sin\omega t, \quad 0 \ldots 0, \quad P_0 e \sin \omega t].$$

6. CONCLUZII

a) Adoptarea modelului dinamic de calcul cu opt grade de libertate schematizat cu ajutorul elementelor elastice şi vîscoase liniare, în vederea determinării frecvenţelor de rezonanţă şi a analizei răspunsului sistemului la frecvenţele de lucru, reprezintă o aproximare suficient de precisă pentru calculele de proiectare a modelului real. Astfel, prin utilizarea unui model analog cu cel prezentat, introducîndu-se în calcul toate elementele de rigiditate, amortizare şi inerţiale determinate experimental, s-au putut determina amplitudinile, cu o abatere maximă de 10% faţă de cele măsurate, iar frecvenţele proprii au avut o mai bună concordanţă, abaterea maximă

fiind de numai 5%. Determinările experimentale au fost efectuate pe șase modele ale compactorului vibrator autopropulsat de 4—5 tf, prototip și serie zero. Atît particularitățile de calcul numeric, cît și analiza modului prin care modelul teoretic aproximează mașina, vor fi prezentate într-o altă lucrare destinată să conțină și elemente concrete de proiectare pentru această clasă de mașini.

b) Introducînd anumite condiții de simetrie a elementelor de rigiditate și de amortizare în structura mașinii, cu ajutorul relațiilor (11) și (16) se pot depista ușor decuplările diferitelor moduri de mișcare și de asemenea se pot calcula amplitudinile. Pentru atingerea tuturor performanțelor tehnice în condițiile utilizării raționale a metalului, se impune ca structura mașinii să fie stabilită după ce elementele necesare de vibrații au fost determinate pe baza unui model cît mai fidel cu realitatea. Atît modelul, cît și structura mașinii este necesar să țină seama de faptul că elementele de fiabilitate, ergonomie, mentenabilitate și design, trebuie să atingă parametri corespunzători, chiar în condițiile necesității schimbării formei mașinii, distribuției maselor, rigidităților etc. De aceea este necesar ca în alegerea modelului mecanic să existe mai multe posibilități de modificare cu un grad de generalitate mai mare, astfel încît să se poată găsi varianta optimă în condițiile respectării tuturor elementelor funcționale și constructive impuse.

c) Exprimarea matriceală a energiei cinetice și potențiale ale sistemului permite transpunerea directă în calculul automat cu posibilitatea de analiză mai rapidă a diverselor variante constructive.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Bălan, *Complemente de mecanică teoretică*, București Edit. didactică și pedagogică, 1975.
2. R. Belman, *Introducere în analiza matriceală* (trad. din limba engleză), București, Edit. tehnică, 1969.
3. R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell, S. Michaelson, *The matrix analysis of vibration*, Cambrige at the University Pres, 1965.
4. P. Bratu, *Cercetări privind dinamica cilindrilor compactori vibratori*, St. cerc. mec. apl., **35**, *3* (1976).
5. P. Bratu, *Cercetări experimentale asupra elementelor amortizoare din cauciuc*, Lucrările conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara 1978.
6. Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș, *Vibrațiile sistemelor mecanice*, București, Edit. Academiei R.S.R., 1975.
7. B. Demidovitch, I. Maron, *Éléments de calcul numérique*, Editorons Mir., 1973.
8. C. Harris, C. Crede, *Șocuri și vibrații*, vol. I—II (trad. din limba engleză), București, Edit. tehnică, 1967.
9. A. M. Julien, *Dynamique de la voiture automobile*, tome I, Paris, 1968.
10. L. D. Landau, E. M. Lifsit, *Mecanica* (trad. din limba rusă) București, Edit. tehnică, 1966.
11. L. Dragoș, *Principiile mecanicii analitice*, București, Edit. tehnică, 1976.
12. D. Mangeron, N. Irimiciuc, *Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie*, vol. I, București, Edit. tehnică 1978.
13. Ch. Massonnet, ș.a. *Calculul structurilor la calculatoare electronice* (trad. din limba franceză), București, Edit. tehnică, 1974.
14. S. N. Mohsin, *Bodenmodelle zur theoretischen Untersuchung an dynamischen Verdichtungsgeräten und numerische Auswertung der Bodenparameter*, Baumaschine und Bautechnik, **13**, *10* (1966).

15. Șt. Mihăilescu, Gh. Vlasiu, *Mașini de construcții și procedee de lucru*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1973.
16. Șt. Mihăilescu, V. Goran, P. Bratu, P. Zafiu, *Criterii de alegere a caracteristicilor optime pentru compactoarele vibratoare autopropulsate*, Revista Construcții, *3* (1978).
17. V. Nicolae, N. Truica, *Studiul vibrațiilor de torsiune ale unui sistem viscoelastic liniar cu mai multe grade de libertate cu aplicații la transmisia de forță a autovehiculelor*, Lucrările conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.
18. B. Persoz, *Introduction a l'étude de la rhéologie*, Dunod, Paris, 1960.
19. N. V. Poturaev, I. V. Dîrda, I. I. Krus, *Prihladnaia mehanika rezini* izdatelstvo „Naukova Dumka" Kiev, 1975.
20. M. Rădoi, E. Deciu, *Mecanica*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1977.
21. Gh. Silaș, *Mecanica. Vibrații mecanice*. Edit. didactică și pedagogică, 1968.
22. C. Stanciu, *Vibrații și dinamica mașinilor*, Edit. Institutului de Construcții, București, 1974.
23. C. Stanciu, Cr. Diaconu, P. Bratu, G. Axinte, I. Drăghici, *Metodă experimentală pentru determinarea momentelor de inerție principale a subansamblelor de mașini*. Lucrările sesiunii de comunicări tehnico-științifice, IUG „Progresul" — ICPUC, Brăila, 1977.
24. C. Stanciu, Cr. Diaconu, Fl. Bădulescu, P. Bratu, *Determinarea pulsațiilor proprii a sistemului de acționare rezemat elastic pe șasiul mașinilor de construcții*, Lucrările sesiunii de comunicări tehnico-științifice, IUG „Progresul" — ICPUC, Brăila, 1977.
25. N. Truică, *Un model matematic al sistemului oscilant format de suspensia și transmisia unui automobil aflat în regim de funcționare tranzitoriu*, St. cerc. mec. apl., **36**, *5* (1977).
26. Al. Vaicum, *Studiul reologic al corpurilor solide*, București, Edit. Academiei R.S.R., 1978.
27. R. Voinea, D. Voiculescu, V. Ceaușu, *Mecanica*, București Edit. didactică și pedagogică, 1975.
28. * * * *Prospecte ale firmelor de specialitate*: *DYNAPAC, AVELING — BARFORD LTD, MASCHINEBAU (MBU), VIBROLL, BOMAG, RICHIER.*

APRECIERI ASUPRA STABILIRII CARACTERULUI CURGERII ÎNTR-UN LAGĂR HIDROSTATIC RADIAL

de M. A. DUMBRAVĂ
Institutul politehnic București

Se calculează un lagăr hidrostatic radial pe baza metodei bilanțului de debite și se stabilesc numerele Reynolds medii în film. Se interpretează variația numerelor Reynolds în lagăr cu ajutorul multigrafurilor. Se determină ponderea globală a zonelor cu caracter nelaminar.

Se consideră un lagăr hidrostatic radial cu șase degajări, alimentat la presiune constantă, cu restrictori de tip capilar (fig. 1). Se calculează presiunile din degajări pe baza metodei ecuațiilor de bilanț de debite ([5], [6]) modificată pentru a putea efectua acest calcul în orice regim de curgere. Calculul parametrilor pe viscozitate s-a făcut conform celor expuse în lucrarea [3].

După obținerea valorilor presiunilor din degajări se calculează numerele Reynolds medii ([2], [3]) atît pe pragurile circumferențiale, cît și pe cele axiale, corespunzător notației făcute în figura 1 pentru prima degajare. Se obțin valori diferite pentru cele 12 puncte de calcul, valori care nu corespund aceluiași regim de curgere (laminar, tranzitoriu sau turbulent dezvoltat).

Se poate formula următoarea problemă: în calculul valorilor numerelor Reynolds medii s-a considerat caracterul local al curgerii, utilizîndu-se valorile corespunzătoare ale parametrilor de viscozitate G_x, G_z. Acest fapt asigură corectitudinea calculului, în limita generală a metodei folosite, dar nu precizează care este caracterul curgerii în lagăr, privind global această curgere. Cu alte cuvinte se poate vorbi de puncte din lagăr în care există un anumit caracter al curgerii la un moment dat, dar nu se poate vorbi despre caracterul curgerii ca o rezultantă pe întregul lagăr.

Există posibilitatea de a calcula, pe baza unor criterii convenționale, care este caracterul predominant al curgerii din lagăr și care porțiune din lagăr (zone de degajări) sînt determinante.

Această formulare a problemei sugerează ca să se facă apel la metodele matematice care permit evaluarea caracterului dominant (de lider) al unui element sau mai multe elemente dintr-o mulțime finită.

Această problemă este dezvoltată în cartea lui C. Berge [1] pe baza noțiunii de multigraf și prin metode matriceale.

Se știe că într-un multigraf pot exista mai multe muchii distincte care să lege două vîrfuri. Dacă numărul acestor muchii nu depășește un număr natural p, se spune că avem un p-graf. [1], [7].

Pentru a calcula nivelul predominant de curgere din lagăr sînt necesare cîteva criterii, pentru trasarea multigrafului respectiv. Se propun două serii de criterii: o primă serie menită să pună în evidență nucleul principal pentru caracterizarea curgerii și o a doua serie care să indice grupul de degajări dominant, considerînd regimurile de curgere nelaminare superioare celui laminar. Deoarece forma sagitală a unui asemenea multigraf este complicată, se va prefera discuția pe baza matricei asociate multigrafului.

Pentru alcătuirea matricei (multigrafului) de stabilire a caracterului curgerii, se fac ipotezele :

— fie x_i, x_j două vîrfuri ale multigrafului, care definesc două degajări i și j. Dacă curgerea în cele două degajări ($\mathcal{R}e_{mi}$, $\mathcal{R}_{mi}$) are același caracter, atunci : i și j degajări vecine ponderea este 3, i și j la două poziții depărtare, pondere 2, i și j la mai mult de două poziții depărtare, ponderea este 1. Această relație astfel definită este reflexivă. În cazul cînd o degajare prezintă caracter dublu (pe pragul circumferențial diferit de cel de pe pragul axial) ponderea va fi 1, indiferent de numărul de poziții care despart cele două degajări.

— dacă x_i și x_j din clase consecutive (de exemplu laminar și tranzitoriu) atunci există arcul (x_i, x_j) cu ponderea 2, dacă x_i este superior (în cazul arătat regim tranzitoriu).

— dacă x_i este în regim turbulent și x_j în laminar, arcul (x_i, x_j) va avea ponderea 1.

În cazul multigrafului ponderea echivalează cu numărul de muchii (x_i, x_j), în cazul matricei va fi egală cu valoarea coeficientului a_{ij}. Se constată că multigraful propus este un 3-graf.

Pentru matricea (multigraful) de stabilire a dominantei se formulează ipoteze asemănătoare :

— dacă x_i turbulent dezvoltat și x_j laminar, ponderea se ia 4 ($\exists$ (x_i, x_j), respectiv $a_{ij} = 4$) ;

— dacă x_i turbulent dezvoltat și x_j tranzitoriu, ponderea se ia 3 ;

— dacă x_i tranzitoriu și x_j laminar, ponderea se ia 2 ;

— dacă au același caracter, există ambele arce (x_i, x_j) și (x_j, x_i), cu pondere 1.

Ca regulă generală, în cazul unei degajări cu caracter dublu al curgerii se ia în considerație ponderea minimă care rezultă din ipotezele de mai sus. Se obține un 4-graf.

Pentru stabilirea liderului se poate aplica metoda puterii iterate de ordin k a elementului x_i, așa cum este arătat în [1]. Se preferă metoda matriceală propusă de Wei și indicată în [1]. Se asociază matricea A p-grafului respectiv (cu bucle în fiecare vîrf) și se formează determinantul $\det (A - \lambda I) = f(\lambda)$. Metoda lui Wei se bazează pe teorema Perron-Frobenius [1] și spune : fie ecuația caracteristică $f(\lambda) = 0$ și λ_1 rădăcina care are

valoarea absolută maximă. Presupunînd ca λ_1 este rădăcină simplă se calculează vectorul $\vec{t}_1 = (t_1^1, t_1^2, \ldots, t_1^n)$ pentru care

$$A \cdot \vec{t}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{t}_1, \quad \sum_{i=1}^{n} t_1^i = 1.$$

Atunci $\vec{t}_1^i$ reprezintă ponderea elementului x_i, iar vectorul propriu $\vec{t}_1$ este vectorul „putere", deoarece componentele sale au această semnificație.

Fie lagărul din figura 1, pentru care s-au adoptat o serie de valori ale parametrilor geometrici și funcționali, pentru a face o aplicație numerică. Din calcul au rezultat următoarele valori ale numerelor Reynolds.

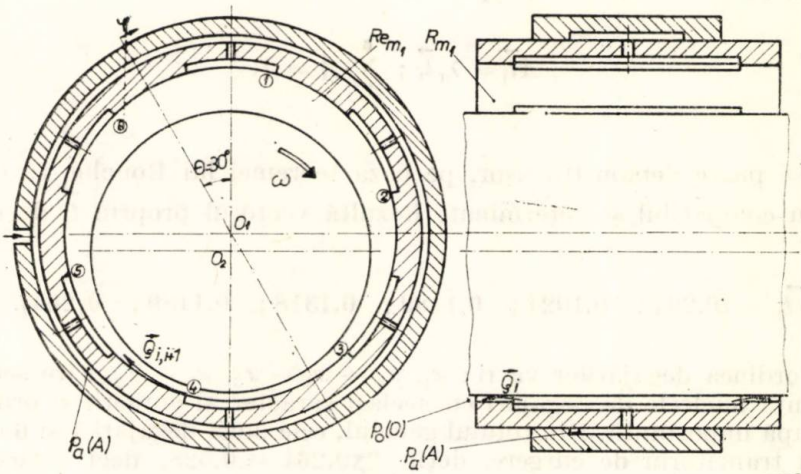


Fig. 1. — Lagăr hidrostatic radial cu șase degajări, cu alimentare la presiune constantă.

Nr. Reynolds \ Degajarea	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{R}e_m$	907,1	730,5	547,4	547,9	733,8	909,9
$\mathcal{R}_m$	956,2	847,5	625,2	514	623,6	843,9

S-a considerat că prima tranziție laminar-tranzitoriu are loc la o valoare a numărului Reynolds critic $\mathcal{R}e_c^* = 750$. În aceste condiții matricea „caracter" va fi :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică are forma

$$f(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^5 - 20\lambda^4 + 59\lambda^3 + 165\lambda^2 + 31\lambda - 62,$$

care, rezolvată prin metoda înjumătățirii intervalului, conduce la soluțiile :

$\lambda_1 = 7{,}187807$; $\lambda_2 = 3{,}676209$; $\lambda_3 = 0{,}496915$; $\lambda_4 = -1$;

$\lambda_5 = -2$; $\lambda_6 = -2{,}360931$.

Rădăcina în valoare absolută maximă este λ_1. Se rezolvă sistemul de 7 ecuații cu 6 necunoscute în t_1^i următor :

$$A\vec{t}_1 = \lambda_1 \vec{t}_1 \; ; \; \sum_{i=1}^{6} t_1^i = 1,$$

care se poate demonstra ușor, pe baza teoremei lui Rouché, că este un sistem compatibil și determinat. Rezultă vectorul propriu $\vec{t}_1$ de componente :

$$\vec{t}_1 = (0{,}264 \; ; \quad 0{,}1024 \; ; \quad 0{,}1189 \; ; \quad 0{,}1318 \; ; \quad 0{,}1189 \; ; \quad 0{,}264).$$

Deci ordinea degajărilor va fi : x_1, $x_6 - x_4 - x_3$, $x_5 - x_2$, care scoate în evidență nucleele de degajări cu același caracter al curgerii și ordonarea lor după importanță. Din totalul general, cele două degajări 1 și 6 care au regim tranzitoriu de curgere, dețin 2x0,264 = 0,528, deci aproximativ 53% și prin urmare caracterul tranzitoriu este predominant.

Matricea de dominanță va fi :

$$A^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Aplicînd același procedeu se va obține vectorul propriu $\vec{t}_1^*$ de componente : $\vec{t}_1^* = (0{,}667 \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0 \; ; \; 0{,}333)$. Deci din nou grupul de degajări 1 și 6 sînt dominante, rezultatul ultim dînd întîietate degajării 1, adică zona cu grosime maximă de film.

Metoda propusă permite o apreciere cantitativă și o ierarhizare a degajărilor lagărului sub aspectul caracterului curgerii și a extensiei și compactității zonelor cu același caracter. Această analiză este utilă în studiul lagărelor hidrostatice la care apare un efect hidrodinamic important.

Primită la redacție la 23 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. C. BERGE, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei*, București, Edit. tehnică, 1969.
2. V. N. CONSTANTINESCU, C. H. T. PAN, C. F. HSING, *A procedure for the analysis of bearings operating in the transition range between laminar and fully developed turbulent flow*, Rev. roum. sci. techn.-Méc. appl., **16**, *5* (1971).
3. M. DUMBRAVĂ, *Non linear effects due to pressure gradients in turbulent externally-pressurized films*, „Super laminar flows in bearings", Proc. of Inst. Mech. Eng., 1976.
4. C. IACOB și colectiv, *Matematici clasice și moderne*, București, Edit. tehnică, 1978.
5. GH. MANEA, *Organe de mașini*, vol. I, Buc., Edit. tehnică, 1970.
6. GH. MANEA, D. HÎNCU, V. SIMIONESCU, M. DUMBRAVĂ, D. ATANASIU, *Aspecte teoretice caracteristice și metoda de calcul pentru lagărele hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide*, St. cerc. Mec. Apl., **32**, *1* (1973).
7. I. TOMESCU, *Combinatorică și teoria grafurilor*, Universitatea București, 1978 (litografiat).

CARACTERISTICILE LAGĂRELOR RADIALE HIDROSTATICE ALIMENTATE PRIN DROSELUL CAPILAR CIRCUMFERENȚIAL MULTIPLU

de ȘTEFAN STANCIU
Institutul politehnic București

În urma analizei critice a droselelor care echipează în prezent lagărele radiale hidrostatice se studiază o variantă superioară de restrictor capilar multicanal; pe baza calculelor efectuate se precizează domeniul de utilizare a droselului propus, relevînd influența geometriei acestuia asupra caracteristicilor lagărului.

NOTAȚII

D — diametrul lagărului;

D_R — diametrul droselului;

$F_{i,i}$, $F_{i,i-1}$, $F_{i,i+1}$ — coeficienți în ecuația presiunilor;

$K = D/L$ — constanta lagărului;

$K_b = b_d/b$ — lungimea relativă a degajării hidrostatice;

K_c — constanta geometrică a droselului;

$K_D = D_R/D$ — raportul diametrelor;

$K_l = l_d/L$ — lățimea relativă a degajării hidrostatice;

K_R — constanta droselului;

L — lungimea lagărului;

N — numărul buzunarelor (degajărilor) hidrostatice;

P — sarcina exterioară aplicată fusului;

Q — debitul axial de scăpări;

R — capacitatea portantă;

$\bar{R}$ — portanța relativă;

S — parametru adimensional;

T_i — termenul liber în ecuația presiunilor;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 3, 1979, P. 471–484

b — lungimea zonei de influență a unui buzunar;

b_d — lungimea buzunarului pe circumferință;

b_p — lungimea pragului circumferențial;

c_0 — jocul radial în drosel;

e — excentricitatea lagărului (fus, cuzinet);

h_0 — jocul radial în lagăr (la $e = 0$);

l — semilungimea droselului;

l_d — lățimea buzunarului;

l_p — lățimea pragului;

p — presiunea;

p_a — presiunea de alimentare;

p_i — presiunea în buzunarul (i);

$\bar{p}_i$ — presiunea relativă în buzunarul (i)

q_a — debitul de alimentare;

q_i — debit axial corespunzător buzunarului (i);

$q_{i;i+1}$, $q_{i,i-1}$ — debite circumferențiale în lagăr;

$q_{(i;i+1)c}$, $q_{(i,i-1)c}$ — debite circumferențiale în drosel;

r — raza curentă;

w — viteza axială în drosel;

α — unghi curent în lagăr;

β — unghiul liniei centrelor;

γ_0 — unghi de influență;

$\varepsilon = e/h_0$ — excentricitatea relativă;

Φ — unghiul sarcinii exterioare aplicate lagărului;

$\psi = h_0/D$ — joc relativ;

η — vîscozitatea dinamică a uleiului;

θ — unghiul rezultantei presiunilor;

ω — viteza unghiulară a fusului;

$\frac{d\bar{R}}{d\varepsilon}$ — rigiditatea statică relativă.

Este cunoscut faptul că droselele utilizate în prezent la alimentarea buzunarelor lagărelor hidrostatice prezintă numeroase inconveniente, printre care amintim :

— posibilitatea obturării lor (cu probabilitate mare în special la drosele de tip tub capilar sau diafragme cu orificiu calibrat) cu urmări grave asupra funcționării lagărului, lipsa uleiului conducînd de regulă la gripaj ;

— dificultatea realizării droselelor cu exact aceeași rezistență hidraulică (interschimbabile) pentru fiecare circuit de alimentare al lagărului ; inegalitatea rezistențelor hidraulice conduce la o așezare excentrică a fusului față de cuzinet chiar la încărcare nulă ;

— droselele care echipează uzual lagărele hidrostatice nu pot realiza alimentarea cu ulei decît a cîte unui singur buzunar ;

— de regulă droselele pentru lagărele hidrostatice sînt scumpe, cu excepția tuburilor capilare drepte, fără reglaj la montaj și a droselelor din materiale metalice sinterizate, studiate în [3].

Analizînd critic droselele existente se studiază un nou dispozitiv de alimentare și reglare a debitului în buzunarele lagărelor hidrostatice și anume *droselul capilar circumferențial multiplu* (*DCCM*). Una din variantele constructive posibile este prezentată în figura 1.

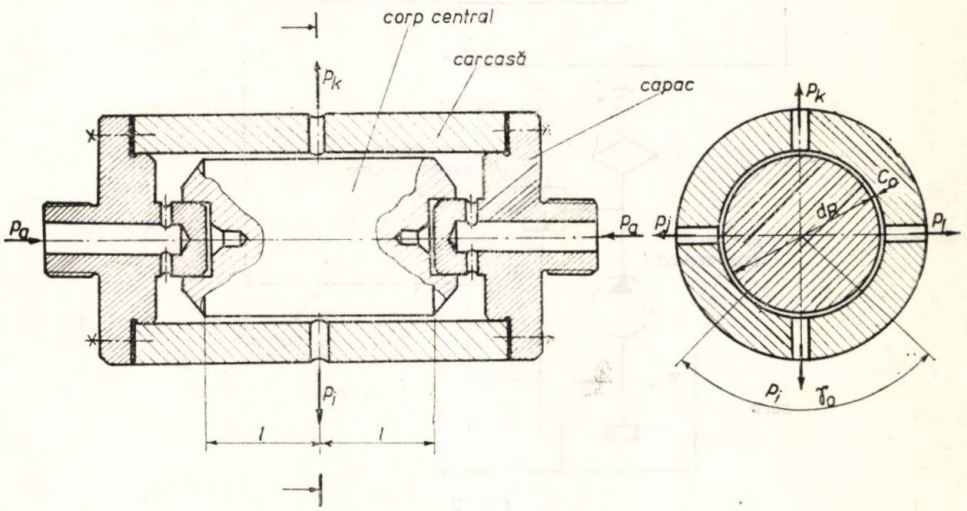


Fig. 1

Alimentarea cu ulei a acestui drosel se face pe la cele două capete, racordate la circuitul pompei, figura 2. Presiunea de alimentare p_a este menținută constantă cu ajutorul supapei de suprapresiune.

Uleiul sub presiune, intrat pe la capete, parcurge droselul în direcție axială, laminîndu-se pe lungimea ($2l$) și iese spre buzunarele lagărului prin orificiile radiale centrale ; numărul acestor orificii este dat de numărul buzunarelor lagărului. Parcurgînd interstițiul droselului, de grosime constantă pe circumferință — c_0, uleiul își reduce presiunea de la valoarea

p_a pînă la presiunea p_i, de intrare în buzunarul i. Unghiul la centru delimitînd interstiţiul circumferenţial pe care-l parcurge uleiul trimis spre buzunarul i este

$$\gamma_0 = \frac{2\pi}{N},$$

unde N este numărul buzunarelor lagărului hidrostatic.

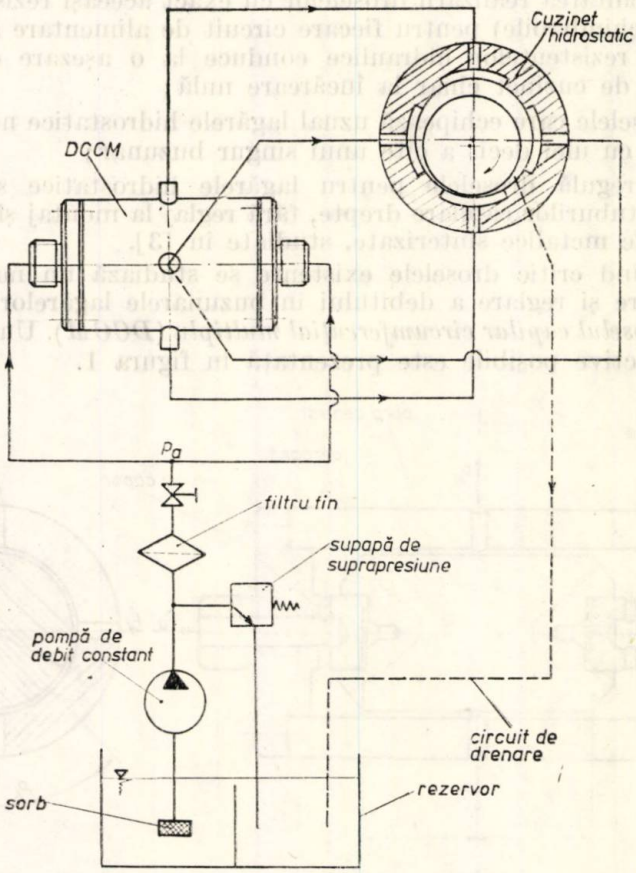


Fig. 2

Se remarcă faptul că rezistenţa hidraulică a droselului multiplu este aceeaşi pentru fiecare circuit de alimentare spre lagăr. Această identitate este dată de faptul că fiecărui orificiu radial îi corespunde acelaşi unghi la centru a interstiţiului circumferenţial aferent, aceeaşi lungime de laminare ($2l$) şi aceeaşi grosime interstiţiului c_0, în direcţie axială şi circumferenţială.

Decurg de aici avantajele droselului pe care-l propunem :

a) alimentarea simultană cu ulei a tuturor buzunarelor lagărului hidrostatic, indiferent de numărul acestora ;

b) siguranţă deplină în funcţionare, pericolul obturării nefiind posibil, datorită deschiderii mari (360°) a interstiţiului de laminare ;

c) asigurerea (prin construcţie) a identităţii rezistenţelor hidraulice pe fiecare circuit de alimentare al lagărului;

d) simplitate constructivă, decurgînd de aici preţul redus de fabricaţie;

e) simplificarea construcţiei lagărului, droselul fiind plasat în afara acestuia.

CALCULUL LAGĂRULUI RADIAL HIDROSTATIC ECHIPAT CU DROSEL CAPILAR CIRCUMFERENŢIAL MULTIPLU

Pentru studiul curgerii în droselul capilar circumferenţial multiplu se face constatarea că este vorba de doi cilindri concentrici, fără mişcare relativă, ecuaţia care guvernează curgerea în acest caz fiind [2]:

$$\frac{1}{\eta}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}, \tag{1}$$

în care w este viteza pe direcţia axială şi η este vîscozitatea dinamică a fluidului; $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ reprezintă gradientul presiunii în direcţia axială.

Punînd condiţia

$$w = 0, \text{ la } R_1 \text{ şi } R_2, \tag{2}$$

unde $R_1 = d_R/2$ şi $R_2 = R_1 + c_0$, rezultă legea de mişcare în drosel:

$$w = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left[R_1^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\cdot\ln\frac{r}{R_1}\right]. \tag{3}$$

Debitul prin spaţiul inelar are expresia

$$Q = \frac{\pi\cdot\Delta p}{8\eta l}(R_2^2 - R_1^2)\left[R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\right], \tag{4}$$

în care Δp este căderea de presiune în direcţie axială pe lungimea $(2l)$.

Pentru buzunarul i debitul de alimentare va fi a N-a parte din debitul total axial Q:

$$q_a' = \frac{2\pi}{N}\cdot\frac{p_a - p_i}{\eta}\cdot K_c, \tag{5}$$

unde

$$K_c = \frac{1}{8l}(R_2^2 - R_1^2)\left[R_2^2 + R_1^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)}\right] \tag{6}$$

este constanta geometrică a droselului.

Ţinînd cont de existenţa presiunilor diferite în dreptul orificiilor radiale va exista şi o curgere circumferenţială, aşa cum sugerează figura 3.

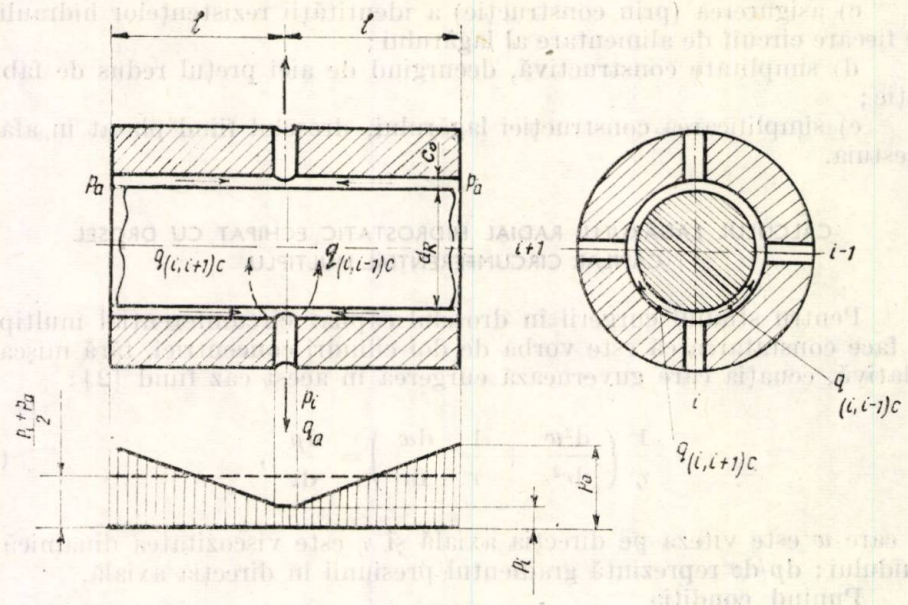


Fig. 3

Avînd în vedere și variația presiunii în direcția axială se va considera că debitele circumferențiale în vecinătatea orificiului radial, aferent buzunarului hidrostatic i, $q_{(i,i+1)c}$ și $q_{(i,i-1)c}$ sînt date de diferențele mediilor presiunilor în direcția axială :

$$q_{(i,i+1)c} = \frac{c_0^3 N}{24 \pi \eta K_R} (p_i - p_{i+1}), \tag{7}$$

$$q_{(i,i-1)c} = \frac{c_0^3 N}{24 \pi \eta K_R} (p_i - p_{i-1}), \tag{8}$$

în care a fost făcută notația :

$$K_R = \frac{d_R}{2l}. \tag{9}$$

În final se poate exprima debitul de alimentare al buzunarului i, care părăsește droselul prin unul din orificiile radiale :

$$q_a = q'_a - q_{(i,i+1)c} - q_{(i,i-1)c}. \tag{10}$$

După înlocuiri rezultă

$$q_a = \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{K_c}{\eta} p_a - \left[\frac{2\pi}{N} \cdot \frac{K_c}{\eta} \cdot p_a + \frac{c_0^3 N}{12 \pi \eta K_R} \cdot p_a \right] \bar{p}_i +$$

$$+ \frac{c_0^3 N}{24 \pi \eta K_R} p_a \bar{p}_{i+1} + \frac{c_0^3 N}{24 \pi \eta K_R} p_a \bar{p}_{i-1}. \tag{11}$$

Se va lucra în continuare cu presiuni adimensionale, definite prin relația :

$$\bar{p}_i = p_i/p_a. \tag{12}$$

Intrat în buzunarul lagărului, debitul de alimentare parcurge în parte interstițiul axial, în dublu sens, spre capetele lagărului și datorită gradienților de presiune în direcția circumferențială va exista o curgere și spre (sau dinspre) buzunarele $i + 1$ și $i - 1$.

Debitul axial în lagăr este dat de relația

$$q_i = \frac{K}{1 - K_l} \cdot \frac{h_0^3}{12\eta} p_a \bar{p}_i I_i, \tag{13}$$

unde

$$I_i = 2 \int_{\frac{2\pi}{N}(i-1)}^{\frac{2\pi}{N} i} [1 + \varepsilon \cdot \cos(\alpha - \beta)]^3 d\alpha. \tag{14}$$

Notațiile utilizate sînt prezentate anterior, iar elementele geometrice ale lagărului apar în figura 4.

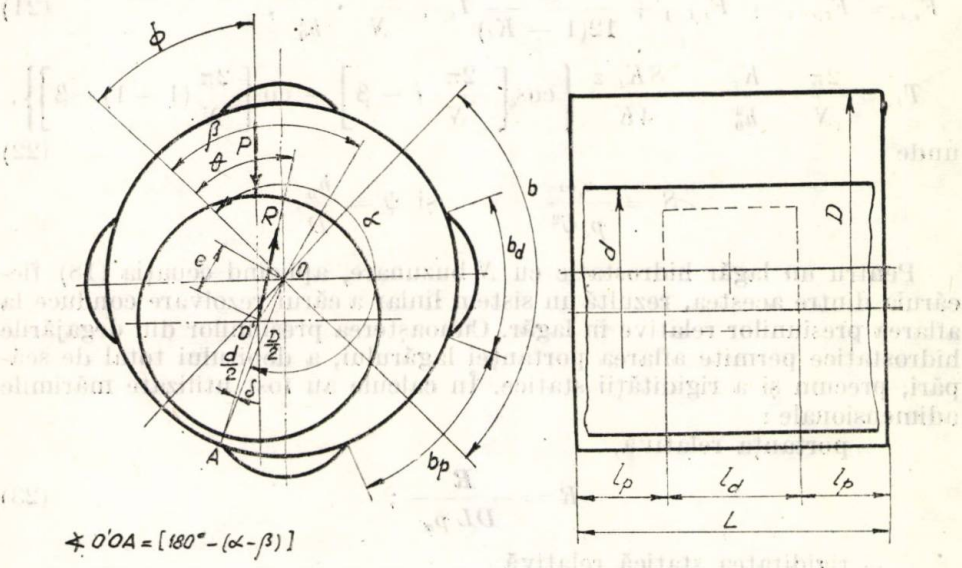


Fig. 4

Debitele circumferențiale, spre buzunarele învecinate $i + 1$ și $i - 1$, cu considerarea rotației fusului sînt :

$$q_{i,i+1} = \frac{NK_l}{12\pi K(1-K_b)} \frac{h_0^3}{\eta} (\bar{p}_i - \bar{p}_{i+1}) p_a \left\{1 + \varepsilon \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}^3 +$$

$$+ \frac{d\omega}{4} l_a h_0 \left\{1 + \varepsilon \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}, \tag{15}$$

$$q_{i,i-1} = \frac{NK_l}{12\pi K(1-K_b)} \frac{h_0^3}{\eta} (\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1}) p_a \left\{1 + \varepsilon \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \beta\right]\right\}^3 -$$

$$- \frac{d\omega}{4} l_d h_0 \left\{1 + \varepsilon \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \beta\right]\right\}. \quad (16)$$

Ecuaţia de bilanţ de debite pentru buzunarul i are forma generală :

$$q_a - q_i - q_{i,i+1} - q_{i,i-1} = 0. \quad (17)$$

După unele transformări, ecuaţia (17) ia forma :

$$F_{i,i} \cdot \bar{p}_i - F_{i,i+1} \cdot \bar{p}_{i+1} - F_{i,i-1} \cdot \bar{p}_{i-1} = T_i, \quad (18)$$

în care

$$F_{i,i+1} = \frac{NK_l}{12\pi K(1-K_b)} \left\{1 + \varepsilon \cdot \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}^3 + \frac{c_0^3 N}{24\pi K_R h_0^3}, \quad (19)$$

$$F_{i,i-1} = \frac{NK_l}{12\pi K(1-K_b)} \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \beta\right]\right\}^3 + \frac{c_0^3 N}{24\pi K_R h_0^3}, \quad (20)$$

$$F_{i,i} = F_{i,i+1} + F_{i,i-1} + \frac{K}{12(1-K_l)} I_i + \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{K_c}{h_0^3}, \quad (21)$$

$$T_i = \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{K_c}{h_0^3} - \frac{SK_l \varepsilon}{4K} \left\{\cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{N}(1-1) - \beta\right]\right\},$$

unde (22)

$$S = \frac{\eta\omega}{p_a \psi^2} \qquad \text{şi} \quad \psi = \frac{h_0}{D}.$$

Pentru un lagăr hidrostatic cu N buzunare, aplicînd ecuaţia (18) fiecăruia dintre acestea, rezultă un sistem liniar a cărui rezolvare conduce la aflarea presiunilor relative în lagăr. Cunoaşterea presiunilor din degajările hidrostatice permite aflarea portanţei lagărului, a debitului total de scăpări, precum şi a rigidităţii statice. În calcule au fost utilizate mărimile adimensionale :

— portanţa relativă,

$$\bar{R} = \frac{R}{DL\, p_a}; \quad (23)$$

— rigiditatea statică relativă,

$$\frac{d\bar{R}}{d\varepsilon} = \frac{\Delta R}{\Delta e} \cdot \frac{h_0}{DLp_a}. \quad (24)$$

ANALIZA PERFORMANŢELOR LAGĂRULUI RADIAL HIDROSTATIC ECHIPAT CU DCCM

În vederea punerii în evidenţă a influenţei geometriei droselului capilar circumferenţial multiplu asupra caracteristicilor lagărelor radiale

hidrostatice au fost trasate, pe baza rezultatelor obținute pe calculator, familiile de curbe reprezentate în figurile 5—13.

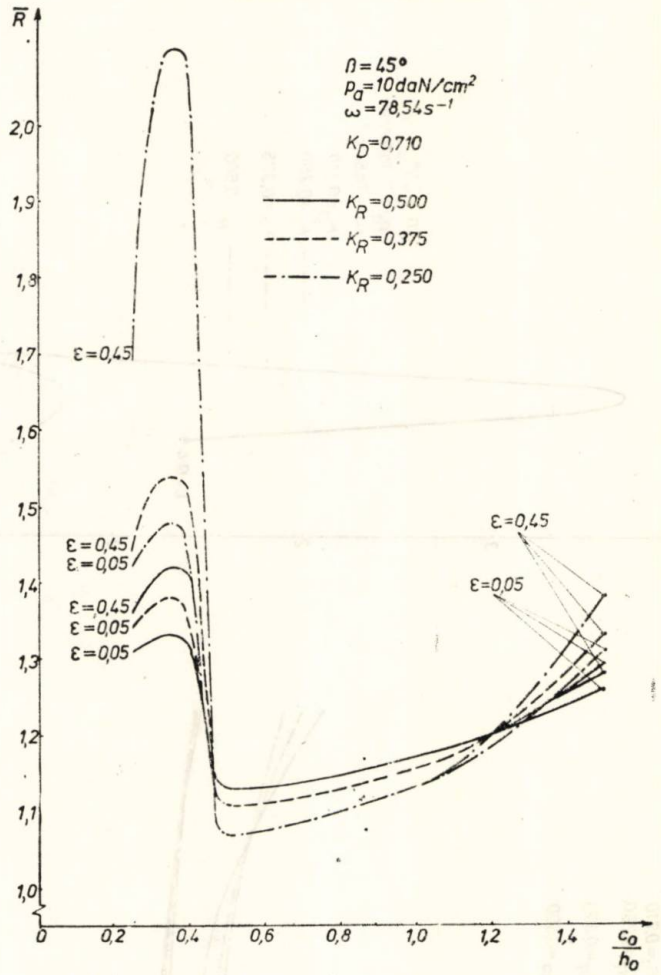


Fig. 5

Pentru constanta droselului K_R au fost luate în calcul valorile: 0,250; 0,375 și 0,500, considerînd că mărimea lui K_R peste valoarea 0,500 conduce la o creștere excesivă a gabaritului radial al droselului; de asemenea, micșorarea lui K_R sub 0,250 este nesatisfăcătoare în ceea ce privește gabaritul axial al acestui dispozitiv.

Au fost studiate cazurile în care raportul diametrelor $K_D = D_R/D$ are valorile: 0,710 și 1,000; sînt posibile, după cum rezultă din analiza care urmează și rapoarte K_D mai mici decît cele studiate, cu efect favorabil asupra portanței și rigidității statice. Pentru raportul jocurilor c_0/h_0 au fost considerate valori cuprinse între 0,2 și 1,5.

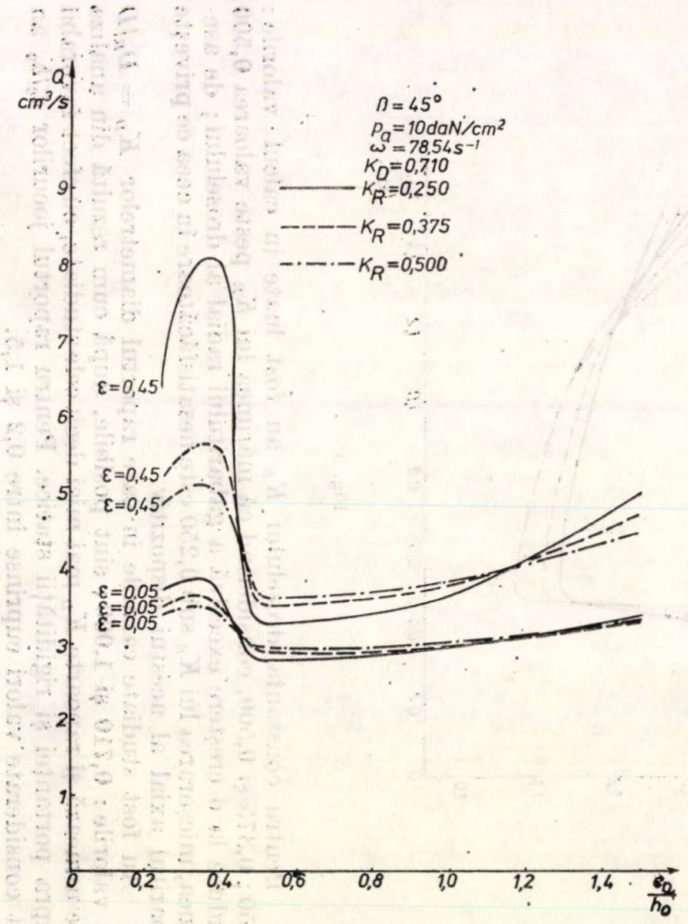

Q
cm³/s
n = 45°
p_a = 10daN/cm²
ω = 78,54s⁻¹
K_D = 0,710
K_R = 0,250
K_R = 0,375
K_R = 0,500
ε = 0,45
ε = 0,45
ε = 0,45
ε = 0,05
ε = 0,05
ε = 0,05
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
e_0/h_0

Fig. 6

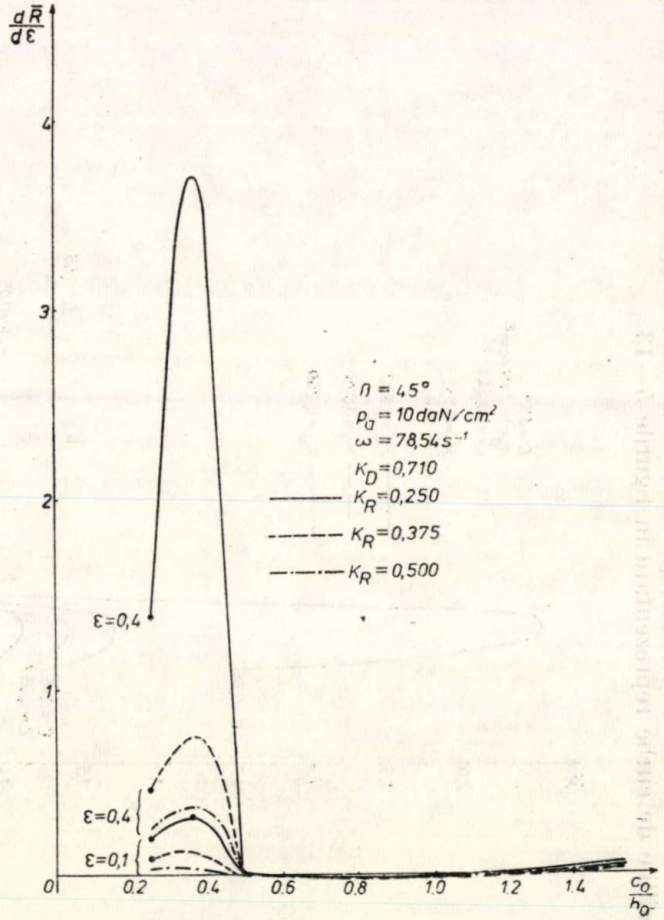

dR̄/dε
n = 45°
p_a = 10daN/cm²
ω = 78,54s⁻¹
K_D = 0,710
K_R = 0,250
K_R = 0,375
K_R = 0,500
ε = 0,4
ε = 0,4
ε = 0,1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
c_0/h_0

Fig. 7

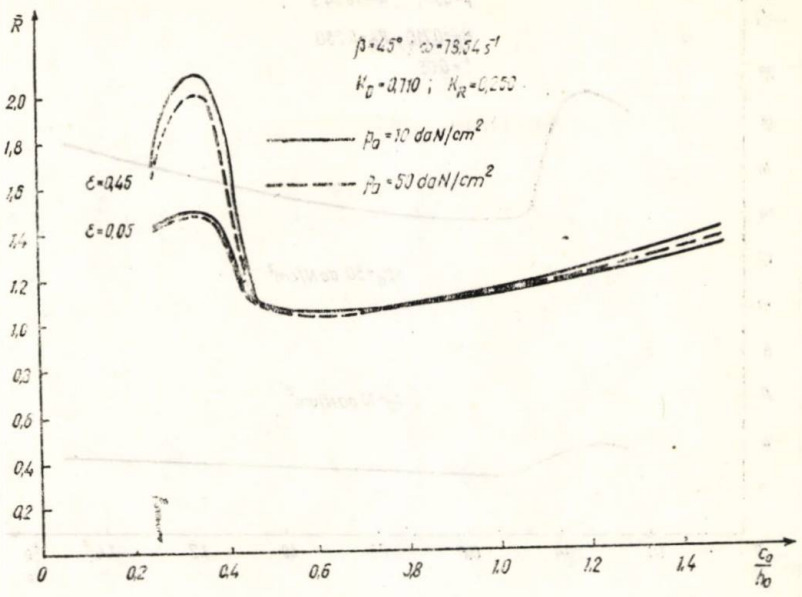

$\bar{R}$
$\beta=45°$; $\omega=78{,}54\ s^{-1}$
$K_D=0{,}710$; $K_R=0{,}250$
$p_0=10\ daN/cm^2$
$p_0=50\ daN/cm^2$
$\varepsilon=0{,}45$
$\varepsilon=0{,}05$
2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
$\frac{c_0}{h_0}$

Fig. 8

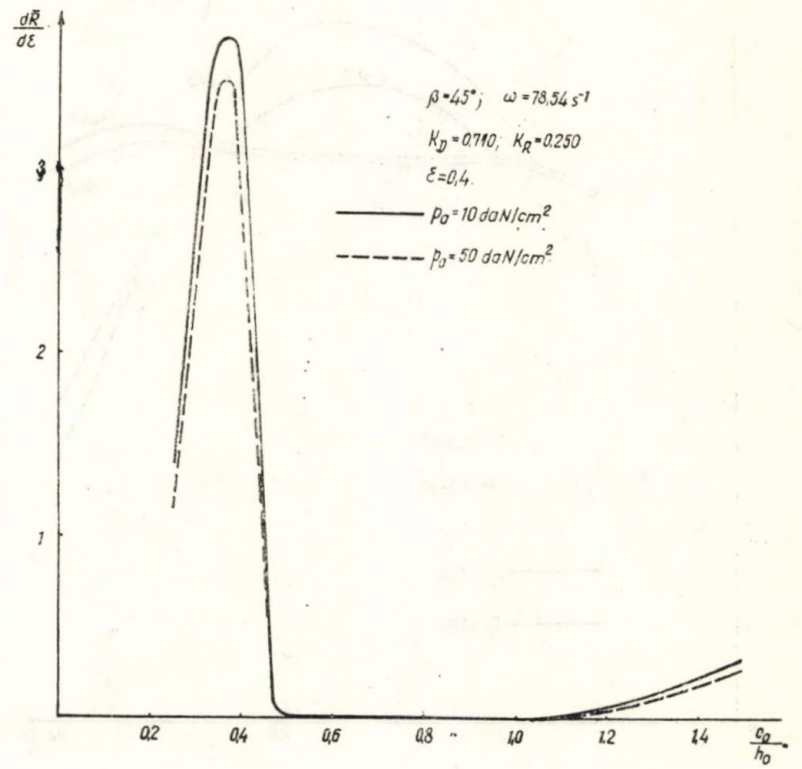

$\frac{d\bar{R}}{d\varepsilon}$
$\beta=45°$; $\omega=78{,}54\ s^{-1}$
$K_D=0{,}710$; $K_R=0{,}250$
$\varepsilon=0{,}4$
$p_0=10\ daN/cm^2$
$p_0=50\ daN/cm^2$
3
2
1
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
$\frac{c_0}{h_0}$

Fig. 9

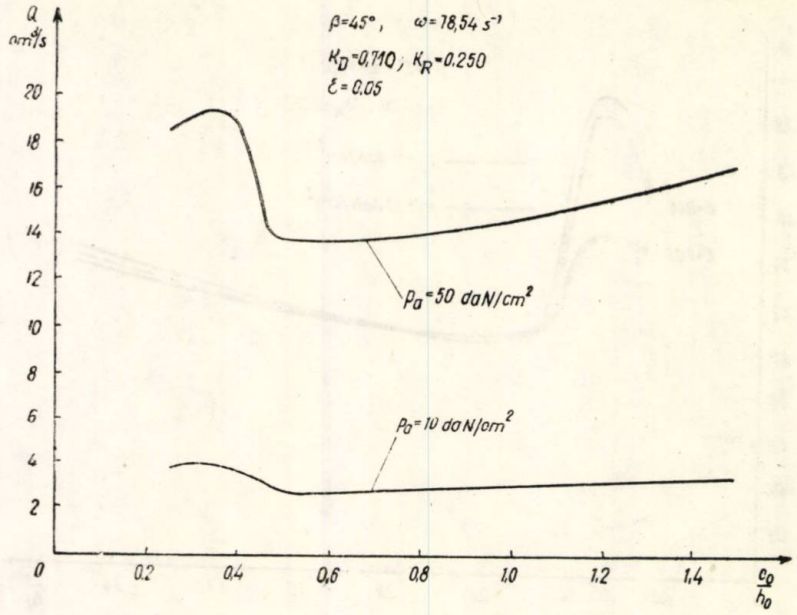

Q
cm³/s
β=45°, ω=78,54 s⁻¹
K_D=0,710; K_R=0.250
ε=0.05
p_a=50 daN/cm²
p_a=10 daN/cm²
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0.2
0.4
0,6
0.8
1.0
1.2
1,4
e_0/h_0

Fig. 10

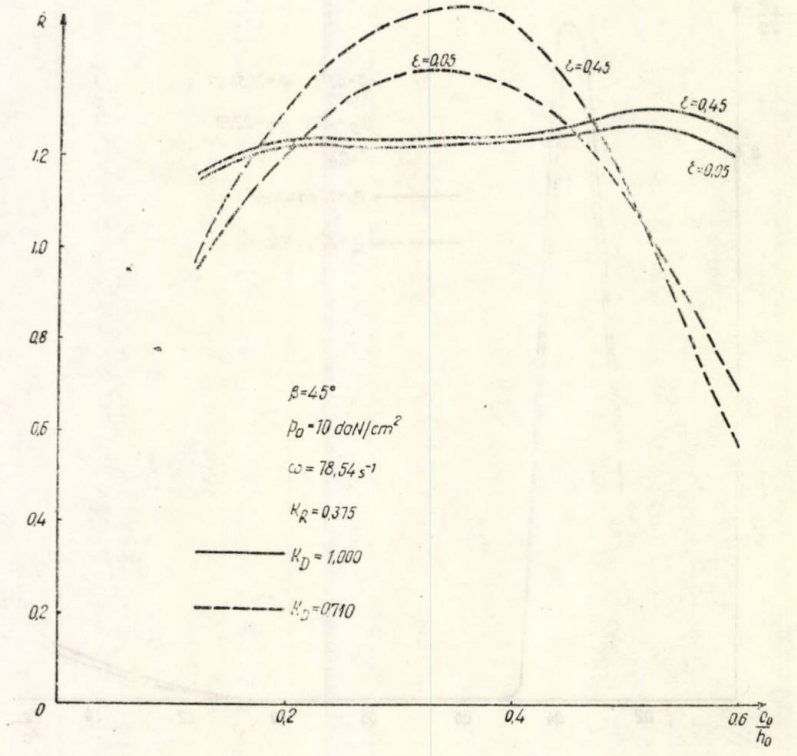

R
ε=0,05
ε=0,45
ε=0,45
ε=0,05
1.2
1.0
0.8
0,6
0.4
0.2
0
β=45°
p_a=10 daN/cm²
ω=78,54 s⁻¹
K_R=0,375
K_D=1,000
K_D=0710
0,2
0.4
0.6
e_0/h_0

Fig. 11

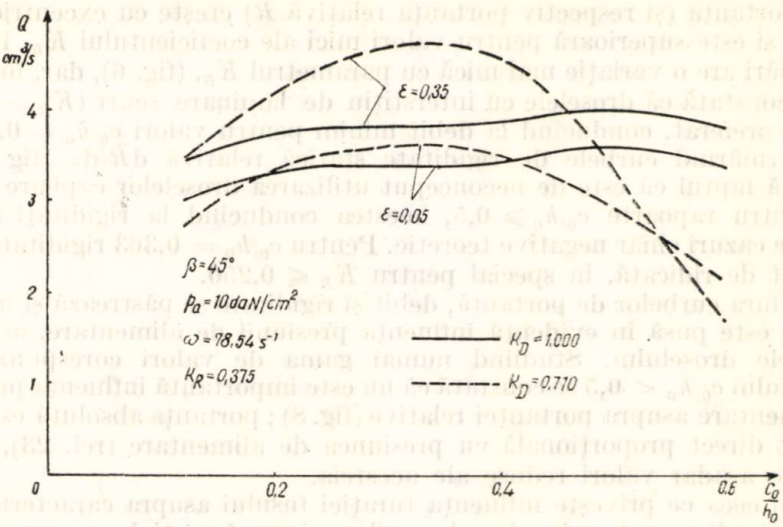

Q
cm³/s
4
3
2
1
0
0,2
0,4
0,6
ε=0,35
ε=0,05
β=45°
p_a=10daN/cm²
ω=78,54 s⁻¹
K_R=0,375
K_D=1,000
K_D=0,710
c_0/h_0

Fig. 12

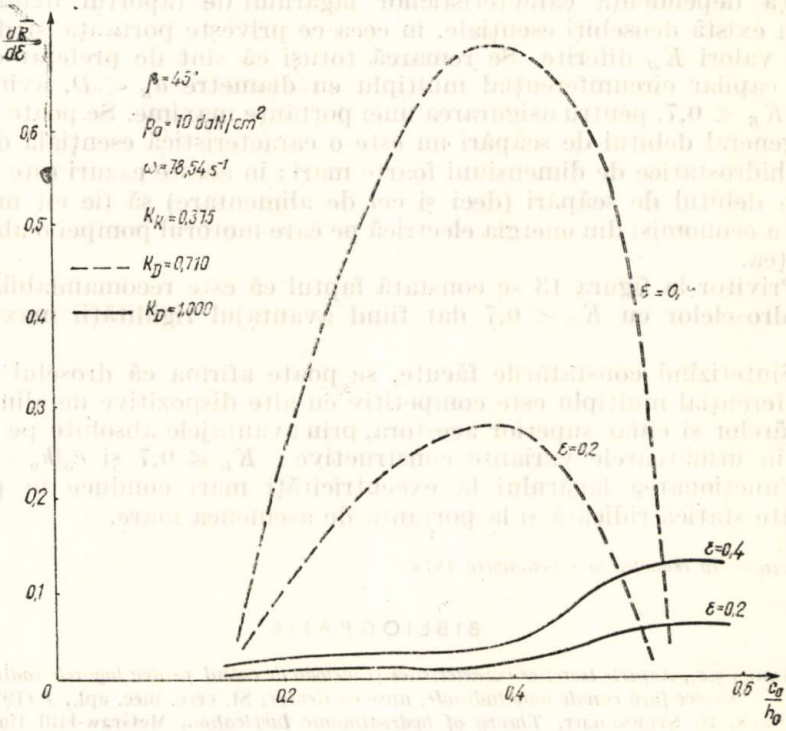

dR/dε
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,2
0,4
0,6
β=45°
p_a=10 daN/cm²
ω=78,54 s⁻¹
K_R=0,375
K_D=0,710
K_D=1,000
ε=0,2
ε=0,4
ε=0,2
c_0/h_0

Fig. 13

Portanţa (şi respectiv portanţa relativă $\bar{R}$) creşte cu excentricitatea (fig. 5) şi este superioară pentru valori mici ale coeficientului K_R. Debitul de scăpări are o variaţie mai mică cu parametrul K_R, (fig. 6), dar, în acest caz se constată că droselele cu interstiţiu de laminare scurt ($K_R = 0{,}500$) sînt de preferat, conducînd la debit minim pentru valori $c_0/h_0 = 0{,}5$.

Urmărind curbele de rigiditate statică relativă $d\bar{R}/d\varepsilon$ (fig. 7) se constată faptul că este de neconceput utilizarea droselelor capilare multiple pentru rapoarte $c_0/h_0 \geqslant 0{,}5$, acestea conducînd la rigidităţi infime, în unele cazuri chiar negative teoretic. Pentru $c_0/h_0 = 0{,}363$ rigiditatea este deosebit de ridicată, în special pentru $K_R \leqslant 0{,}250$.

Alura curbelor de portanţă, debit şi rigiditate se păstrează şi în cazul în care este pusă în evidenţă influenţa presiunii de alimentare, aflată în amontele droselului. Studiind numai gama de valori corespunzătoare domeniului $c_0/h_0 < 0{,}5$ se constată că nu este importantă influenţa presiunii de alimentare asupra portanţei relative (fig. 8); portanţa absolută este însă evident direct proporţională cu presiunea de alimentare (rel. 23), preferîndu-se aşadar valori reduse ale acesteia.

În ceea ce priveşte influenţa turaţiei fusului asupra caracteristicilor lagărului alimentat prin drosel capilar circumferenţial, se constată o creştere a portanţei şi rigidităţii statice la creşterea turaţiei, pe baza efectului hidrodinamic din lagăr.

Referindu-ne tot la domeniul $c_0/h_0 < 0{,}5$, figurile 11—13 pun în evidenţă dependenţa caracteristicilor lagărului de raportul diametrelor K_D; nu există deosebiri esenţiale, în ceea ce priveşte portanţa şi debitul, pentru valori K_D diferite. Se remarcă totuşi că sînt de preferat drosele de tip capilar circumferenţial multiplu cu diametre $d_R < D$, avînd respectiv $K_R < 0{,}7$, pentru asigurarea unei portanţe maxime. Se poate afirma că în general debitul de scăpări nu este o caracteristică esenţială decît la lagăre hidrostatice de dimensiuni foarte mari; în aceste cazuri este important ca debitul de scăpări (deci şi cel de alimentare) să fie cît mai mic pentru a economisi din energia electrică pe care motorul pompei o absoarbe din reţea.

Privitor la figura 13 se constată faptul că este recomandabilă utilizarea droselelor cu $K_D < 0{,}7$ dat fiind avantajul rigidităţii maxime în lagăr.

Sintetizînd constatările făcute, se poate afirma că droselul capilar circumferenţial multiplu este competitiv cu alte dispozitive de alimentare ale lagărelor şi chiar superior acestora, prin avantajele absolute pe care le aduce în următoarele variante constructive: $K_D \leqslant 0{,}7$ şi $c_0/h_0 = 0{,}363$.

Funcţionarea lagărului la excentricităţi mari conduce în plus la rigiditate statică ridicată şi la portanţă de asemenea mare.

Primită la redacţie la 6 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Manea ş.a., *Aspecte teoretice caracteristice şi metodă de calcul pentru lagărele radiale hidrostatice fără canale longitudinale, unse cu lichide*, St. cerc. mec. apl., *1* (1973).
2. O. Pinkus, B. Sternlicht, *Theory of hydrodinamic lubrication*, McGraw-Hill Book Company, Inc. N.Y., 1961.
3. Şt. Stanciu, *Lagăre radiale hidrostatice echipate cu drosele din materiale sinterizate*, St. cerc. mec. apl. (1979).

I. SETEANU, V. COLIBAN, R. POPA

ANALIZA INFLUENȚEI PULSAȚIILOR CURGERII TURBULENTE ASUPRA ERODĂRII ALBIILOR

Se prezintă un procedeu de studiu hidraulic al erodării locale a albiilor, aplicat la curgerea în bieful aval al centralelor hidroelectrice cu turbine cu ax orizontal. Valabilitatea ipotezelor admise a fost testată pe un model fizic. Regimul turbulent de curgere este analizat în cadrul schemei lui Reichardt. Se indică un procedeu de estimare a vitezei critice de inițiere a erodării și se studiază procesul nestaționar de afuiere. Rezultatele obținute urmăresc reducerea lungimii de consolidare a radierului aval al centralelor hidroelectrice.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 357—369
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. MACOVEI

CURGEREA UNUI FLUID BINGHAMIAN LA DEPLASAREA AXIALĂ RELATIVĂ A DOI CILINDRI CIRCULARI COAXIALI

Sînt studiate distribuțiile de viteză și de tensiuni, precum și variațiile de presiune care apar la deplasarea relativă, longitudinală, a doi cilindri circulari coaxiali, plini cu un fluid de tipul Bingham Este analizată doar mișcarea laminară, staționară. Lucrarea conține nomograme ce permit stabilirea variațiilor de presiune în raport cu viteza de deplasare și profilul vitezelor de curgere.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 371—382
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA T. ORĂȘANU

ASUPRA UNEI MIȘCĂRI ÎN PREZENȚA INFILTRAȚIEI

În prezenta lucrare se studiază un caz de mișcare cu suprafață liberă în prezența infiltrației de intensitate $\varepsilon > 0$, printr-un masiv poros omogen de formă dreptunghiulară, fără suprafață umedă. Metoda de abordare a problemei la limită asociată mișcării în discuție este cea a teoriei analitice a ecuațiilor diferențiale.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 383—392
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. OROVEANU, B. SIRO

ASUPRA UNOR POSIBILITĂȚI DE OPTIMIZARE A TRANSPORTULUI SUCCESIV DE PRODUSE PETROLIERE

În această lucrare se definește și se determină parametrul concentrației optime de secționare a unui dop de amestec, ce apare la transportul succesiv de produse petroliere, în condițiile în care acest dop se repartizează în întregime în rezervoarele produselor standard. Valoarea acesteia depinde de o serie de parametri tehnico-economici, dintre care o pondere deosebită o au pierderile de produse ce apar la respirațiile mici și mari ale rezervoarelor de depozitare. Concentrația optimă de secționare depinde și de numărul ciclurilor, ea neputînd fi considerată constantă nici în domeniul uzual al numărului de cicluri ($k = 60 \div 100$). Spectrul de variație al concentrației optime în funcție de numărul de cicluri depinde într-o mare măsură de tipul produselor (stabilizate sau nestabilizate) ce alcătuiesc un ciclu și de ordinea acestora în cadrul ciclului. În această idee, în cazul unui produs cu pierderi mari (prin respirație mică și mare a rezervoarelor) urmat de unul cu pierderi mici, apare imposibilă secționarea optimă a zonei de amestec chiar în domeniul uzual al numărului de cicluri.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 393—417
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

OPTIMIZAREA PROBABILISTĂ CU VALORI DISCRETE A STRUCTURILOR METALICE ÎN DOMENIUL PLASTIC

Plecînd de la formularea generală a problemei de optimizare probabilistă, care intervine în dimensionarea structurilor metalice în domeniul plastic, se arată că tehnica actuală de alegere a secțiunilor profilelor nu e întotdeauna cea mai indicată. Metoda propusă, permițînd luarea în considerare a tuturor soluțiilor posibile, are avantajul de a furniza soluții mai economice decît cele preconizate în prezent.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 419—424
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CORNELIU BOB, VALENTIN BOTA, TUDOR CLIPII

CALCULUL DALELOR ORTOTROPE PRIN METODA FIȘIILOR FINITE

În lucrarea de față metoda fișiilor finite inițiată de Cheung și folosită de Loo și Cusens și Das este generalizată pentru calculul dalelor ortotrope oblice, frecvent întîlnite la suprastructura podurilor ; s-au stabilit algoritmii de calcul și s-au testat subrutinele necesare calculului dalelor ortotrope oblice.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 425—433
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

T. SIRETEANU, O. GÜNDISCH, S. PĂRĂIAN, V. HORNEA

INFLUENȚA REGLAJULUI CARACTERISTICII DE AMORTIZARE LA VITEZE MICI DE LUCRU ASUPRA CONFORTULUI ȘI ADERENȚEI ROATĂ-SOL

Lucrarea conține o analiză experimentală a influenței reglajului amortizoarelor hidraulice în zona vitezelor mici de lucru asupra confortului și aderenței roată-sol pentru autoturismul Dacia 1300. Este analizat, de asemenea, efectul forțelor de frecare uscată din amortizor asupra confortului.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 435—448
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

P. BRATU

DINAMICA MAȘINILOR COMPACTOARE VIBRATOARE AUTOPROPULSATE MIXTE

Mașinile vibratoare compactoare autopropulsate mixte, sau cum mai sînt denumite „compactoare vibratoare autopropulsate mixte (combinate)" au în componența lor, ca organe de lucru, un rulou vibrator plasat în față care realizează compactarea dinamică a stratului în adîncime și o pereche de roți cu pneuri pentru compactarea la suprafață, deci acestea realizează procesul de compactare prin efect combinat (mixt).
În lucrare se tratează dinamica mașinii la vibrații forțate, fiind schematizată printr-un model vîscoelastic liniar cu opt grade de libertate. Astfel, se prezintă sub forma analitică ecuațiile diferențiale de mișcare, care permit o imagine a intercorelării elementelor masice cu cele ale rigidității precum și evidențierea cuplării modurilor de mișcare. De asemenea, ecuațiile diferențiale de mișcare sînt prezentate și sub formă matriceală în vederea automatizării calculului pulsațiilor proprii și celorlalți parametri ai vibrațiilor, pentru diverse variante constructive de proiectare.

St. cerc. med. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 449—464
Redacția: Bucureșri, str. Const. Mille nr. 15

M. A. DUMBRAVĂ

APRECIERI ASUPRA STABILIRII CARACTERULUI CURGERII ÎNTR-UN LAGĂR HIDROSTATIC RADIAL

Se calculează un lagăr hidrostatic radial pe baza metodei bilanțului de debite și se stabilesc numerele Reynolds medii în film. Se interpretează variația numerelor Reynolds în lagăr cu ajutorul multigrafurilor. Se determină ponderea globală a zonelor cu caracter nelaminar.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 465—469
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ȘTEFAN STANCIU

CARACTERISTICILE LAGĂRELOR RADIALE HIDROSTATICE ALIMENTATE PRIN DROSELUL CAPILAR CIRCUMFERENȚIAL MULTIPLU

În urma analizei critice a droselelor care echipează în prezent lagărele radiale hidrostatice se studiază o variantă superioară de restrictor capilar multicanal; pe baza calculelor efectuate se precizează domeniul de utilizare a droselului propus, relevînd influența geometriei acestuia asupra caracteristicilor lagărului.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 3, 1979, p. 471—484
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38, nr. 4 iulie—august 1979

SUMAR

STUDII

pag.

VIRGILIU FLORIAN, VIRGILIU TALLE, SPERANŢA PRODAN, Calculul cablelor încărcate cu sarcini uniform repartizate în lungul lor şi cu forţe concentrate 487

DAN FRANGOPOL, Concepte probabiliste în optimizarea structurilor. I. 519

A. PAVEL, Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice. I. 537

C. A. VASILESCU, T. TURCOIU, S. SIDON, Analiza efectelor neuniformităţii injecţiei asupra încărcării arborelui cotit al motorului Diesel 557

MIHAIL ROCO, Evoluţia caracteristicilor de funcţionare ale instalaţiilor de hidrotransport a zgurii şi cenuşii în timpul exploatării. II. . . . 567

EMIL GEORGESCU, Utilizarea procedeelor seismice la determinarea caracteristicilor mecanice ale terenurilor de fundaţie şi la microzonarea seismică a amplasamentelor 595

MIRCEA IVAN, IOAN CRISTIAN, Creşterea temperaturii electrolitului în zona de lucru, un nou criteriu de stabilire a vitezei de avans la prelucrarea electrochimică 603

CALCULUL CABLELOR ÎNCĂRCATE CU SARCINI UNIFORM REPARTIZATE ÎN LUNGUL LOR ŞI CU FORŢE CONCENTRATE

de VIRGILIU FLORIAN, VIRGILIU TALLE, SPERANŢA PRODAN

Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

În această etapă se dezvoltă un algoritm de calcul al eforturilor şi al săgeţilor unui cablu, pentru diferite poziţii ale unei forţe concentrate, verticale, pe cablu. Se consideră forma reală de echilibru a acestuia (două curbe lănţişor, intersectate în punctul de aplicaţie al forţei concentrate).

Se aplică acest algoritm pe un exemplu şi se compară rezultatele cu cele ce se obţin prin metoda obişnuită de calcul (al parabolei echivalente).

În anexa lucrării, se dau programele de calcul la un minicalculator ştiinţific, cuprinzînd succesiunea „pas cu pas" a operaţiunilor de efectuat.

GENERALITĂŢI

Cablele de susţinere ale funicularelor, telefericelor sau telecabinelor sînt încărcate static (în stare de repaus) cu greutatea proprie şi a chiciurii, adică cu o sarcină uniform repartizată în lungul lor, şi cu greutatea proprie şi sarcina utilă a unuia sau a mai multor cărucioare telecabine etc., reprezentabile prin forţe concentrate verticale.

Este de remarcat că în stare dinamică, adică în timpul exploatării, chiar în ipoteza neglijării vibraţiilor produse de deplasarea cărucioarelor, de vînt, mişcări seismice etc., pe lîngă greutatea proprie a cablului, acesta este încărcat cu forţe concentrate egale cu eforturile din tijele de susţinere a cărucioarelor (fig. 1),

$$\vec{S}_i = \frac{G_i}{g}\,\bar{a}_i - \vec{G}_i - \vec{T}_i,$$

unde

$\bar{a}_i$ este acceleraţia căruciorului i,

$\vec{G}_i$ — greutatea acestuia,

$\vec{T}_i$ — efortul din cablul trăgător.

Acceleraţia $\bar{a}_i$ poate avea o componentă verticală apreciabilă, atît în sensul acceleraţiei gravitaţionale $\bar{g}$, în timpul coborîrii, cu intensitatea maximă imediat după trecerea peste un punct de susţinere a cablului, cît şi în sens contrar cu aceasta, în timpul urcării, avînd intensitatea maximă imediat înainte de trecerea peste un punct de susţinere a cablului.

Așadar, intensitatea forței $\bar{S}_i$ poate varia între limite foarte diferite (fig. 2).

În prezent, calculul cablelor de susținere se face în stare de repaus, fie încărcat cu greutatea proprie și a chiciurii, ca o sarcină uniform repartizată pe *orizontală*, fie cu greutatea proprie și cu forțe verticale concentrate, reprezentînd greutățile cărucioarelor și a sarcinilor utile respective.

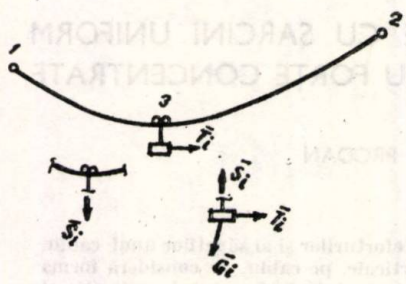


Fig. 1

Se știe că, în cazul încărcării cablului cu sarcini uniform repartizate pe *orizontală* și forțe concentrate, forma de echilibru a acestuia este alcătuită dintr-o succesiune de arce de parabolă, în număr egal cu numărul forțelor concentrate, plus unu.

În realitate, forma de echilibru a cablului (încărcat cu forțe concentrate și sarcini uniform repartizate în *lungul lui*) este alcătuită din arce de lănțișor, al căror număr este același ca mai sus.

Se apreciază deci că erorile, privind atît elementele geometrice ale formei de echilibru, cît și eforturile din cablu, sînt suficient de mici și acoperitoare, și că acestea — coroborate cu dificultățile de ordin matematic pe care le furnizează un calcul exact — justifică calculul aproximativ arătat mai sus.

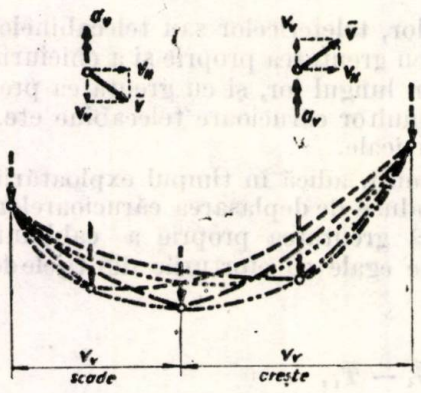


Fig. 2

În cele ce urmează, dorim să arătăm, printr-un calcul comparativ, că, pe de o parte, calculul exact nu comportă dificultăți prea mari față de calculul aproximativ și că, pe de altă parte, erorile care se fac trebuie considerate *astăzi* suficient de mari, în prezența mijloacelor moderne de calcul, pentru a îndreptăți necesitatea abordării unui calcul care să țină seama de forma reală de echilibru a cablului. Aceasta cu atît mai mult cu cît, prin directivele cuprinse în Documentele de partid și de stat, se cere realizarea de economii în toate investițiile, asigurîndu-se însă totodată exploatarea acestora în condiții de maximă securitate.

În scopul arătat mai sus, ne propunem ca, în această etapă, să dezvoltăm algoritmul de calcul al eforturilor maxime dintr-un cablu încărcat cu o sarcină p uniform repartizată în lungul lui, reprezentînd greutatea proprie a acestuia și cu o singură forță concentrată verticală F, corespunzătoare încărcării statice a cablului cu greutatea unui cărucior, inclusiv sarcina utilă a acestuia, neglijînd deformarea — sub sarcină sau din temperatură — a cablului.

1. ECUAŢIILE FORMEI DE ECHILIBRU A CABLULUI

Avînd în vedere lungimea mare a cablului în comparaţie cu dimensiunile sale transversale, schema de calcul a acestuia este firul perfect flexibil şi inextensibil.

Se ştie că forma de echilibru a unui fir, încărcat cu o sarcină uniform repartizată în lungul său, este lănţişorul.

Ecuaţia acestuia, în raport cu axele din (fig. 3), este

$$\eta = c \cdot \operatorname{ch} \frac{\xi}{c}, \tag{1.1}$$

unde c, adică ordonata la vîrf a lănţişorului, este

$$c = \frac{H}{p}, \tag{1.2}$$

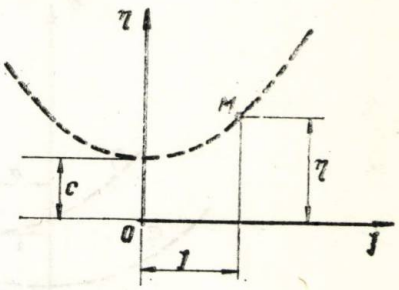


Fig. 3

H fiind efortul din secţiunea din vîrf a cablului, egal cu proiecţia pe orizontală a efortului din orice secţiune a cablului:

$$H = S \cdot \cos \varphi = \frac{S}{\operatorname{ch} \frac{\xi}{c}}, \tag{1.3}$$

iar p, intensitatea sarcinii uniform repartizate în lungul cablului.

Aşadar, dacă într-o secţiune *3*, între punctele de susţinere *1* şi *2* a cablului, se aplică şi o forţă concentrată verticală F, forma de echilibru a cablului va fi formată din două arce de lănţişor: Γ_1 între *1* şi *3* şi Γ_2 între *3* şi *2*. Ecuaţiile celor două curbe lănţişor, din care fac parte cele două arce (fig. 4), sînt:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \qquad & \eta = c \cdot \operatorname{ch} \frac{\xi}{c}, \\ \Gamma_2 \qquad & \eta' = c' \cdot \operatorname{ch} \frac{\xi'}{c'}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dacă se notează cu a şi b coordonatele originii sistemului de axe ξ, η faţă de sistemul ξ', η' vom avea:

$$\begin{aligned} \xi' &= \xi + a, \\ \eta' &= \eta + b \end{aligned} \tag{1.5}$$

şi, în consecinţă, ecuaţia lănţişorului Γ_2, din care face parte arcul $3-2$, faţă de sistemul de axe ξ, η, este :

$$\eta = -b + c' \cdot \operatorname{ch} \frac{\xi + a}{c'}. \tag{1.6}$$

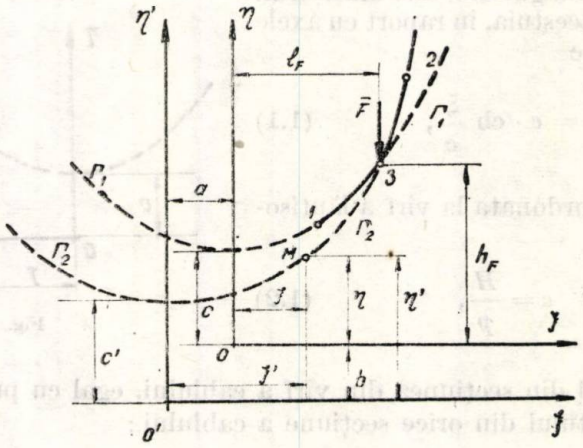


Fig. 4

2. SISTEMUL DE ECUAŢII NECESAR REZOLVĂRII PROBLEMEI

2.1. Intersecţiile celor două ramuri de curbă ale formei de echilibru al cablului

Vom observa mai întîi că

$$c = c'. \tag{2.1}$$

Într-adevăr, din echilibrul unui element de cablu din vecinătatea secţiunii *3*, rezultă (fig. 5) :

$$S_{31} \cdot \cos \varphi_1 - S_{32} \cdot \cos \varphi_2 = 0$$

sau

$$H_1 = H_2 = H \tag{2.2}$$

şi, întrucît p este acelaşi pe cele două ramuri de cablu, rezultă egalitatea (2.1) de mai sus.

Din proiecţia pe verticală a forţelor din secţiunea *3* rezultă

$$F + S_{31} \cdot \sin \varphi_1 - S_{32} \cdot \sin \varphi_2 = 0,$$

respectiv

$$F + p \cdot c \cdot \operatorname{sh} \frac{l_{F_1}}{c} - p.c. \operatorname{sh} \frac{l_{F_2}}{c} = 0. \tag{2.3}$$

unde l_{F_1} și l_{F_2} sînt abcisele secțiunii 3 față de sistemul de axe ξ, η și, respectiv ξ', η'.

Dacă se notează

$$l_F = l_{F_1},$$

rezultă

$$l_{F_2} = l_F + a$$

și astfel relația (2.3) devine

$$F + p \cdot c \cdot \left(\operatorname{sh} \frac{l_F}{c} - \operatorname{sh} \frac{l_F + a}{c} \right) = 0 \quad (2.4)$$

sau

$$\operatorname{sh} \frac{l_F + a}{c} - \operatorname{sh} \frac{l_F}{c} = \frac{F}{p \cdot c}, \quad (2.5)$$

respectiv

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2c} \cdot \operatorname{ch} \frac{2l_F + a}{2c} = \frac{F}{2p \cdot c}. \quad (2.5, \text{a})$$

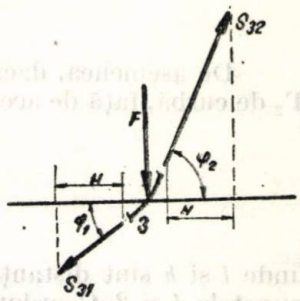


Fig. 5

Dacă se notează cu h_F ordonata secțiunii 3 față de sistemul de axe ξ, η, vom avea:

— din ramura de curbă Γ_1:

$$h_F = c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_F}{c}, \quad (2.6)$$

— iar din ramura de curbă Γ_2:

$$h_F = -b + c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_F + a}{c}. \quad (2.7)$$

Din cele două relații de mai sus, rezultă

$$\operatorname{ch} \frac{l_F + a}{c} - \operatorname{ch} \frac{l_F}{c} = \frac{b}{c} \quad (2.8)$$

sau

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2c} \cdot \operatorname{sh} \frac{2l_F + a}{2c} = \frac{b}{2c}. \quad (2.8a)$$

Se observă că din (2.5a) și (2.8a) se mai pot obține relațiile:

$$\operatorname{sh} \frac{a}{2c} = \frac{\sqrt{(F/p)^2 - b^2}}{2c} \quad (2.9)$$

și, respectiv,

$$\operatorname{th} \frac{2l_F + a}{2c} = \frac{b}{F/p}. \quad (2.10)$$

2.2. Condiţiile la capetele cablului

2.2.1. *Distanţele pe orizontală şi pe verticală dintre capetele cablului*

Dacă l_{11} şi h_{11} sînt coordonatele punctului *1* al ramurii Γ_1 de curbă, faţă de sistemul respectiv de axe ξ, η, avem

$$h_{11} = c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_{11}}{c}. \tag{2.11}$$

De asemenea, dacă l_{21} şi h_{21} sînt coordonatele punctului *2* al ramurii Γ_2 de curbă, faţă de acelaşi sistem de axe, vom avea

$$\begin{aligned} l_{21} &= l_{11} + l, \\ h_{21} &= h_{11} + h, \end{aligned} \tag{2.12}$$

unde l şi h sînt distanţele pe orizontală şi, respectiv, pe verticală dintre punctele *1* şi *2*. Coordonatele l_{21} şi h_{21} ale punctului *2* trebuie să satisfacă ecuaţia (1.6) a ramurii de curbă Γ_2 şi deci :

$$h_{21} = -b + c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_{21} + a}{c}$$

sau, folosind relaţiile (2.11) şi (2.12),

$$h = c \cdot \left(-\frac{b}{c} + \operatorname{ch} \frac{l_{11} + l + a}{c} - \operatorname{ch} \frac{l_{11}}{c} \right),$$

respectiv,

$$\operatorname{ch} \frac{l_{11} + l + a}{c} - \operatorname{ch} \frac{l_{11}}{c} = \frac{h + b}{c}, \tag{2.13}$$

şi, respectiv,

$$\operatorname{sh} \frac{l + a}{2c} \cdot \operatorname{sh} \frac{2l_{11} + l + a}{2c} = \frac{h + b}{2c}. \tag{2.13a}$$

2.2.2. *Lungimea cablului*

Dacă s_{11} şi s_{31} sînt lungimile arcelor de curbă, pe ramura Γ_1, între vîrf şi punctul *1*, respectiv punctul *3*, şi în mod similar s_{22} şi s_{32} sînt lungimile arcelor de curbă pe ramura Γ_2, între vîrful acesteia şi punctul *2*, respectiv punctul *3*, vom avea

$$s = s_{31} - s_{11} + s_{22} - s_{32}, \tag{2.14}$$

unde s este lungimea totală a cablului.

Întrucît

$$s_{11} = c \cdot \operatorname{sh} \frac{l_{11}}{c}, \qquad s_{32} = c \cdot \operatorname{sh} \frac{l_F}{c} \tag{2.15}$$

și, respectiv,

$$s_{22} = c \cdot \operatorname{sh} \frac{l_{11} + l + a}{c}, \qquad s_{32} = c \cdot \operatorname{sh} \frac{l_F + a}{c}, \tag{2.16}$$

rezultă

$$s = c \cdot \left(\operatorname{sh} \frac{l_F}{c} - \operatorname{sh} \frac{l_{11}}{c} + \operatorname{sh} \frac{l_{11} + l + a}{c} - \operatorname{sh} \frac{l_F + a}{c} \right). \tag{2.17}$$

Grupînd în mod convenabil termenii și folosind și relația (2.5), se obține

$$\operatorname{sh} \frac{l_{11} + l + a}{c} - \operatorname{sh} \frac{l_{11}}{c} = \frac{s + F/p}{c} \tag{2.18}$$

sau

$$\operatorname{sh} \frac{l + a}{2c} \cdot \operatorname{ch} \frac{2l_{11} + l + a}{2c} = \frac{s + F/p}{2c}. \tag{2.18a}$$

Se observă că din (2.13a) și (2.18a) se mai pot obține relațiile :

$$\operatorname{sh} \frac{l + a}{2c} = \frac{\sqrt{(F/p + s)^2 - (h + b)^2}}{2c}, \tag{2.19}$$

$$\operatorname{th} \frac{2l_{11} + l + a}{2c} = \frac{h + b}{F/p + s}. \tag{2.20}$$

Întrucît nu toate relațiile obținute mai sus sînt independente, se menționează că, în calcule, se pot folosi sistemele de ecuații formate din :

— relațiile (2.5), (2.8), (2.13), (2.18) ; din :

— relațiile (2.5,a) (2.8a), (2.13a) (2.18,a) ; din :

— relațiile (2.9), (2.10), (2.19) și (2.20), fie dintr-o combinație de patru relații din cele de mai sus, formînd un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute : c, a, b și l_{11}, în funcție de poziția l_F a forței concentrate F.

3. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAȚII OBȚINUTE

Întrucît toate relațiile obținute sînt transcendente, rezolvarea algebrică a sistemului de ecuații ales, și — în primul rînd — determinarea parametrului c, în funcție de poziția forței concentrate pe cablu,

$$c = f(x_F),$$

unde x_F este abscisa secțiunii *3*, în care se aplică forța concentrată F, într-un reper oarecare, nu este posibilă.

În aceste condiții se va urmări, în primul rînd, determinarea numerică — prin încercări repetate — a parametrului c, pentru anumite poziții caracteristice ale forței F, urmînd ca, eventual, pentru alte poziții, calculele respective să se efectueze prin interpolare.

În acest scop, vom conveni a nota cu *1* punctul de susținere al cablului, de cotă minimă și, implicit, cu *2* punctul de cotă maximă (punctul 2 fiind la dreapta punctului 1).

După determinarea parametrului c, se calculează coordonatele a și b ale originii sistemului de axe ξ, η față de sistemul ξ', η' și apoi distanța l_{11}. În continuare, se calculează ordonatele punctelor :

1 și *3*, în sistemul ξ, η și

3 și *2*, în sistemul ξ', η'.

Cu ajutorul acestora se calculează apoi eforturile :

$$S_{11} = p \cdot h_{11}, \qquad S_{31} = p \cdot h_{31},$$

$$S_{32} = p \cdot h_{32}, \qquad S_{22} = p \cdot h_{22},$$

unde S_{11} și S_{31} sînt eforturile în secțiunile *1* și *3* din ramura Γ_1, iar S_{32} și S_{22}, în *3* și *2*, din ramura Γ_2 a cablului.

Pentru ca să se poată efectua cu ușurință calculul eforturilor în anumite secțiuni ale cablului, precum și al unor elemente geometrice ale formei de echilibru a acestuia, pentru fiecare din pozițiile caracteristice ale forței concentrate, s-au întocmit programele de calcul la un minicalculator T.I.—S.R. 50, notate cu PROCAB I ÷ V, trecute în anexă, urmînd ca — pentru alt tip de calculator — să se întocmească programe similare ad-hoc. Se menționează că la calculatorul arătat mai sus, calculele se efectuează în ordinea algebrică firească.

3.1. Forța F se aplică în imediata vecinătate a punctului 1

În această situație, punctul *3* fiind în imediata vecinătate a punctului *1*, ramura Γ_2 a formei de echilibru a cablului se confundă cu forma de echilibru a acestuia încărcat numai cu sarcina distribuită p, ramura Γ_1 fiind extrem de mică, practic inexistentă (fig. 6).

Notînd cu c_0 valoarea comună a parametrului c a celor două ramuri de curbă, pentru poziţia forţei F din figura 7, vom avea :

$$h_1 = c_0 \cdot \operatorname{ch} \frac{l_1}{c_0}, \qquad h_2 = c_0 \cdot \operatorname{ch} \frac{l_1 + l}{c_0}, \tag{3.1}$$

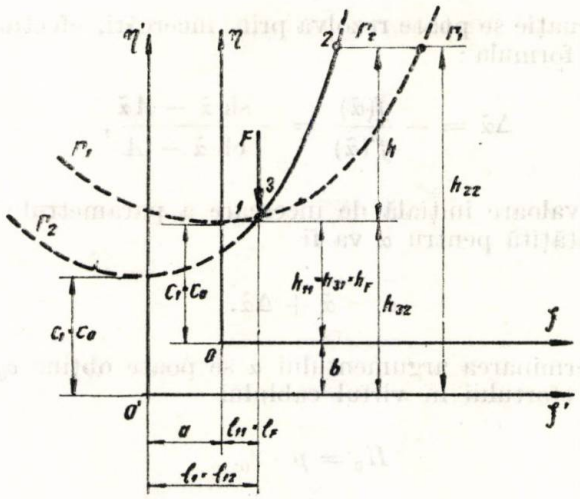


Fig. 6

de unde

$$h = h_2 - h_1 = c_0 \cdot \left(\operatorname{ch} \frac{l_1 + l}{c_0} - \operatorname{ch} \frac{l_1}{c_0} \right) = 2c_0 \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{2c_0} \cdot \operatorname{sh} \frac{2l_1 + l}{2c_0}. \tag{3.2}$$

De asemenea,

$$s_1 = c_0 \cdot \operatorname{sh} \frac{l_1}{c_0}, \qquad s_2 = c_0 \cdot \operatorname{sh} \frac{l_1 + l}{c_0}, \tag{3.3}$$

de unde

$$s = s_2 - s_1 = c_0 \left(\operatorname{sh} \frac{l_1 + l}{c_0} - \operatorname{sh} \frac{l_1}{c_0} \right) = 2c_0 \cdot \operatorname{sh} \frac{l}{2c_0} \cdot \operatorname{ch} \frac{2l_1 + l}{2c_0}. \tag{3.4}$$

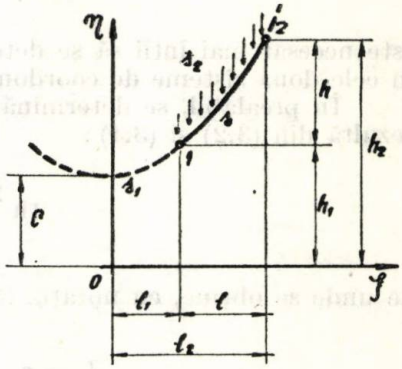


Fig. 7

Din (3.2) şi (3.4) se obţine ecuaţia transcendentă :

$$\operatorname{sh} \frac{l}{2c_0} = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{l} \cdot \frac{l}{2c_0}, \tag{3.5}$$

care, dacă se notează cu

$$\alpha = \frac{l}{2c_0}; \qquad A = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{l}, \tag{3.6}$$

devine

$$\operatorname{sh} \alpha = A \cdot \alpha. \tag{3.5'}$$

Această ecuaţie se poate rezolva prin încercări, efectuîndu-se corecţii succesive cu formula:

$$\Delta\tilde{\alpha} = -\frac{f(\tilde{\alpha})}{f'(\tilde{\alpha})} = -\frac{\operatorname{sh} \tilde{\alpha} - A\tilde{\alpha}}{\operatorname{ch} \tilde{\alpha} - A}, \tag{3.7}$$

unde $\tilde{\alpha}$ este o valoare iniţială de încercare a parametrului α, şi deci o valoare îmbunătăţită pentru α va fi

$$\alpha = \tilde{\alpha} + \Delta\tilde{\alpha}. \tag{3.8}$$

După determinarea argumentului α se poate obţine c_0 şi, în consecinţă, valoarea efortului în vîrful cablului

$$H_0 = p \cdot c_0. \tag{3.9}$$

Pentru calculul eforturilor în celelalte secţiuni caracteristice ale cablului, întrucît valoarea acestora se determină cu relaţia

$$S = \frac{H}{\cos \varphi} = H \cdot \operatorname{ch} \frac{\xi}{c} = p \cdot \eta, \tag{3.10}$$

este necesar mai întîi să se determine cotele η ale secţiunilor *1*, *2* şi *3*, în cele două sisteme de coordonate ξ, η şi ξ', η'.

În prealabil, se determină abscisa l_1 a punctului *1* (fig. 7). Aceasta rezultă din (3.2) şi (3.4):

$$\operatorname{th} \frac{2l_1 + l}{2c_0} = \frac{h}{s}, \tag{3.11}$$

de unde se obţine, cu notaţia (3.6),

$$l_1 = c_0 \cdot \left(\operatorname{arc\,th} \frac{h}{s} - \alpha \right). \tag{3.12}$$

Întrucît, în cazul analizat (vezi fig. 6),

$$l_{11} = l_F, \tag{3.13}$$

şi

$$l_1 = a + l_{11} = a + l_F, \tag{3.14}$$

din (2.5) rezultă

$$\operatorname{sh}\frac{l_F}{c_0} = \operatorname{sh}\frac{l_1}{c_0} - \frac{F}{H_0}, \tag{3.15}$$

relaţie din care se poate obţine l_F şi apoi, din (2.10):

$$b = \frac{F}{p} \cdot \operatorname{th}\frac{l_1 + l_F}{2c_0}. \tag{3.16}$$

Aşadar, vom avea:

— pe ramura Γ_1:

$$\eta_{11} = \eta_{31} = h_{11} = c_0 \cdot \operatorname{ch}\frac{l_{11}}{c_0} = c_0 \cdot \operatorname{ch}\frac{l_F}{c_0}, \tag{3.17}$$

— pe ramura Γ_2:

$$\begin{aligned} \eta_{32} &= h_{11} + b = b + c_0 \cdot \operatorname{ch}\frac{l_F}{c_0}, \\ \eta_{22} &= h + h_{11} + b = b + h + c_0 \cdot \operatorname{ch}\frac{l_F}{c}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

şi, în consecinţă, eforturile din secţiunile caracteristice ale cablului sînt:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{31} = H_0 \cdot \operatorname{ch}\frac{l_F}{c_0}, \\ S_{32} &= S_{11} + p \cdot b, \\ S_{22} &= S_{11} + p \cdot (b + h), \end{aligned} \tag{3.19}$$

unde S_{11} este, aşa cum s-a arătat mai sus, efortul în cablu în secţiunea din imediata vecinătate, la dreapta, a punctului *1*:

S_{31}, idem, în imediata vecinătate, la stînga, a punctului *3*; S_{32} idem, la dreapta punctului *3*; iar S_{22} idem, în imediata vecinătate, la stînga, a punctului *2*.

Aşadar, în vecinătatea punctului *1*, care se confundă practic cu *3*, efortul va trebui luat ca valoare egal cu cea mai mare valoare între S_{11} şi S_{32}, iar în vecinătatea punctului *2*, valoarea efortului respectiv fiind S_{22}.

Programul de calcul al mărimilor necesare, alcătuit pe baza relaţiilor de mai sus, este dat în anexă, sub denumirea de „PROCAB I".

3.2. Forţa F se aplică în imediata vecinătate a punctului 2

Ca şi în cazul precedent, forma de echilibru a cablului se compune dintr-o ramură, care se confundă cu forma de echilibru a cablului încărcat numai cu sarcina uniform distribuită p, care însă de data aceasta este ramura Γ_1, ramura Γ_2 reducîndu-se practic la zero (fig. 8).

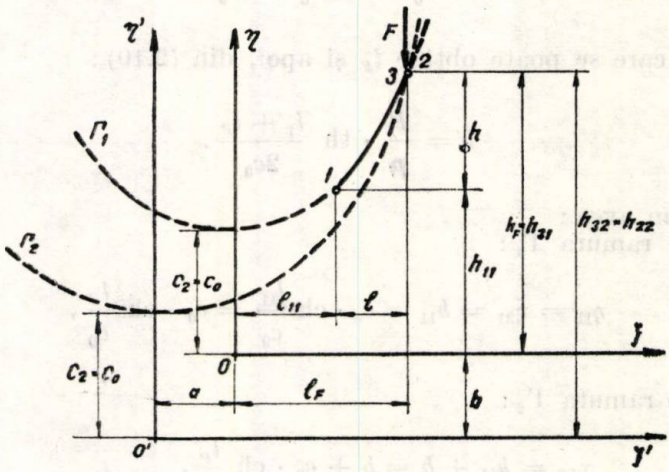


Fig. 8

Aşadar, valoarea parametrului c este şi în acest caz egală cu c_0, iar tensiunea în vîrf cu H_0, valori determinate în cazul precedent. De asemenea, în acest caz valoarea mărimii

$$l_{11} = l_1 \tag{3.20}$$

este cea determinată anterior, cu relaţia (3.12), iar

$$l_F = l_1 + l. \tag{3.21}$$

Cu ajutorul ecuaţiei (2.18), scrisă sub forma

$$\operatorname{sh} \frac{l_F + a}{c_0} = \operatorname{sh} \frac{l_1}{c_0} + \frac{s + F/p}{c_0}, \tag{3.22}$$

se determină

$$a = c_0 \cdot \operatorname{arg\,sh} \left(\operatorname{sh} \frac{l_1}{c_0} + \frac{F/p + s}{c_0} \right) - l_F. \tag{3.22, a}$$

Odată determinată această mărime, cu ajutorul relaţiei (2.10), se determină

$$b = \frac{F}{p} \cdot \operatorname{th} \frac{2l_F + a}{2c_0}. \tag{3.23}$$

În continuare, se calculează :

— pe ramura Γ_1 :

$$\eta_{11} = h_{11} = c_0 \cdot \operatorname{ch} \frac{l_{11}}{c_0} = c_0 \cdot \operatorname{ch} \frac{l_1}{c_0}, \tag{3.24}$$

$$\eta_{31} = h_{31} = h_{11} + h,$$

— iar pe ramura Γ_2 :

$$\eta_{32} = \eta_{22} = h_{31} + b. \tag{3.25}$$

Ca verificare, va trebui să rezulte egalităţile :

$$\eta_{32}^{(1)} = \eta_{11}^{(2)},$$

$$\eta_{22}^{(1)} = \eta_{31}^{(2)}.$$

Aşadar, eforturile în cablu, în secţiunile caracteristice, sînt :

$$S_{11} = H_0 \cdot \operatorname{ch} \frac{l_1}{c_0},$$

$$S_{31} = S_{11} + p \cdot h, \tag{3.26}$$

$$S_{32} = S_{22} = S_{11} + p \cdot (b + h).$$

Semnificaţiile acestora sînt cele date în cazul anterior (de exemplu S_{31} este efortul în secţiunea *3*, pe ramura Γ_1, adică imediat în stînga punctului *3*, unde se aplică forţa concentrată).

Programul de calcul al mărimilor necesare, alcătuit pe baza relaţiilor de mai sus, este dat în anexă sub denumirea de „PROCAB II".

3.3. Forţa F se aplică pe cablu la cota minimă posibilă

Cînd forţa concentrată ocupă diferite poziţii pe cablu, punctul de aplicaţie al acesteia descrie o traiectorie, care este locul geometric al punctului de intersecţie a celor două ramuri Γ_1 şi Γ_2 ale formelor de echilibru ale cablului, pentru diferitele poziţii ale forţei concentrate (vezi fig. 2). Cînd punctul de aplicaţie al forţei este la cota minimă posibilă, adică în vîrful traiectoriei sale, cele două ramuri de curbă Γ_1 şi Γ_2 vor fi simetrice faţă de suportul forţei (fig. 9), şi deci

$$b = 0. \tag{3.27}$$

Din relaţia (2.10), ca şi din figură, rezultă

$$l_F = -\frac{a}{2}, \tag{3.28}$$

iar din (2.9), în baza relaţiei (3.27), se obţine

$$\operatorname{sh}\frac{a}{2c}=\frac{F}{2p\cdot c}. \tag{3.29}$$

De asemenea, din relaţia (2.19) vom avea

$$\operatorname{sh}\frac{l+a}{2c}=\frac{\sqrt{(F/p+s)^2-h^2}}{2c}. \tag{3.30}$$

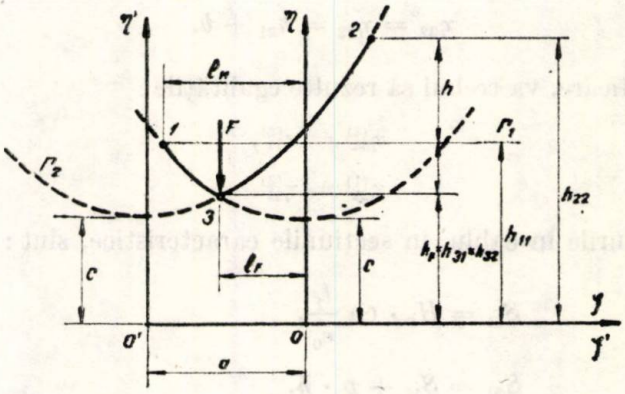


Fig. 9

Din aceste două relaţii rezultă ecuaţia transcendentă în parametrul $\left(\alpha=\frac{l}{2c}\right)$:

$$f(\alpha)=\operatorname{sh}\left(\alpha+\operatorname{arc\,sh}\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right)-\left(\frac{\sqrt{(F/p+s)^2-h^2}}{l}\right)\cdot\alpha=0, \tag{3.31}$$

care poate fi rezolvată prin încercări, corecţia efectuîndu-se cu

$$\Delta\alpha=-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \tag{3.32}$$

unde

$$f'(\alpha)=\left(1+\frac{\frac{F/p}{l}}{\sqrt{1+\left(\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}}\right)\cdot\operatorname{ch}\left(\alpha+\operatorname{arc\,sh}\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right)- \tag{3.33}$$

$$-\frac{\sqrt{(F/p+s)^2-h^2}}{l}.$$

În expresia (3.32) a corecţiei se introduc valorile funcţiei (3.31) şi a derivatei acesteia (3.33), pentru valoarea de încercare $\tilde{\alpha}$.

După determinarea ca mai sus a parametrului α, se calculează c şi apoi (vezi 3.29):

$$a = 2c \cdot \operatorname{arg\,sh} \frac{F/p}{2c}, \tag{3.34}$$

rezultînd astfel (vezi 3.28):

$$l_F = -\, c \cdot \operatorname{arg\,sh} \frac{F/p}{2c}, \tag{3.35}$$

şi se obţine apoi:

$$\eta_{31} = \eta_{32} = h_{32} = c \cdot \operatorname{ch}\left(\operatorname{arg\,sh} \frac{F/p}{2c}\right). \tag{3.36}$$

De asemenea, din (2.20) rezultă

$$l_{11} = c \cdot \operatorname{arg\,th} \frac{h}{F/p + s} - \frac{l + a}{2} \tag{3.37}$$

şi deci

$$\eta_{11} = h_{11} = c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_{11}}{c}, \tag{3.38}$$

iar

$$\eta_{22} = h_{22} = h_{11} + h. \tag{3.39}$$

Aşadar, se pot obţine eforturile în secţiunile caracteristice ale cablului cu formulele (3.40):

— pe ramura Γ_1:

$$\begin{aligned} S_{11} &= p \cdot c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_{11}}{c}, \\ S_{31} &= p \cdot c \cdot \operatorname{ch} \frac{l_F}{c}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

— iar pe ramura Γ_2:

$$\begin{aligned} S_{32} &= S_{31}, \\ S_{22} &= S_{11} + p \cdot h. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Programul de calcul al mărimilor respective, alcătuit pe baza relaţiilor de mai sus, este dat în anexă, sub denumirea de „PROCAB III".

3.4. Forţa F aplicată în vîrful ramurii Γ_2 a formei de echilibru corespunzătoare

În acest caz (vezi fig. 10):

$$l_F = -a \tag{3.42}$$

şi deci din (2.5) rezultă

$$\operatorname{sh}\frac{a}{c} = \frac{F/p}{c}, \tag{3.43}$$

de unde

$$\frac{a}{c} = \operatorname{arg\,sh}\frac{F/p}{c}, \tag{3.43,a}$$

iar din (2.8) vom avea

$$\operatorname{ch}\frac{a}{c} = 1 - \frac{b}{c}, \tag{3.44}$$

de unde

$$\frac{b}{c} = -\left(\sqrt{1+\left(\frac{F/p}{c}\right)^2} - 1\right). \tag{3.45}$$

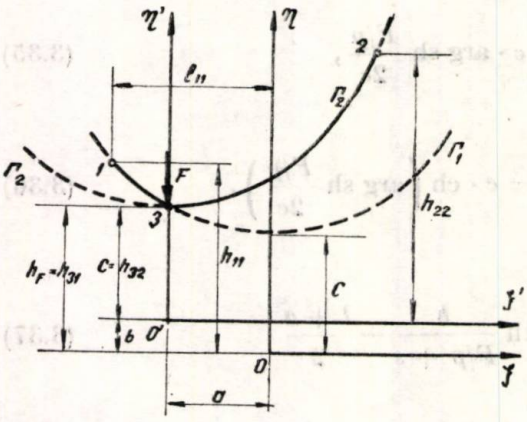


Fig. 10

Introducînd (3.43a) şi (3.45) în relaţia (2.19) se obţine ecuaţia transcendentă în $\left(\alpha = \frac{l}{2c}\right)$:

$$f(\alpha) = \operatorname{sh}\left(\alpha + \frac{1}{2}\cdot \operatorname{arg\,sh}\, 2\,\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right) -$$

$$-\sqrt{\left(\frac{F/p+s}{l}\cdot\alpha\right)^2 - \left[-\frac{h}{l}\cdot\alpha + \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1+\left(\frac{2F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2} - 1\right)\right]^2}.$$

Această ecuaţie se rezolvă prin încercări, corectîndu-se iterativ soluţiile aproximate cu relaţia

$$\Delta\alpha = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, \tag{3.46a}$$

unde

$$f'(\alpha) = \left(1 + \frac{\frac{F/p}{l}}{\sqrt{1+\left(2\,\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}}\right)\cdot \operatorname{ch}\left(\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{arg\,sh}\, 2\,\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right) -$$

$$\left(\frac{F/p+s}{l}\right)^2\cdot\alpha-\left[-\frac{h}{l}\cdot\alpha+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}-1\right)\right]\cdot\left(-\frac{h}{l}+\frac{2\left(\frac{F/p}{l}\right)^2\cdot\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{2F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}}\right)$$

$$\sqrt{\left(\frac{F/p+s}{l}\cdot\alpha\right)^2-\left[-\frac{h}{l}\cdot\alpha+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}-1\right)\right]^2}$$

Odată determinat α, se calculează c şi apoi a şi b :

$$a = c\cdot\operatorname{arg\,sh}\frac{F/p}{c},$$

$$b = -c\cdot\left[\operatorname{ch}\left(\operatorname{arg\,sh}\frac{F/p}{c}\right)-1\right], \tag{3.48}$$

rezultînd

$$l_{11} = c\cdot\operatorname{arg\,th}\frac{h+b}{F/p+s}-\frac{l+a}{2},$$

$$h_{11} = c\cdot\operatorname{ch}\frac{l_{11}}{c};\quad h_{31} = c-b;\quad h_{32} = c;\quad h_{22} = h_{11}+b+h, \tag{3.49}$$

şi, în consecinţă, eforturile în secţiunile caracteristice ale cablului vor fi :

— pe ramura Γ_1 :

$$S_{11} = p\cdot c\cdot\operatorname{ch}\frac{l_{11}}{c},$$

$$S_{31} = H-p\cdot b, \tag{3.50}$$

— iar pe ramura Γ_2 :

$$S_{32} = H,$$

$$S_{22} = S_{11}+p\cdot(b+h). \tag{3.51}$$

În baza relaţiilor de mai sus, programul de calcul al mărimilor respective este dat în anexă, sub denumirea de „PROCAB IV".

3.5. Forţa F aplicată în vîrful ramurii Γ_1 a formei de echilibru corespunzătoare a cablului

În acest caz, se observă (fig. 11) că

$$l_F = 0, \tag{3.52}$$

şi deci din (2.5) rezultă

$$\operatorname{sh}\frac{a}{c} = \frac{F/p}{c}, \tag{3.53}$$

de unde

$$\frac{a}{c} = \operatorname{arc\,sh} \frac{F/p}{c}, \tag{3.53a}$$

iar din (2.8)

$$\operatorname{ch} \frac{a}{c} = 1 + \frac{b}{c}, \tag{3.54}$$

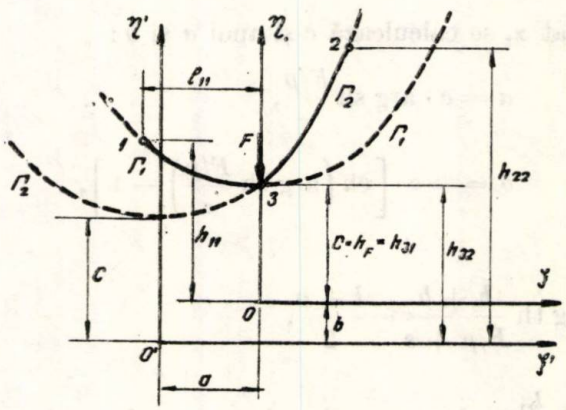


Fig. 11

și deci

$$\frac{b}{c} = \sqrt{1 + \left(\frac{F/p}{c}\right)^2} - 1. \tag{3.55}$$

Introducînd expresiile (3.53a) și (3.55) în (2.19), se obține ecuația transcendentă în parametrul $\alpha \left(= \frac{l}{2c}\right)$:

$$f(\alpha) = \operatorname{sh}\left(\alpha + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,sh}\, 2\, \frac{F/p}{l} \cdot \alpha\right) - \tag{3.56}$$

$$- \sqrt{\left(\frac{F/p + s}{l} \cdot \alpha\right)^2 - \left[\frac{h}{l} \cdot \alpha + \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(2\, \frac{F/p}{l} \cdot \alpha\right)^2} - 1\right)\right]^2},$$

care se rezolvă prin încercări, cu corecția (3.46a), unde

$$f'(\alpha) = \left[1 + \frac{\frac{F/p}{l}}{\sqrt{1 + \left(2\, \frac{F/p}{l} \cdot \alpha\right)^2}}\right] \cdot \operatorname{ch}\left(\alpha + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sh}\, 2 \cdot \frac{F/p}{l} \cdot \alpha\right) -$$

$$\left(\frac{F/p+s}{l}\right)^2\cdot\alpha-\left[\frac{h}{l}\cdot\alpha+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{2F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}-1\right)\right]\cdot\left(\frac{h}{l}+\frac{2\left(\frac{F/p}{l}\right)^2\cdot\alpha}{\sqrt{1+\left(\frac{2F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}}\right)$$

$$-\sqrt{\left(\frac{F/p+s}{l}\cdot\alpha\right)^2-\left[\frac{h}{l}\cdot\alpha+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\left(2\,\frac{F/p}{l}\cdot\alpha\right)^2}-1\right)\right]^2}\qquad(3.57)$$

Odată determinat α se calculează $c\left(=\frac{l}{2\alpha}\right)$ şi apoi din (3.53) se obţine

$$a=c\cdot\operatorname{arg\,sh}\frac{F/p}{c},\qquad(3.58)$$

iar din (3.54)

$$b=c\cdot\left[\operatorname{ch}\left(\operatorname{arg\,sh}\frac{F/p}{c}\right)-1\right].\qquad(3.59)$$

În continuare, din (2.20) rezultă

$$l_{11}=c\cdot\operatorname{arg\,th}\frac{h+b}{F/p+s}-\frac{l+a}{2},\qquad(3.60)$$

şi deci

$$h_{11}=c\cdot\operatorname{ch}\frac{l_{11}}{c}\qquad(3.61)$$

şi

$$h_{31}=h_F=c,$$

$$h_{32}=c+b,$$

$$h_{22}=h_{11}+b+h.\qquad(3.62)$$

Aşadar, eforturile în secţiunile caracteristice ale cablului sînt:
— pe ramura Γ_1:

$$S_{11}=p\cdot h_{11}=p\cdot c\cdot\operatorname{ch}\frac{l_{11}}{c},\qquad(3.63)$$

$$S_{31}=p\cdot c=H,$$

iar pe ramura Γ_2:

$$S_{32} = H + p \cdot b,$$
$$S_{22} = S_{11} + p \cdot (b + h). \tag{3.64}$$

Programul de calcul al mărimilor respective, alcătuit pe baza relaţiilor de mai sus, este dat în anexă, sub denumirea de „PROCAB V".

APLICAŢIE

Un cablu de 300 m lungime este suspendat între două puncte *1* şi 2, distanţate pe orizontală cu 250 m şi denivelate cu 50 m. Cablul susţine o sarcină verticală uniform repartizată în lungul său de 10 daN/m şi o forţă concentrată verticală de 2500 daN. Se cere să se calculeze eforturile în diferitele secţiuni caracteristice ale cablului, precum şi săgeţile maxime ale acestuia, pentru diferite poziţii ale forţei concentrate (fig. 12).

Din datele problemei rezultă:

$$l = 250 \text{ m}; \quad h = 50 \text{ m}; \quad s = 300 \text{ m};$$
$$p = 10 \text{ daN/m}; \quad F = 2500 \text{ daN}.$$

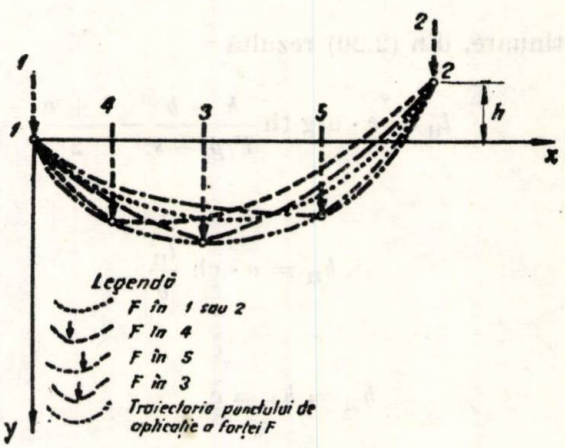


Fig. 12

1. FORŢA CONCENTRATĂ SE APLICĂ ÎN PUNCTUL 1

1.1. Aplicînd programul PROCAB I.1, au rezultat valorile mărimilor ajutătoare:

$$A = 1{,}183215957,$$
$$s' = 250 \text{ m}; \quad s'' = 550 \text{ m};$$
$$\gamma = 0{,}1666666667.$$

1.2. Cu aceste valori, prin programul PROCAB I.2 şi I.3 s-au calculat mărimile :

$$\alpha = 1{,}021509047,$$
$$c_0 = 122{,}3679813 \text{ m},$$
$$H_0 = 1223{,}679813 \text{ daN},$$
$$l_1 = 104{,}41322858 \text{ m}; \quad l_F = -222{,}6614579 \text{ m},$$
$$b = -217{,}7035845,$$

precum şi eforturile în diferitele secţiuni caracteristice ale cablului :

$$S_{11} = S_{31} = 3873{,}837004 \text{ daN},$$
$$S_{32} = 1696{,}837159 \text{ daN},$$
$$S_{22} = 2196{,}837159 \text{ daN}.$$

1.3. Coordonatele vîrfului cablului s-au calculat cu programul PROCAB I.4.

$$v_0 = 47{,}3157345 \text{ m};$$
$$l_{v0} = 104{,}413288 \text{ m}.$$

2. FORŢA CONCENTRATĂ SE APLICĂ ÎN PUNCTUL 2

S-a continuat calculul, aplicînd programul PROCAB II şi au rezultat valorile mărimilor ajutătoare :

$$l_F = 145{,}5867142 \text{ m};$$
$$a = 96{,}09209294 \text{ m}; \quad b = 229{,}7432282 \text{ m},$$

precum şi eforturile în diferitele secţiuni caracteristice ale cablului :

$$S_{11} = 1696{,}837159 \text{ daN};$$
$$S_{31} = 2196{,}837159 \text{ daN};$$
$$S_{32} = S_{22} = 4494{,}269440 \text{ daN}.$$

Coordonatele vîrfului cablului sînt aceleaşi ca mai sus.

3. FORŢA CONCENTRATĂ SE APLICĂ ÎN PUNCTUL DE COTĂ MINIMĂ AL CABLULUI

3.1. Aplicînd programul PROCAB III.1, s-au calculat valorile mărimilor ajutătoare :

$$s' = 250 \text{ m}; \quad \sigma = 1; \quad s'' = 550 \text{ m},$$
$$B = 2{,}19089023.$$

3.2. Aplicînd programul PROCAB III.2 şi III.3, s-au determinat:

$$\alpha = 0.4040656137,$$

$$c = 309{,}3556981 \text{ m},$$

$$H = 3093{,}556981 \text{ daN},$$

$$a = 243{,}6351857 \text{ m}; \qquad l_F = -121{,}8265929 \text{ m},$$

$$l_{11} = -218{,}6254867 \text{ m},$$

precum şi eforturile în secţiunile caracteristice ale cablului:

$$S_{11} = 3898{,}776407 \text{ daN},$$

$$S_{31} = S_{32} = 3336{,}554330 \text{ daN},$$

$$S_{22} = 4398{,}776407 \text{ daN}.$$

3.3. Cu ajutorul programului PROCAB III.4 s-au calculat coordonatele vîrfului cablului:

$$v = 56{,}2222877 \text{ m},$$

$$l_v = 96{,}7988938 \text{ m}.$$

4. FORŢA CONCENTRATĂ SE APLICĂ ÎN VÎRFUL RAMURII Γ_2 A CABLULUI

4.1. Prin programul PROCAB IV.1 s-au calculat valorile mărimilor ajutătoare:

$$\sigma = 1; \qquad \varepsilon = 2{,}2; \qquad \omega = 0{,}2.$$

4.2. Cu ajutorul programelor PROCAB IV.1 şi IV.2, s-au calculat:

$$\alpha = 0{,}52354$$

$$c = 238{,}7592161 \text{ m}; \qquad H = 2387{,}59 \text{ daN},$$

$$a = 218{,}2916944 \text{ m}; \qquad b = -106{,}9371294 \text{ m},$$

$$l_{11} = -258{,}9515589 \text{ m},$$

precum şi eforturile în secţiunile caracteristice ale cablului :

$$S_{11} = 3935{,}0114363 \text{ daN},$$

$$S_{31} = 3456{,}963455 \text{ daN},$$

$$S_{32} = 2387{,}592161 \text{ daN},$$

$$S_{22} = 3365{,}640142 \text{ daN}.$$

4.3. Aplicînd programul PROCAB IV.4 au rezultat coordonatele punctului de aplicaţie al forţei :

$$v = 47{,}8050908 \text{ m},$$

$$l_v = 40{,}6598645 \text{ m}.$$

5. FORŢA CONCENTRATĂ SE APLICĂ ÎN VÎRFUL RAMURII Γ_1 A CABLULUI

5.1. S-au preluat valorile calculate anterior :

$$\sigma = 1 ; \quad \varepsilon = 2{,}2 ; \quad \omega = 0{,}2.$$

5.2. Prin programul PROCAB V.2 şi V.3 s-au calculat valorile mărimilor :

$$\alpha = 0{,}42805,$$

$$c = 292{,}0219601 \text{ m},$$

$$H = 2920{,}219601 \text{ daN},$$

$$a = 226{,}5734938 \text{ m} ; \quad b = 92{,}39555404 \text{ m},$$

$$l_{11} = -\ 160{,}9213408 \text{ m},$$

precum şi eforturile în secţiunile caracteristice ale cablului :

$$S_{11} = 3374{,}939735 \text{ daN},$$

$$S_{31} = 2920{,}219601 \text{ daN},$$

$$S_{32} = 3844{,}175005 \text{ daN},$$

$$S_{22} = 4798{,}895273 \text{ daN}.$$

5.3. Cu programul PROCAB IV.4 s-au calculat coordonatele punctului de aplicaţie al forţei

$$v = 45{,}4720134 \text{ m}; \qquad l_v = 160{,}9213408 \text{ m}.$$

Valorile eforturilor din secţiunile caracteristice ale cablului, precum şi coordonatele vîrfului cablului, pentru poziţiile alese ale punctului de aplicaţie al forţei concentrate, sînt centralizate în tabelul de mai jos. În paranteză sînt trecute valorile mărimilor respective, calculate prin metoda clasică actuală.

Tablou

F în :	H (daN)	S_{11} (daN)	S_{31} (daN)	S_{32} (daN)	S_{22} (daN)	v (m)	l_v (m)
1	1224(1410)	3874(3975)	3874(3975)	1697(1862)	2197(2270)	47,3(43,8)	104,4
4	2388(2050)	3935(3795)	3457(3390)	2388(2050)	3366(3090)	47,8(58,5)	40,7
3	3094(2470)	3899(3545)	3337(2840)	3337(2720)	4399(3860)	56,2(76,5)	96,8
5	2920(2450)	3375(3105)	2920(2450)	3844(3515)	4799(4350)	45,5(61,5)	160,9
2	1224(1410)	1697(1862)	2197(2270)	4494(4510)	4494(4510)	47,3(43,8)	104,4

În figura 12 s-au reprezentat :

— cu linie plină : forma de echilibru a cablului cînd forţa F se aplică în imediata vecinătate a punctelor *1* şi *2* ;

— cu linii punctate : formele de echilibru ale cablului, cînd forţa F se aplică în punctele *4*, *3* şi *5* şi

— cu linie-punct : traiectoria punctului de aplicaţie al forţei concentrate.

După cum se observă din tabelă, efortul maxim în cablu se dezvoltă în secţiunea din imediata vecinătate a punctului de susţinere de cotă maximă *2*, cînd forţa concentrată se aplică în vîrful ramurii Γ_1 a cablului.

De asemenea, se vede că punctul de cotă minimă al cablului este cu circa 9 m ($\sim 20\%$) mai jos decît vîrful cablului încărcat numai cu sarcina distribuită (respectiv cînd forţa F intră pe cablu) şi se produce cînd forţa concentrată se aplică aproximativ în vîrful cablului neîncărcat cu această forţă.

CONCLUZII

Din compararea rezultatelor obţinute în exemplul tratat în lucrare, prin metoda exactă (a lănţişorului) şi prin metoda aproximativă (a parabolei) curent utilizată în practică, se observă diferenţe apreciabile, atît la valorile eforturilor (cuprinse între -9% şi $+25\%$), cît şi ale săgeţilor (cuprinse între $-26{,}5\%$ şi $+8\%$) şi mai ales o împrăştiere complet dezordonată a acestora. Astfel, însuşi efortul maxim în cablu se dezvoltă pentru poziţii diferite ale forţei concentrate pe cablu.

Avînd în vedere cele de mai sus, considerăm cu totul justificată şi utilă adoptarea în proiectarea funicularelor (a telefericelor etc.,) a metodei de calcul propusă în prezenta lucrare. Aceasta cu atît mai mult cu cît, utilizînd programele date în anexa lucrării (sau a unora similare, întocmite ad-hoc pentru un calculator oarecare), calculele se mecanizează chiar cînd acestea sînt efectuate în atelierele de proiectare, păstrîndu-se totodată aspectul fizic al problemei.

Se menţionează că luarea în considerare a alungirii cablului sub sarcină (atunci cînd este cazul, adică pentru săgeţi mici ale cablului,

ANEXĂ

Cuprinzînd programele de calcul al eforturilor în unele secţiuni ale unui cablu precum şi al coordonatelor vîrfului acestuia, pentru diferite poziţii ale forţei concentrate pe cablu, la un minicalculator „ T. I. SR. 50 ".

Se consideră cunoscute (vezi figura A)

$$\ell, h, s, p \text{ şi } F$$

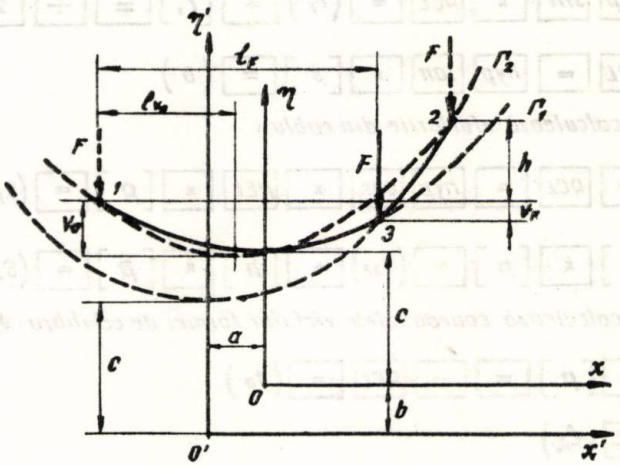
Afişarea valorilor acestora, prin testarea lor la calculator, precum şi ale altor mărimi determinate pe parcurs, este indicată în program prin scrierea simbolurilor respective între paranteze drepte

Extragerea unor valori este indicată prin scrierea simbolurilor respective între paranteze curbe.

Semnele de mai sus vor fi însă interpretate ca introducere sau extragere din memoriile a 2-a, a 3-a etc. a valorilor respective, în cazul utilizării unor calculatoare cu mai multe memorii (de exemplu T. I. SR. 51)

Obs. În programele de mai jos :

|f| reprezintă *f* în valoare absolută (adică fără semn)



Anexa 1

PROCAB I și II

I, Forță concentrată se aplică în imediata vecinătate a punctului (1)

1. Se calculează :

$$A=\frac{\sqrt{s^2-h^2}}{l} \quad ; \quad s'=F/p \quad ; \quad s''=\frac{F}{p}+s \quad ; \quad \gamma=\frac{h}{s}$$

I.1 [s] STO x^2 − [h] x^2 = $\sqrt{x}$ ÷ [ℓ] = (A) ;

[F] ÷ [p] = (s') + RCL = (s'')

[h] ÷ RCL = (γ)

2. Se calculează α, prin interații succesive :

$\tilde{\alpha}$ = o valoare inițială arbitrară

I.2 [$\tilde{\alpha}$] STO hyp sin − [A] x RCL = (f)

dacă ← $|f| < 1.10^{-5} \rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha$

→ $|f| > 1.10^{-5} \rightarrow$ [f] STO

[$\tilde{\alpha}$] hyp cos − [A] = ÷ RCL = 1/x +/− + [$\tilde{\alpha}$] = ($\tilde{\alpha}$)

Se reia I.2

3 Se determină valorile mărimilor :

C_0, H_0, l_1, l_F și b

I.3 [α] x 2 ÷ [ℓ] = 1/x STO (C_0) x [p] = (H_0)

[γ] arc hyp tan − [α] = x RCL = (ℓ_1) ÷

÷ RCL = hyp sin − [s'] ÷ RCL =

arc hyp sin x RCL = (ℓ_F) + [ℓ_1] = ÷ 2 ÷

÷ RCL = hyp tan x [s'] = (b)

4. Se calculează eforturile din cablu :

I.4 [ℓ_F] ÷ RCL = hyp cos x RCL x [p] = (S_{11} , S_{31}) +

+ [b] x [p] = (S_{32}) + [h] x [p] = (S_{22})

5 Se calculează coordonatele vîrfului formei de echilibru : v_0 și ℓ_{v_0}

I.5 [S_{32}] ÷ [p] = − RCL = (v_0)

[ℓ_1] +/− (ℓ_{v_0})

PROCAB III

Punctul de aplicație al forței concentrate este la cota minimă posibilă

1. *Se calculează :*

$$s' = F/p \; ; \; \sigma = s'/\ell \; ; \; s'' = s' + s \; ; \; B = \frac{\sqrt{(s'')^2 - h^2}}{\ell}$$

III.1 [F] [÷] [p] [=] (s') [STO] [÷] [ℓ] [=] (σ)

[RCL] [+] [s] [=] (s'') [x²] [−] [h] [x²] [=] [√x] [÷]

[÷] [ℓ] [=] (B)

2. *Se calculează α prin iterații succesive*

$\tilde{\alpha}$ = *o valoare inițială arbitrară*

III.2 [$\tilde{\alpha}$] [STO] [x] [σ] [=] [arc] [hyp] [sin] [+] [RCL] [=] [STO]

[hyp] [sin] [−] [B] [x] [$\tilde{\alpha}$] [=] (f)

dacă $\begin{cases} |f| < 1.10^{-5} \rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha \\ |f| > 1.10^{-5} \rightarrow \end{cases}$

[RCL] [hyp] [cos] [STO] [σ] [x] [$\tilde{\alpha}$] [=] [x²] [+] [1] [=]

[=] [√x] [÷] [σ] [=] [1/x] [+] [1] [=] [x] [RCL] [−] [B] [=]

[=] [÷] [f] [=] [1/x] [+/−] [+] [$\tilde{\alpha}$] [=] ($\tilde{\alpha}$)

Se reia III.2

3. *Se determină valorile mărimilor* C, H, a, ℓ_F *și* ℓ_{II}

III.3 [α] [x] [2] [÷] [ℓ] [=] [1/x] [STO] (C) [x] [p] [=] (H)

[s'] [÷] [2] [÷] [RCL] [=] [arc] [hyp] [sin] [x] [RCL] [x]

[x] [2] [=] (a) [÷] [2] [+/−] [=] (ℓ_F)

[h] [÷] [s''] [=] [arc] [hyp] [tan] [x] [RCL] [−] [ℓ] [÷]

[÷] [2] [+] [ℓ_F] [=] (ℓ_{II})

4. *Se calculează eforturile din cablu*

III.4 [ℓ_{II}] [÷] [RCL] [=] [hyp] [cos] [x] [RCL] [x] [p] [=] (S_{II}) [+]

[+] [h] [x] [p] [=] (S_{22})

[ℓ_F] [÷] [RCL] [hyp] [cos] [x] [RCL] [x] [p] [=] (S_{31}) (S_{32})

5. *Se calculează coordonatele vîrfului formei de echilibru a cablului*

III.5 [S_{II}] [−] [S_{31}] [=] [÷] [p] [=] (v)

[ℓ_F] [−] [ℓ_{II}] [=] (ℓ_v)

II. Forța concentrată se aplică în imediata vecinătate a punctului (2)

1. Se continuă programul I

II.1 [l_1] [+] [l] [=] (l_F)

[l_1] [÷] [RCL] [=] [hyp] [sin] [+] [s''] [÷] [RCL] [=]

[=] [arc] [hyp] [sin] [x] [RCL] [−] [l_F] [=] (a) [÷]

[÷] [2] [+] [l_F] [=] [÷] [RCL] [=]

[=] [hyp] [tan] [x] [s'] [=] (b)

2. Se calculează eforturile în cablu

II.2 [l_1] [÷] [RCL] [=] [hyp] [cos] [x] [RCL] [x] [p] [=] (S_{31}) [+]

[+] [h] [x] [p] [=] (S_{32}) [+] [b] [x] [p] [=] (S_{32}, S_{22})

3. Coordonatele vîrfului formei de echilibru sînt egale cu cele calculate anterior.

PROCAB IV și V

IV. *Forța concentrată se aplică în vîrful ramurii din dreapta (r_2) a cablului*

1. *Se calculează :*

$$\sigma = \frac{F/p}{\ell} \quad ; \quad \varepsilon = \frac{F/p + s}{\ell} \quad ; \quad \omega = \frac{h}{\ell}$$

IV.1 [F] [÷] [p] [÷] [ℓ] [=] (σ) [+] [s] [÷] [ℓ] [STO] [=]

[=] (ε) [RCL] [÷] [h] [=] [1/x] (ω)

2. *Se calculează α prin iterații succesive*

$\tilde{\alpha}$ = *o valoare inițială arbitrară*

IV.2 [α̃] [STO] [x] [2] [x] [σ] [=] [arc] [hyp] [sin] [÷] [2] [+]

[+] [RCL] [=] [hyp] [sin] [STO]

[2] [x] [σ] [x] [α̃] [=] [x²] [+] [1] [=] [√x] (β) [−]

[−] [1] [=] [÷] [2] [−] [ω] [x] [α̃] [=] [x²] [+/−] [+]

[+] [ε] [x²] [x] [α̃] [x²] [=] [√x] (f_1) [+/−] [+] [RCL] [=] (f)

dacă → $|f| < 1.10^{-5}$ → $\tilde{\alpha} = \alpha$

dacă → $|f| > 1.10^{-5}$ →

[RCL] [arc] [hyp] [sin] [hyp] [cos] [STO]

[β] [÷] [σ] [=] [1/x] [+] [1] [=] [x] [RCL] [=] (f_2)

[β] [−] [1] [=] [÷] [2] [−] [ω] [x] [α̃] [=] [STO]

[β] [÷] [σ] [x²] [÷] [2] [÷] [α̃] [=] [1/x] [−] [ω] [=]

[=] [x] [RCL] [+/−] [+] [ε] [x²] [x] [α̃] [=] [÷] [f_1]

[+/−] [+] [f_2] [=] [÷] [f] [=] [1/x] [+/−] [+] [α̃] [=] (α̃)

Se reia IV.2

3. *Se determină valorile mărimilor :*

C, H, a, b și ℓ_n

IV.3 [α] [x] [2] [÷] [ℓ] [=] [1/x] [STO] (C) [x] [p] [=] (H)

[ℓ] [x] [σ] [÷] [RCL] [=] [arc] [hyp] [sin] [x] [RCL] [=] (a) [÷]

[÷] [RCL] [=] [hyp] [cos] [−] [1] [=] [x] [RCL] [+/−] [=] (b) [+]

[+] [h] [=] [÷] [ε] [÷] [ℓ] [=] [arc] [hyp] [tan] [x] [RCL] [=]

[=] [−] [ℓ] [÷] [2] [−] [a] [÷] [2] [=] (ℓ_n)

4. Se calculează eforturile în cablu :

IV.4 $[\ell_{11}]$ ÷ RCL = hyp cos × RCL × $[p]$ = (S_{11}) +

\+ $[h]$ × $[p]$ + $[b]$ × $[p]$ = (S_{32})

RCL × $[p]$ = (S_{32}) − $[b]$ × $[p]$ = (S_{31})

5. Se calculează coordonatele vîrfului formei de echilibru a cablului

IV.5 $[S_{11}]$ − $[S_{31}]$ = ÷ $[p]$ = (y^*)

$[\ell_{11}]$ +/− − $[a]$ = (ℓ_v)

V **Forța concentrată se aplică în vîrful ramurii din stînga (Γ_1) a cablului**

1 Se utilizează mărimile

σ, ε și ω

calculate anterior prin PROCAB IV.1

(V.1 = IV.1)

2 Se calculează α prin iterații succesive

$\tilde{\alpha}$ = o valoare inițială arbitrară

V.2 $[\tilde{\alpha}]$ STO × 2 × $[\sigma]$ = arc hyp sin ÷ 2 +

\+ RCL = hyp sin STO

$[\tilde{\alpha}]$ × 2 × $[\sigma]$ = x^2 + 1 = $\sqrt{x}$ (β) − 1 =

= ÷ 2 + $[\omega]$ × $[\tilde{\alpha}]$ = x^2 +/− + $[\varepsilon]$ x^2 ×

× $[\tilde{\alpha}]$ x^2 = $\sqrt{x}$ (f_1) +/− + RCL = (f)

dacă $\begin{cases} |f| < 1.10^{-5} \rightarrow \tilde{\alpha} = \alpha \\ |f| > 1.10^{-5} \rightarrow \end{cases}$

RCL arc hyp sin hyp cos STO

$[\beta]$ ÷ $[\sigma]$ = $1/x$ + 1 = × RCL = (f_2)

$[\beta]$ − 1 = ÷ 2 + $[\omega]$ × $[\tilde{\alpha}]$ = STO

$[\beta]$ ÷ $[\sigma]$ x^2 ÷ 2 ÷ $[\tilde{\alpha}]$ = $1/x$ + $[\omega]$ = ×

× RCL +/− + $[\varepsilon]$ x^2 × $[\tilde{\alpha}]$ = ÷ $[f_1]$ =

= +/− + $[f_2]$ = ÷ $[f]$ = $1/x$ +/− + $[\tilde{\alpha}]$ = $(\tilde{\alpha})$

Se reia V.2

3. Se determină valorile mărimilor C, H, a, b, şi ℓ_{11}.

v.3 [α] [×] [2] [÷] [ℓ] [=] [1/x] [STO] (c) [×] [p] [=] (H)

[ℓ] [×] [σ] [÷] [RCL] [=] [arc] [hyp] [sin] [×] [RCL] [=] (a) [÷]

[÷] [RCL] [=] [hyp] [cos] [−] [1] [=] [×] [RCL] [=] (b) [+]

[+] [h] [=] [÷] [ε] [÷] [ℓ] [=] [arc] [hyp] [tan] [×]

[×] [RCL] [=] [−] [ℓ] [÷] [2] [−] [a] [÷] [2] [=] (ℓ_{11})

4. Se calculează eforturile din cablu

v.4 [ℓ_{11}] [÷] [RCL] [=] [hyp] [cos] [×] [RCL] [×] [p] [=] (S_{11}) [+]

[+] [p] [×] [h] [+] [b] [×] [p] [=] (S_{22})

[RCL] [×] [p] [=] (S_{31}) [+] [b] [×] [p] [=] (S_{32})

5 Se calculează coordonatele vîrfului formei de echilibru a cablului

v.5 [S_{11}] [÷] [p] [−] [RCL] [=] (ν)

[ℓ_{11}] [+/−] (ℓ_ν).

Anexa 7

aproximativ egale cu a douăzecea parte din deschiderea acestuia), se poate face prin multiplicarea iterativă a lungimii cablului s cu :

$$K_s = 1 + \frac{H}{E \cdot A} \cdot \left(s + \frac{l}{2}\right),$$

unde H, s şi l au semnificaţiile din cuprinsul lucrării, iar E şi A sînt modulul de elasticitate şi, respectiv, aria secţiunii cablului. Interaţia poate fi oprită cînd valoarea H_i a efortului minim în cablu este suficient de apropiată de valoarea H_{i-1} a acestuia.

De asemenea, luarea în considerare a efectului de temperatură se poate face prin multiplicarea lungimii cablului cu :

$$K_t = 1 + \alpha \cdot \Delta t,$$

unde α este coeficientul de dilataţie liniară a materialului din care este alcătuit cablul, iar Δt este diferenţa de temperatură.

Primită la redacţie la 15 noiembrie 1978

BUCUREŞTI MOŞTAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1948

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bora, I. C. Drăgan, *Funiculare și plane înclinate*, Brașov, Institutul Politehnic, 1960.
2. L. Bora, *Realizări noi în construcția și exploatarea funicularelor forestiere*, Vol. I și II, București, I.D.T., 1962—1964.
3. Gh. Cerchez, *În legătură cu calculul cablului purtător la funicularele pasagere*, Rev. pădurilor, **80**, *4*, aprilie (1965).
4. Gh. Cerchez, *Funiculare pasagere*, București, Edit. Agrosilvică, 1966.
5. * * * *Instrucțiuni tehnice pentru construirea și întreținerea funicularelor R—12—60*, Inspectoratul de stat pentru cazane și instalații de ridicat (ISCIR), București, 1962.
6. S. Naftali, *Funiculare*, București, Edit. tehnică, 1958.
7. Z. Scheigert, *Aerial Ropeways and Funicular Railways*, London, 1966.
8. I. Stan, *Contribuții la calculul efortului de tracțiune din cablu purtător al funicularelor cu mers continuu*, Rev. Pădurilor **84**, *9*, (sept. 1969).
9. N. Posea, *Rezistența materialelor*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1978.
10. P. Mazilu, N. Posea, G. Iordache, *Probleme de rezistența materialelor*, vol. I, Edit. tehnică, 1969.
11. O. Zweifel, *Seilbahnberechnung bei beiseitig verankerten Tragseilen*, Schweizerische Bauzeitung **78**, *1—2* (ian. 1960).
12. I. C. Drăgan, L. Bora, Gh. Cerchez, Al. Comănescu, I. Stan, *Funiculare forestiere*, Ed. Ceres (1971).

CONCEPTE PROBABILISTE ÎN OPTIMIZAREA STRUCTURILOR. I

de DAN FRANGOPOL

Institutul de construcții București

Lucrarea tratează problema optimizării structurilor prin prisma conceptelor moderne probabilistice. În prima parte a lucrării (I) se propune o ierarhizare a problemelor de optimizare și se analizează o serie de aspecte specifice procesului optimizării. O a doua parte a lucrării (II) este consacrată concepției probabilistice de optimizare a structurilor, ținîndu-se seama de criteriile de optimizare specifice și de metodele matematice necesare pentru evaluarea siguranței structurilor. După ce se prezintă exemple de optimizare probabilistică, lucrarea se încheie cu concluzii privind stadiul actual al aplicării conceptelor probabilistice în optimizarea structurilor, indicîndu-se și obiectivele spre care trebuie orientată cercetarea în viitor.

1. INTRODUCERE

Procesul complex al proiectării structurilor poate fi abordat utilizînd două căi diferite :

— prima, care este curent folosită în practică, constă dintr-o analiză, adică dintr-o verificare la acțiunea unor încărcări date a comportării unei structuri cu dimensiuni prestabilite (pe bază de tradiție și experiență), avînd distribuția materialului în cuprinsul elementelor de rezistență specificată. În prezent, utilizînd metodele de analiză evoluate (elemente finite, diferențe finite etc.), se pot determina cu ajutorul calculatoarelor stările de solicitare (eforturi, deplasări etc.) care apar, sub acțiunea unor încărcări precizate, în structuri dintre cele mai complexe.

Aplicînd această alternativă, în cadrul unui proces de proiectare iterativă în care proiectantul apreciază asupra modificărilor ce trebuie introduse pe parcurs în vederea îmbunătățirii soluției, se ajunge în final la o structură care satisface condițiile de rezistență, stabilitate, deformabilitate etc. Procedînd în acest fel, proiectantul nu răspunde de fapt cerinței pe care societatea i-o reclamă și anume adoptarea celei mai indicate soluții de structură ; într-adevăr, soluția finală obținută în cadrul procesului de proiectare iterativă nu este, decît în mod cu totul întîmplător, soluția optimă ;

— a doua, mult mai ambițioasă, răspunzînd direct îndatoririi proiectantului de structuri față de societate, își propune ca obiectiv determinarea directă a soluției optime. Această cale de abordare, care, în final, conduce la identificarea structurii optime, nu poate fi urmată fără utilizarea unor tehnici de calcul compatibile cu dotarea tehnică disponibilă ;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 4, 1979, P. 519–535

pentru optimizarea structurilor complexe este necesară dotarea cu calculatoare caracterizate prin performanţe ridicate.

Din punctul de vedere al modului în care se consideră variabilitatea întîmplătoare a factorilor de bază care afectează siguranţa structurilor se pot deosebi, în principal, două tipuri de formulări ale problemei de optimizare :

— formulări deterministe (formulări clasice) ;
— formulări probabilistice.

În formularea clasică se porneşte de la un ansamblu de încărcări ce trebuie suportate de structură în anumite condiţii impuse (prin limitarea valorilor eforturilor, deplasărilor etc.) de prescripţia oficială de calcul folosită. Toate datele (încărcări, caracteristici de rezistenţă şi rigiditate etc.) presupunîndu-se certe (nealeatoare) se urmăreşte obţinerea celei mai indicate structuri care corespunde prescripţiei de calcul (deterministe) folosite. Este evident că utilizînd formularea deterministă, care nu ia în considerare variabilitatea aleatoare a factorilor care condiţionează siguranţa construcţiilor, soluţia cea mai bună corespunzătoare acestei formulări poate fi extrem de depărtată de soluţia optimă reală.

În cele ce urmează după ce se prezintă conceptele care stau la baza optimizării, concepte care ajută să se înţeleagă natura acestei probleme, dimensionarea structurilor este tratată ca o problemă de optimizare probabilistă, în care principalii factori care condiţionează siguranţa structurilor sînt introduşi în calcule ca variabile aleatoare. Această formulare probabilistă corespunde scopului fundamental al calculelor proiectantului de structuri, anume acela de a adopta soluţia caracterizată printr-o utilitate maximă pentru societate (în sensul că eficienţa efortului social-economic implicat de proiectarea, execuţia, exploatarea şi întreţinerea construcţiei respective să fie cît mai mare posibil). În consecinţă, soluţia optimă poate fi definită drept soluţia caracterizată printr-un grad de siguranţă considerat satisfăcător pentru societate, în condiţiile în care realizarea structurii implică un consum minim de materiale, iar funcţionalitatea construcţiei este asigurată. Siguranţa structurii, evaluată prin tehnici de calcul probabilistice (riguroase sau aproximative), intervine deci ca o condiţie esenţială în cadrul procesului de optimizare.

2. CONCEPTE DE BAZĂ ÎN OPTIMIZAREA STRUCTURILOR

2.1. DATE DE BAZĂ, PARAMETRII PRINCIPALI ŞI INFORMAŢIILE NECESARE

2.1.1. În procesul complex al proiectării structurilor, în care obiectivul central este prescrierea soluţiei optime pentru fiecare situaţie analizată în parte, proiectantul dispune, în momentul realizării proiectului, de un ansamblu de date de bază care pot fi grupate în două categorii :

— date generale (exemple : calitatea şi costul materialelor de construcţie ; stadiul de cunoaştere al comportării fizico-mecanice al materialelor, elementelor şi structurilor supuse la diverse tipuri de solicitări etc.) ;

— date specifice construcției care face obiectul proiectului (exemple : dimensiunile geometrice generale ale structurii impuse de beneficiar ; condiții funcționale, arhitectural-estetice etc.)

2.1.2. Parametrii asupra cărora poate interveni proiectantul înainte de a trece la dimensionarea structurii de rezistență sînt în general următorii :

— tipul de material ;
— tipul de structură ;
— procedeul de execuție.

Trebuie remarcat că alegerea acestor parametri (alegere care implică unele elemente subiective, putînd fi efectuată de proiectant numai în cazul în care beneficiarul nu impune parametrii principali în prealabil), constituie prima etapă importantă în procesul care duce la optimizarea globală a unei structuri. În această etapă, diverse soluții potențiale trebuie comparate sub diverse aspecte (dintre care cele mai semnificative sînt siguranța, costul probabil și funcționalitatea), astfel încît, în final, să se rețină cea mai bună variantă pentru materialele de construcție utilizate, pentru tipul de structură ales și pentru procedeul de execuție preconizat. De modul în care această etapă este soluționată (prin intuiția, simțul constructiv, capacitatea și creativitatea tehnologică a proiectantului) depinde în mare măsură valoarea soluției optime finale.

2.1.3. Informațiile necesare optimizării sînt de diverse categorii :

— informații referitoare la caracteristicile geometrice ale elementelor de construcție și la caracteristicile de rezistență și de rigiditate ale materialelor, elementelor de construcție și structurilor ;
— informații referitoare la încărcări ;
— informații referitoare la comportarea structurilor sub acțiunea încărcărilor.

Modul în care sînt furnizate aceste trei categorii de informații determină și concepția de calcul adoptată pentru procesul de optimizare. Astfel, dacă informațiile sînt furnizate sub formă de date certe se adoptă concepția clasică a optimizării deterministe, iar dacă informațiile sînt furnizate sub formă de date statistice (așa cum se prezintă în realitate) se recurge la optimizarea probabilistică.

În afară de cele trei categorii de informații enumerate anterior, informații care prin natura lor sînt de natură statistică, pentru optimizarea structurilor sînt necesare și alte tipuri de informații cum sînt :

— informații referitoare la conținutul actual al prescripțiilor utilizate pentru proiectarea structurilor de construcții (exemple : prevederi constructive, sortimente de materiale existente etc.) ;

— informații referitoare la stadiul actual al formulării unor criterii de proiectare rațională a structurilor (exemple : criterii care definesc stările limită, criterii de evaluare a siguranței structurilor, criterii de optimizare etc.).

După cunoașterea datelor de bază, a alegerii parametrilor principali și a culegerii informațiilor necesare se poate trece la formularea propriu-zisă a problemei de optimizare.

2.2. FORMULAREA PROBLEMEI DE OPTIMIZARE

2.2.1. Enunț

În termeni matematici, o problemă de optimizare poate fi formulată în modul următor:

Minimizează (sau maximizează) $F_0(x_i)$ $\quad i = 1, \ldots, n$ (1.a),

cu respectarea condițiilor restrictive $F_j(x_j) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} 0 \quad j = 1, \ldots, m$ (1.b),

și a condițiilor de nenegativitate $x_i \geqslant 0$ $\quad i = 1, \ldots, n$ (1.c).

În această formulare generală (care poate fi adoptată atît pentru formularea deterministă, cît și pentru cea probabilistică) s-a notat

- $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, variabilele alese în vederea dimensionării optime a structurii;
- $F_0(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, funcția-obiectiv, adică funcția prin care, pe baza criteriului de optimizare adoptat, se exprimă eficiența soluției studiate;
- $F_j(x_j)$, $j = 1, \ldots, m$, condițiile restrictive ale problemei, care pot fi formulate atît sub formă de inegalități $F_j(x_j) \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} 0$, cît și sub formă de egalități $F_j(x_j) = 0$;
- $x_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$, condițiile de nenegativitate ale variabilelor de dimensionare x_i, condiții care sînt necesare pentru a asigura că aceste variabile corespund sensului fizic ingineresc.

Problema de optimizare (1.a—c) este de tip finit întrucît există n variabile de dimensionare $x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n$. Aceste variabile, reprezentate prin vectorul $\{X\}$, cu componentele $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, adică

$$\{X\}^T = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}, \tag{2}$$

determină prin condițiile de nenegativitate (1.c) un spațiu n-dimensional definit pe semiaxele pozitive, numit spațiu de dimensionare, notat prescurtat SD. O valoare oarecare a vectorului $\{X\}$, notată $\{X^*\}$, determină în SD un punct de coordonate $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*\}$, care corespunde unei soluții posibile.

Soluția optimă, notată $\{X^{opt}\}$, corespunde punctului particular din spațiul SD ale cărui coordonate sînt definite prin componentele vectorului $\{X^{opt}\}$, deci

$$\{X^{opt}\}^T = \{x_1^{opt}, x_2^{opt}, \ldots, x_i^{opt}, \ldots, x_n^{opt}\}, \tag{3.a}$$

componente care, în funcție de criteriul de optimizare utilizat, minimizează sau maximizează funcția-obiectiv:

$$F_0(x_i^{opt}) = \min \text{ (sau max) } F_0(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3.b}$$

şi care respectă în plus condiţiile restrictive (1.b), adică

$$F_j(x_j^{opt}) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} 0. \tag{3.c}$$

Este evident, că soluţia optimă (3.a), aparţinînd spaţiului de dimensionare SD, respectă implicit şi condiţiile de nenegativitate (1.c), adică

$$x_i^{opt} \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.d}$$

2.2.2. Trepte de abordare ale optimizării

În ceea ce priveşte modul de considerare în calcule al caracterului aleator al factorilor de bază care condiţionează siguranţa unei structuri (încărcări; caracteristici de rezistenţă ale materialelor; caracteristici de rigiditate şi inerţie ale structurilor; caracteristici geometrice ale secţiunilor, elementelor de construcţie şi structurilor), unii dintre aceşti factori putînd figura în cadrul celor n variabile de dimensionare x_i, se pot distinge, în principal, următoarele trepte de abordare ale problemei de optimizare:

— toţi factorii sînt introduşi în calcul ca mărimi cu valori certe (optimizare deterministă, numită şi optimizare la nivelul treptei zero);

— unii din factorii de bază sînt consideraţi ca mărimi cu valori certe, iar ceilalţi ca variabile aleatoare (optimizare semiprobabilistă, numită şi optimizare la nivelul treptei I);

— factorii de bază sînt consideraţi ca mărimi aleatoare, dar variabilitatea întîmplătoare a acestora este luată în considerare în calcul într-o formă simplificată prin utilizarea momentelor de ordine inferioare (1 şi 2) ale distribuţiilor (optimizare probabilistică simplificată, numită şi optimizare la nivelul treptei II);

— toţi factorii sînt introduşi în calcul ca mărimi aleatoare, iar variabilitatea întîmplătoare a acestora este luată în considerare în mod riguros prin utilizarea densităţilor de repartiţie ale acestor mărimi (optimizare probabilistică riguroasă, numită şi optimizare la nivelul treptei III).

2.2.3. Ierarhizarea optimizării

În general, parametrii principali ai structurii (tipul de structură, tipul de material) se fixează apriori de proiectant (sau chiar de beneficiar), rămînînd de optimizat numai distribuţia materialului. Drept variabile intervin astfel numai anumite dimensiuni ce definesc secţiunile transversale ale elementelor, sau anumite caracteristici de rezistenţă şi de rigiditate ale acestora.

De exemplu, secţiunea transversală a grinzii de beton armat din figura 1 poate fi optimizată, în situaţia în care se defineşte încărcarea pe

care o suportă, lungimea acesteia și proprietățile mecanice ale materialelor din care este alcătuită. Această optimizare implică cinci variabile, dintre care două (x_1 și x_2) se referă la dimensiunile secțiunii grinzii și celelalte trei (x_3, x_4 și x_5) la arii de armătură. Alegînd drept funcție-obiectiv $F_0(x_i)$, $i = 1, \ldots, 5$ (vezi rel. 1. a), costul grinzii, problema care se pune este de a găsi grupul celor cinci valori x_i^{opt}, $i = 1, \ldots, 5$, pentru care $F_0(x_i)$ este minim. Exprimarea analitică a funcției-obiectiv necesită în acest caz sumarea costului betonului, a armăturii, a punerii în operă a grinzii și a cheltuielilor implicate de repararea unor avarieri ale acesteia produse în decursul perioadei de exploatare prevăzute. Condițiile restrictive (1.b) sînt numeroase deoarece grinda trebuie calculată astfel încît să respecte toate condițiile de rezistență, de rigiditate și constructive (exemple : înălțimea minimă a grinzii, distanța dintre armături, diametrul minim al armăturii, limitele prescrise pentru procentul de armare etc.) pe care prescripțiile oficiale de calcul și de alcătuire a grinzilor de beton armat le impun.

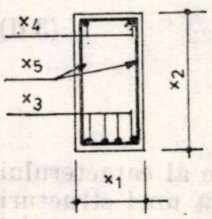


Fig. 1

Se remarcă că optimizarea grinzii din figura 1 (care reprezintă un simplu exemplu ilustrativ, caracterizat numai prin cinci variabile, cu o funcție — obiectiv relativ ușor de exprimat și cu circa 10—15 condiții restrictive) necesită un volum de calcul apreciabil.

La nivelul unei structuri, deci la nivelul unui ansamblu de elemente de construcție (grinzi, stîlpi, pereți, planșee etc.), calculul implicat de procesul de optimizare devine deosebit de complex, deoarece numărul variabilelor și al condițiilor restrictive este foarte mare (de ordinul sutelor sau chiar miilor), iar exprimarea analitică a funcției-obiectiv este uneori foarte dificilă. În aceste cazuri optimizarea (chiar în formularea cea mai simplă deterministă) nu poate fi uneori efectuată într-un timp competitiv (< 10 ore), nici chiar de calculatoarele caracterizate în prezent prin performanțe de vîrf pe plan mondial.

Ținînd seama de cele de mai sus, se impune o ierarhizare a problemelor de optimizare după următoarele categorii :

1. optimizare la nivelul elementelor de construcție (variantele de elemente posibile putînd diferi între ele prin dimensiunile — eventual și prin formele — secțiunilor și, evident, prin cantitățile de materiale pe care le conțin);

2. optimizare la nivelul unei structuri cu configurația geometrică generală fixată (variantele de structură posibile putînd diferi între ele prin cantitățile de materiale introduse în secțiuni);

3. optimizare la nivelul configurației geometrice a unei structuri (variantele de structură posibile putînd diferi între ele prin configurația lor geometrică — înălțime, lățime etc. — , prin variația formei secțiunilor elementelor și, evident, prin cantitățile de materiale pe care le conțin);

4. optimizare la nivelul topologiei unei structuri, denumită și optimizare globală (variantele posibile diferind între ele prin însăși tipul structurii de rezistență — cadre, diafragme etc.—, prin tipul de material utilizat — beton armat, beton precomprimat, metal etc. —, și prin procedeul de execuție preconizat).

Optimizarea globală presupune că proiectantul analizează diverse variante potențiale pentru structura de rezistență, stabilește soluțiile optime pentru fiecare tip de structură, de material și de procedeu de execuție posibil, iar apoi alege, pe baza criteriului de optimizare, cea mai indicată dintre aceste soluții. În acest fel se elimină elementele subiective care sînt asociate aprecierii proiectantului în alegerea apriori a parametrilor principali (tip de material, tip de structură, procedeu de execuție), parametri care au o influență hotărîtoare asupra soluției optime obținute prin calcul. Optimizarea globală nu urmărește să se substituie proiectantului în rolul său de decizie, ci să-l ajute în mod eficient pentru a putea compara mai obiectiv — pe baza criterului de optimizare — diverse soluții posibile, alegînd în final soluția cea mai indicată.

În literatura de specialitate se găsesc numeroase exemple de optimizare în formulare deterministă pentru problemele din categoria 1 (optimizare la nivelul elementelor de construcție, cum este și cazul grinzii din figura 1). În ultimul deceniu s-au efectuat studii de optimizare deterministă și semi-probabilistică pentru categoriile 2 și 3 (dar numai asupra unor tipuri particulare de structuri cum sînt, de exemplu, structurile reticulate). Literatura privind optimizarea topologiei structurilor (optimizarea globală) este în prezent deosebit de săracă în exemple chiar în formulare deterministă.

Abordarea probabilistică (aproximativă sau riguroasă) a problemei de optimizare la nivelul oricăreia dintre cele patru categorii ale ierarhizării menționate, reprezintă un element de noutate, care are în prezent puține precedente pe plan mondial.

2.3. PROBLEME SPECIFICE PROCESULUI OPTIMIZĂRII

În orice optimizare, indiferent de treapta pe care se situează din punct de vedere al abordării (vezi § 2.2.2) și de categoria în care se încadrează din punct de vedere al complexității problemei (vezi § 2.2.3), proiectantul se confruntă cu următoarele tipuri de probleme :

— definirea criteriului pe baza căruia se face optimizarea (definirea funcției-obiectiv) ;
— formularea optimizării în termeni matematici (definirea variabilelor și a condițiilor restrictive) ;
— alegerea unei metode de rezolvare cît mai eficiente ;
— verificarea dacă soluția optimă rezultată din calcul corespunde din toate punctele de vedere unei soluții optime realiste.

În tratarea unora dintre aceste probleme proiectantul recurge la aproximații.

2.3.1. Funcția-obiectiv

Alegerea criteriului pe baza căruia se face optimizarea este o decizie de importanță deosebită în procesul proiectării.

Funcția-obiectiv trebuie să reflecte sintetic scopul optimizării, care, în general, reprezintă utilizarea cea mai eficientă a resurselor disponibile, în condițiile respectării anumitor restricții de natură constructivă, funcțională etc.

Calculele vor trebui ca în final să pună în evidenţă soluţia care oferă un extremum al funcţiei-obiectiv în condiţiile prescrise pentru structură. În general, costul total probabil şi / sau greutatea construcţiilor reprezintă criterii valabile pentru exprimarea eficienţei soluţiilor. Pot fi şi cazuri speciale în care criteriul ales pentru optimizare să fie impus de însăşi funcţiunea structurii, cum este cazul greutăţii pentru vehiculele aerospaţiale. În domeniul construcţiilor, criteriul de optimizare nefiind, în general, impus de funcţiunea structurii studiate, costul total probabil al structurii, indicator ce exprimă sintetic eficienţa economică a soluţiei propuse, apare drept cel mai indicat criteriu. În consecinţă, acest criteriu trebuie aplicat în toate cazurile în care se poate evalua cu suficientă precizie costul total probabil.

Utilizarea în mod concludent a acestui criteriu în practică este însă dificilă şi uneori chiar imposibilă, deoarece implică introducerea unui număr prea mare de argumente în definirea funcţiei-obiectiv, iar unele dintre acestea complică excesiv abordarea (apar probleme legate de actualizarea costurilor, de lipsa de date pentru evaluarea costului probabil al urmărilor avariilor apărute în structură pe parcursul perioadei de exploatare prevăzute etc.). În aceste condiţii, este vădit că în situaţiile în care cantitatea de material reprezintă elementul determinant în stabilirea costului structurii, criteriul costului total poate fi înlocuit prin criteriul greutăţii totale. În aceste situaţii proiectantului trebuie să-i fie clar că soluţia optimă obţinută prin calcul corespunde unei structuri de greutate minimă şi nu uneia al cărui cost total probabil este minim. De multe ori însă aceste două soluţii sînt foarte apropiate, ele nefiind practic sensibile în raport cu criteriul de optimizare utilizat (acesta este cazul structurilor metalice folosite curent în construcţii).

Un alt criteriu care se utilizează uneori în problemele de optimizare este criteriul structurii de egală rezistenţă. Conform acestui criteriu, denumit în literatura de specialitate criteriul FSD (Fully Stressed Design), se admite că o structură supusă unei situaţii de încărcare este de greutate minimă dacă este de egală rezistenţă, adică dacă toate elementele (secţiunile) structurii ating simultan limita de rezistenţă (exemplu : în toate secţiunile efortul unitar în fibra extremă atinge valoarea admisibilă).

Se poate arăta că pentru o structură static determinată supusă unei scheme de încărcare precizate, soluţia optimă, în sensul realizării greutăţii minime, corespunde structurii de egală rezistenţă. Dacă structura static determinată este supusă la mai multe scheme de încărcare, pentru a se obţine o structură de greutate minimă, este necesar ca criteriul structurii de egală rezistenţă formulat anterior să fie modificat după cum urmează : fiecare element component al unei structuri static determinate de greutate minimă trebuie să-şi atingă limita de rezistenţă pentru cel puţin una din schemele de încărcare la care structura este supusă.

În cazul structurilor static nedeterminate, criteriul structurii de egală rezistenţă nu conduce întotdeauna la o structură de greutate minimă dar, în numeroase cazuri, soluţia rezultată prin aplicarea acestui criteriu nu diferă sensibil faţă de soluţia corespunzătoare structurii de greutate minimă.

2.3.2. Variabile și condiții restrictive

2.3.2.1. În enunțul problemei de optimizare (vezi (1.a—c)) s-a presupus în mod implicit că dimensionarea unei structuri este integral definită atunci cînd se asociază valori nenegative (deci care se află în spațiul de dimensionare SD) celor n variabile de dimensionare $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, care formează componentele vectorului $\{X\}$ (vezi (2)). În consecință, o valoare particulară a vectorului $\{X\}$ definește o soluție.

Condițiile restrictive (1.b) împart spațiul de dimensionare SD în două subspații: subspațiul soluțiilor inadmisibile SI (care nu respectă cel puțin una din condițiile (1.b)) și subspațiul soluțiilor admisibile SA (care respectă toate condițiile (1.b)). O soluție care respectă în afara condițiilor de nenegativitate (1.c), toate condițiile restrictive (1.b) aparține subspațiului SA și se numește soluție admisibilă.

În sfîrșit, soluția admisibilă care constituie un extremum (minim. global sau maxim global) pentru funcția-obiectiv $F_0(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, se numește soluție optimă. Evident, această soluție satisface toate cele trei relații (1.a), (1.b) și (1.c) ale problemei de optimizare.

Ilustrarea grafică a unei probleme de optimizare, în cazul în care $\{X\}$ este un vector bidimensional depinzînd de variabilele x_1 și x_2 este dată în figura 2. S-a admis că atît condițiile restrictive (1.b), cît și funcția de optimizat $F_0(x_i)$, $i = 1, 2$, depind neliniar de variabilele de dimensionare x_1 și x_2. Frontiera care desparte subspațiile SA (soluții admisibile) și SI (soluții inadmisibile) corespunde condițiilor restrictive (1.b) transformate în egalități stricte. Soluția optimă $\{X^{opt}\}$ corespunzînd valorii minime a funcției de optimizat, este reprezentată prin punctul din spațiu

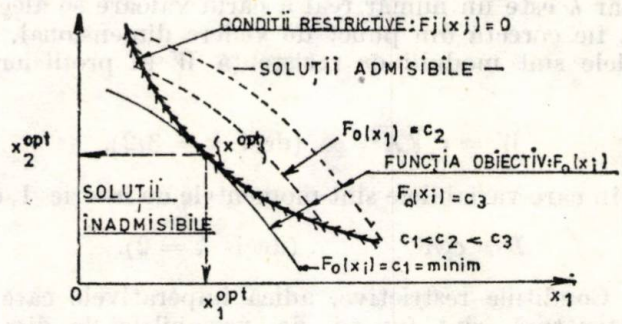


Fig. 2

de dimensionare (mai precis din subspațiul de dimensionare admisibil) ale cărui coordonate sînt x_1^{opt} și x_2^{opt}.

După cum s-a arătat anterior, variabilele unei probleme de optimizare pot fi:

— parametri care exprimă dimensiuni sau alte caracteristici de rigiditate și inerție ale elementelor structurii (exemple: înălțimea și lățimea secțiunilor transversale, arii de armătură, momente de inerție, rigidități etc.);

— parametri care exprimă calitatea materialelor puse în operă (exemple: marca betonului, marca oțelului etc.);

— parametri determinanți ai configurației geometrice a structurii (exemple: înălțimea structurii, poziția nodurilor într-o structură reticulată etc.).

Variabilele de dimensionare pot fi continue sau discrete. Cazul variabilelor discrete creează dificultăți în rezolvarea problemelor de optimizare. Aceste variabile apar, de exemplu, cînd se optimizează structurile utilizînd elemente de construcție normalizate prin standarde de fabricație (exemplu: structurile din profile metalice), sau cînd din condiții constructive se elimină variația continuă a parametrilor geometrici (exemplu: elementele de beton armat a căror dimensiuni trebuie să fie multiplu de 5 cm, 10 cm etc.).

Dacă valorile discrete ale variabilelor sînt în număr suficient și sînt distribuite aproximativ uniform pe intervalul considerat, se poate substitui variației discrete o variație continuă simplificînd astfel problema fără riscul ca prin această aproximație să se introducă erori semnificative. Considerînd, de exemplu, cazul profilelor laminate dublu T se poate presupune că pentru întreaga gamă existentă profilele sînt similare din punct de vedere al formei, diferind numai prin valorile dimensiunilor (mai precis, se admite că profilele sînt omotetice). În această situație, alegînd un parametru ce caracterizează aceste profile, cum este, de exemplu, aria secțiunii transversale A, se pot exprima celelalte caracteristici ale profilelor prin intermediul unei funcții continue de forma:

$$Z = cA^k, \tag{4}$$

în care c este un coeficient a cărui valoare se stabilește astfel încît eroarea rezultată prin aproximarea valorilor discrete cu funcția continuă (4) să fie minimă, iar k este un număr real a cărui valoare se alege astfel încît relația (4) să fie corectă din punct de vedere dimensional. De exemplu, dacă variabilele sînt modulii de rezistență W ai profilelor, funcția (4) are forma

$$W = c_1\sqrt{A^3} \qquad (\text{deci } k = 3/2), \tag{5.a}$$

sau, în cazul în care variabilele sînt momentele de inerție I, se poate scrie

$$I = c_2A^2 \qquad (\text{deci } k = 2). \tag{5.b}$$

2.3.2.2. Condițiile restrictive, adică imperativele care trebuie respectate de structură, sînt funcții de variabilele de dimensionare x_1, $x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. Condițiile restrictive (1.b), adică condițiile

$$F_j(x_j) \left\{ \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} \right\} 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{6}$$

pot fi separate în două categorii:

— condiții restrictive sub formă de inegalități

$$F_j(x_j) \left\{ \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \right\} 0, \qquad k = 1, \ldots, l, \tag{6.a}$$

— condiții restrictive sub formă de egalități

$$F_j(x_j) = 0, \qquad j = l + 1, \ldots, m. \tag{6.b}$$

Condițiile restrictive sub formă de inegalități (6.a), sînt condiții care rezultă din limitarea domeniului de variație al variabilelor de dimensionare. Aceste condiții provin, în principal, din respectarea prescripțiilor de proiectare (condiții de rezistență, de limitare a deformabilității, de asigurare contra pierderii stabilității etc.).

Condițiile restrictive sub formă de egalități (6.b), se referă în general la ecuații care exprimă comportarea structurii studiate sub acțiunea încărcărilor. Astfel, într-o dimensionare optimă în stadiul elastic ecuațiile care exprimă condiția de echilibru static și cele care exprimă condiția de compatibilitate a deformațiilor intră în categoria condițiilor restrictive sub formă de egalități. Utilizînd, de exemplu, metoda deplasărilor se obține următoarea condiție restrictivă :

$$[R]\{\Delta\} - \{P\} = 0, \tag{7}$$

în care

$[R]$ este matricea globală de rigiditate a structurii ;

$\{\Delta\}$ — vectorul deplasărilor (conține deplasările nodurilor precum și deplasările libere și împiedicate din rezemări) ;

$\{P\}$ — vectorul încărcărilor (conține încărcările structurii și reacțiunile din rezemări).

Sistemul de ecuații (7), în care s-a pus în evidență o unificare prin simplificare considerîndu-se și reazemele structurii drept noduri, exprimă echilibrul static al structurii.

Pentru structuri complexe, numărul ecuațiilor rezultate din condiția de egalitate (7) este în general foarte mare. Din acest motiv, problema de optimizare se complică datorită creșterii volumului calculelor numerice și, în consecință, timpul de calcul necesar la calculator pentru găsirea soluției optime, în stadiul elastic, sub un număr obișnuit de ipoteze de încărcare, devine uneori excesiv din punct de vedere al costului implicat. Aceasta este cauza pentru care, în aceste situații, se recurge la aproximări de natură a simplifica procesul optimizării.

Astfel, una dintre aceste aproximări constă în a înlocui procesul global al optimizării unei structuri complexe printr-o serie de optimizări ale elementelor sale componente, verificînd apoi dacă valorile variabilelor de dimensionare rezultate din aceste optimizări conduc la o soluție optimă pentru ansamblul structurii, sau dacă este necesară o modificare a valorilor respective, recurgînd la iterații de tipul analiza structurii-optimizare la nivelul elementelor, pînă la găsirea soluției optime. Aproximarea prin descompunere rezolvă de fapt o optimizare la nivelul unei structuri (categoria 2 în ierarhizarea prezentată în paragraful 2.2.3) cu ajutorul unor optimizări la nivelul elementelor sale componente (categoria 1). Acest tip de aproximare se utilizează pe scară largă în cazul optimizării structurilor aerospațiale de mare complexitate, care se consideră ca fiind constituite din diverse tipuri de substructuri (plăci curbe de rotație, membrane plane flexibile etc.) pentru care există programe de calcul automat care

furnizează într-un timp relativ scurt soluțiile optime reprezentate prin substructurile de greutate minimă.

Trebuie remarcat că optimizarea prin descompunere își pierde caracterul de aproximație (deci este soluție corectă) în cazul structurilor static determinate care au configurația generală invariabilă. Într-adevăr, în această situație starea de eforturi fiind independentă de distribuția materialului, soluția optimă pentru ansamblul structurii este dată de sumarea soluțiilor optime ale elementelor componente.

2.3.3. Metode de optimizare

În literatura de specialitate se indică numeroase metode de optimizare, bazate pe programarea matematică, care se aplică diferențiat în funcție de specificul relațiilor ce definesc funcția-obiectiv (1.a) și condițiile restrictive (1.b).

Prezentarea acestor metode depășește cadrul acestui studiu, dar se consideră totuși util să se prezinte sintetic principalele forme ale programarii matematice care se utilizează în cadrul rezolvării problemelor de optimizare structurală deterministă (vezi tabelul 1)

Tabelul 1

Funcția-obiectiv / Condiții restrictive	liniară	pătratică	alt tip
liniare	programare liniară	programare pătratică	
neliniare	programare neliniară		

În cazul în care problema de optimizare este de tip probabilistic, pentru găsirea soluției se recurge la programarea stochastică.

În cadrul diverselor forme ale programării deterministe (vezi tabelul 1) și stochastice există numeroase metode de optimizare. În unele probleme de optimizare, pentru care există soluții exacte obținute însă prin metode care necesită un volum de calcul pentru care performanțele calculatoarelor disponibile sînt nesatisfăcătoare, se poate recurge la simplificări radicale ale problemei prin utilizarea unor metode de optimizare mai simple. În literatura de specialitate sînt date unele exemple de simplificare a metodelor de optimizare (de exemplu aproximarea unei probleme de programare neliniară printr-una de programare liniară) fără ca soluția optimă obținută prin această simplificare să difere în mod sensibil de soluția optimă exactă.

Alegerea metodei de optimizare depinde nu numai de performanțele calculatorului disponibil ci și de tipul particular al problemei de optimizare tratate. Într-adevăr, numeroase experiențe numerice au arătat că în timp ce utilizarea unei metode se poate dovedi eficientă pentru un tip de problemă de optimizare, utilizarea aceleiași metode pentru un alt

tip de problemă de optimizare poate fi total ineficientă. În consecinţă, concluziile privind eficienţa unei metode pentru un tip de problemă de optimizare pot fi rar extinse pentru alte tipuri de probleme.

Se menţionează de asemenea că în procesul obţinerii unei soluţii optimale cît mai apropiate de cea reală, rolul principal îi revine formulării problemei (alegerea funcţiei-obiectiv, a variabilelor şi a condiţiilor restrictive, vezi (1.a—c)), iar alegerea metodei de optimizare,depinzînd de modul în care este formulată problema, are un rol secundar. De aceea, în problemele de dimensionare optimă, ca de altfel în orice problemă de calculul structurilor, proiectantului trebuie să-i fie clar că metodele matematice la care recurge nu constituie un scop în sine ci reprezintă doar un instrument pentru a soluţiona problema formulată.

2.3.4. Optimizare prin dimensionare interactivă

O altă posibilitate de a aborda problema găsirii soluţiei optime este de a recurge la un procedeu de dimensionare interactivă proiectant-calculator electronic. În loc de a încerca să se scrie integral toate condiţiile restrictive care intervin în formularea problemei de optimizare, ceea ce în cazul structurilor complexe îngreuiază, uneori excesiv, formularea, în dimensionarea interactivă se împarte problema globală de optimizare în programe mai simple şi mai concise. Aceste programe pot fi manipulate cu uşurinţă de proiectant, în scopul orientării optimizării pentru găsirea rapidă a soluţiei optime.

În orice moment proiectantul este asistat de calculator, în sensul unui regim conversaţional în care proiectantul poate aduce modificări ale datelor şi automat calculatorul modifică soluţia în consecinţă. Un asemenea procedeu nu este rentabil decît dacă regimul conversaţional proiectant-calculator se desfăşoară în timp real, adică dacă atît timpul necesar proiectantului pentru a comunica cu calculatorul (timpul consumat pentru examinarea rezultatelor unui program şi introducerea datelor pentru programul următor), cît şi timpul necesar calculatorului pentru efectuarea calculelor este suficient de redus. Limbajele utilizate în dimensionarea interactivă trebuie să fie înainte de toate limbaje de transmitere a datelor şi de obţinere a rezultatelor, alegerea metodei de calcul fiind efectuată, în general, de calculatorul electronic. Ca o consecinţă, dimensionarea interactivă a structurilor complexe nu poate fi efectuată decît dacă se dispune de sisteme integrate de programe evoluate (se menţionează în acest sens, ca exemple, sistemele bine cunoscute ICES-STRUDL, GENESYS, SYSFAP ca şi sistemul modular SIAS din ţara noastră).

2.3.5. Verificarea soluţiei

Soluţia optimă rezultată din calcul reprezintă numai o indicaţie, în mod cert foarte utilă, pentru proiectant, care trebuie să verifice dacă această soluţie corespunde din toate punctele de vedere unei soluţii

optime realiste. În acest proces, de verificare a validității soluției rezultate din calcul, pot apare diverse situații, după cum urmează :

— În unele cazuri particulare în care curbele care reprezintă funcția-obiectiv (1.a) și condițiile restrictive (1.b) sînt caracterizate prin aceeași ecuație într-o anumită regiune a spațiului de dimensionare admisibil (deci în această regiune curbele se suprapun), soluția optimă poate să nu fie unică. O astfel de situație este exemplificată în figura 3a, unde este reprezentată o problemă de optimizare în care atît funcția-obiectiv, cît și condițiile restrictive sînt liniare în raport cu variabilele de dimensionare x_1 și x_2, (cum este cazul structurilor metalice optimizate determinist

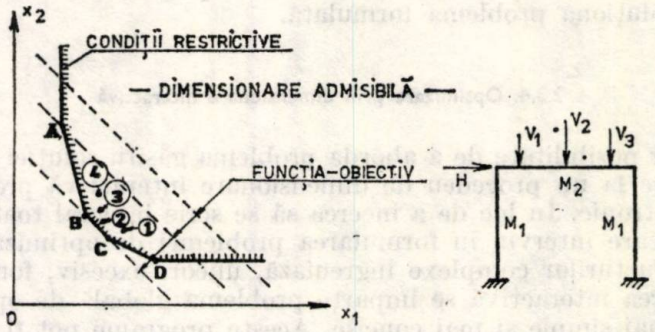


Fig. 3a și 3b

pe baza criteriului cedării plastice), iar dreptele care le reprezintă se suprapun pe segmentul BC. Într-adevăr, în acest caz particular, toate punctele care formează segmentul BC reprezintă soluții optime. Pe baza indicațiilor furnizate de calcul (care sînt reprezentate prin infinitatea de soluții cuprinse în segmentul BC), proiectantul trebuie ca în final să aleagă o soluție optimă dintr-o gamă discretă de profile laminate. Într-o astfel de situație este firesc ca acesta să aleagă două profile ale căror caracteristici x_1 și, respectiv, x_2 (de exemplu $x_1 = M_1$ și $x_2 = M_2$, în care M_1 și M_2 sînt momentele plastice care caracterizează cele două profile, vezi cadrul din figura 3b) să conducă la punctul din subspațiul de dimensionare admisibil care este cel mai apropiat de segmentul BC, obținîndu-se în acest mod o valoare minimă a funcției-obiectiv. Astfel, între cele patru soluții posibile notate în figura 3*a* prin ①, ②, ③, ④, proiectantul va alege, evident, soluția ② deoarece acesteia îi corespunde valoarea minimă a funcției-obiectiv.

— O situație care apare uneori în cazurile de optimizare ale structurilor care se pot distruge prin pierderea stabilității, structuri, care în general sînt sensibile la imperfecțiuni structurale și/sau geometrice, este faptul că soluția optimă rezultată din calcul poate conduce la instabilitatea structurii care reprezintă această soluție. Într-adevăr, după cum se cunoaște, în cazul soluției optime indicate de calcul mai multe moduri de distrugere ale structurii devin posibile (unele fiind egal sau aproximativ egal probabile), deoarece mai multe condiții restrictive sînt active la optimum (unele din inegalitățile (1.b) devin egalități). În plus, între modurile de distrugere care sînt active la optimum, pot exista corelații slabe sau

chiar independenţe probabilistice care antrenează în final o mărire a pericolului pierderii stabilităţii structurale. În concluzie, pentru structurile sensibile la imperfecţiuni, la care există pericolul pierderii stabilităţii, soluţia optimă rezultată din calcul trebuie să fie analizată în mod critic de proiectant şi eventual modificată în consecinţă.

— Se întîlnesc uneori situaţii în care procesul optimizării să conducă la identificarea unei soluţii optime eronate, în sensul că soluţia optimă rezultată din calcul constituie un optim relativ (minim local sau maxim local) diferită de soluţia optimă reală (minim global sau maxim global). Aceste situaţii pot apare în cazul în care subspaţiul soluţiilor admisibile constituie un domeniu a cărui frontieră, reprezentată de condiţiile restrictive (1.b), nu este convexă (domeniu neconvex). În situaţia unui domeniu admisibil neconvex, adică un domeniu pentru care există perechi de puncte din interiorul său care pot fi unite printr-o dreaptă care să nu rămînă în întregime în interiorul acestui domeniu (fig. 4), cea mai mare parte dintre metodele de optimizare utilizate în prezent nu pot garanta obţinerea directă a soluţiei optime reale deoarece nu pot distinge între un optim local şi optimul global. Metoda cea mai curent folosită pentru a înlătura această situaţie de ambiguitate, constă în a reîncepe procesul optimizării considerînd succesiv cîteva puncte de plecare iniţiale cu poziţii diferite în domeniul soluţiilor admisibile şi de a controla dacă toate traseele care pleacă din aceste puncte pe direcţii admisibile converg spre un acelaşi punct de optim.

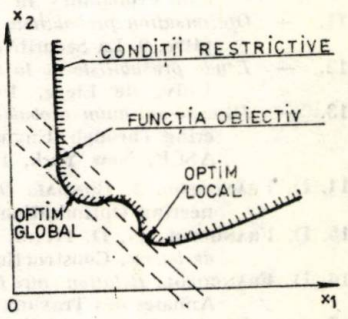


Fig. 4

Din cele cîteva situaţii expuse în acest paragraf, situaţii care pot apare în etapa verificării soluţiei optime obţinute prin calcul, rezultă rolul proiectantului în această ultimă etapă a procesului de optimizare. Acesta trebuie să aibă o bună pregătire privind metodele de optimizare ale structurilor pentru a putea înţelege programul de calcul corespunzător metodei alese, eventual aducîndu-i şi anumite modificări locale cînd apare necesar. Capacitatea proiectantului de a formula cît mai realist o problemă de optimizare şi de a verifica soluţia optimă rezultată din calcul aducîndu-i, cînd este necesar, amendările care se impun influenţează în mod hotărîtor valoarea soluţiei optime finale.

Primită la redacţie la 22 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. A.H-S. Ang, M. Amin, *Reliability of structures and structural systems*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, **94**, *EM2* (1968).
2. A.H-S. Ang, C. A. Cornell, *Reliability bases of structural safety and design*, J. Struct. Div., ASCE , **100**, *ST9* (1974).
3. M. Z. Cohn, S. R. Parimi, S. K. Ghosh, *On the uniqueness of plastic optimal design*, S.M Div., Report No. 75, Univ. of Waterloo, 1971.

4. M. Z. COHN, S. R. PARIMI, *Multi-criteria probabilistic design of reinforced concrete structures*, S. M. Study, No. 8, Paper 19, University of Waterloo, 1972.
5. M. Z. COHN, *Optimisation des structures en béton et optimisation en construction*, Séminaire sur les méthodes d'optimisation dans les constructions, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 1973.
6. C. A. CORNELL, *Bounds on reliability of structural systems*, J. Struct. Div., ASCE, **93**, *St 1* (1967).
7. R. L. FOX, *Optimization methods for engineering design*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.
8. D. FRANGOPOL, *Statistical properties of the structural reliability in the elastic and elasto-plastic range*, Rev. roum. Sci. Tech. Méc. Appl., **19**, *5*, (1974).
9. — *Modele probabilistice de analiză a siguranței construcțiilor*, Rev. Construcții, *3*, (1975).
10. — *Structural systems reliability analysis*, Proc. 2nd Int. Conf. on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, ICASP, Aachen, 1975.
11. — *Optimisation probabiliste des structures métalliques soumises a des forces axiales*, Chapitre, 9, La Sécurité des Constructions, Editions Eyrolles, Paris, 1976.
12. — *Etude probabiliste de la sécurité des constructions*, Thèse de Docteur en Sci. Appl., Univ. de Liège, 1976.
13. — *Discrete-optimum probability solution of plastic structures*, Advances in Civil Engineering Through Engineering Mechanics, Session T4C: Structural Optimization, ASCE, New York, 1977.
14. D. FRANGOPOL, J. RONDAL, *Optimum probability-based design of plastic structures*, Engineering Optimisation, 3, Liverpool (1977).
15. D. FRANGOPOL, N. D. HUNG, *Calcul plastique probabiliste des structures en acier formées de barres*, Construction Métalique, *1*, (1977).
16. D. FRANGOPOL, *Rélation entre la sécurité d'une séc d'une séction et la sécurité d'ensemble*, Annales des Travaux Publics de Belgique, *3* (1977).
17. — *Considerații asupra dimensionării probabiliste optime a construcțiilor*, Rev. Construcții, *2*, (1977).
18. — *Dimensionarea structurilor în domeniul plastic ca problemă de optimizare probabilistă*, Rev. Construcții, *3*, (1977).
19. — *Determinarea pe baze probabilistice a relației dintre siguranța unei structuri și cea a elementelor care o alcătuiesc. — Structuri cu comportare în lanț*, Rev. Construcții, *3*, (1978).
20. D. FRANGOPOL, N. D. HUNG, J. RONDAL, *Reliability analysis and optimum probability-based design of plastic structures*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques, **XXVI**, *5* (1978).
21. D. FRANGOPOL, J. RONDAL, *Le dimensionnement probabiliste optimal des structures*, Annales de l'ITBTP, Serie: Théories et Méthodes de Calcul, *363*, Juillet—Août (1978).
22. R. H. GALLAGHER, *Fully stressed design*, Chapter 3, Optimum Structural Design, Theory and Applications (edited by R. H. GALLAGHER and O. C. ZIENKIEWICZ), John Wiley and Sons, 1973.
23. R. A. GELLATLY, D. M. DUPREE, *Examples of computer-aided optimal design of structures*, 10th Congress IABSE, Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976.
24. D. GEORGESCU, D. FRANGOPOL, *Analiza siguranței structurilor metalice*, Vol. I, Inst. de Construcții București, 1978.
25. D. GHIOCEL, D. FRANGOPOL, *Evaluating the probability of a plastic collapse failure*, Part I and Part II, Bul. Șt. Inst. de Construcții, București, *3* și *4* (1973).
26. H. H. HILTON, M. FEIGEN, *Minimum weight analysis based on structural reliability*, J. Aero. Sci., **27**, *9* (1960).
27. N. C. LIND, A. G. DAVENPORT, *Towards practical application of structural reliability theory*, Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings, ACI. Publication SP—31 (1972).
28. C. MASSONNET, J. RONDAL,, *Dimensionnement optimal des structures*, Université de Liège 1975.
29. S. T. MAU, *Optimum design of structures with a minimum expected cost criterion*, Cornell, Univ., Depart. Civ. Eng., Report *340* (1971).
30. F. MOSES, D. E. KINSER, *Optimum structural design with failure probability constraints* AIAA J., *5* (1967).
31. F. MOSES, *Approaches to structural reliability and optimization*, An Introduction to Structural Optimization (edited by M. Z. COHN) S. M. Study No. 1, Univ. of Waterloo Press, 1969.

32. F. Moses, J. D. Stevenson, *Reliability-based structural design*, J. Struct. Div., ASCE, **96**, ST *2* (1970).
33. F. Moses, *Design for reliability. — Concepts and Applications*, Chapter 13, Optimum Structural Design, Theory and Applications (edited by R. H. GALLAGHER and O. C. ZIENKIEWICZ), John Wiley and Sons, 1973.
34. — *Reliability of structural systems*, J. Struct. Div., ASCE, **100**, ST *9* (1974).
35. — *System and geometrical optimization for linear and non-linear structural behaviour*, 10 th Congres IABSE, Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976.
36. S. R. Parimi, M. Z. Cohn, *Optimal solutions in probabilistic structural design, Part II: Applications*, Journal de Méc. Appl., **2**, *1* (1978).
37. W. Prager, *Optimality criteria in structural design*, AGARD, R—589 (1971).
38. E. Rosenblueth, E. Mendoza, *Reliabilty optimization in isostatic structures*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, **97**, EM *6* (1971).
39. E. Rosenblueth, L. Esteva, *Reliability basis for some mexican codes*, Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings, ACI Publication SP—*31* (1972).
40. E. Rosenblueth, *Code specifications for safety and serviceability*, ASCE — IABSE Int. Conf. on Planning and Design of Tall Buildings, Tech. Committee 10, Lehigh Univ., 1972.
41. H. Sandi, *Perspective în evaluarea siguranței și asigurarea structurilor*, A V-a Conf. de Betoane, Vol. I, Timișoara, 1972.
42. L. A. Schmit, *Structural design by systematic synthesis*, Proc. 2nd Conf. on Electronic Computation, ASCE, 1960.
43. J. D. Stevenson, *Reliability analysis and optimum design of structural systems with applications to rigid frames*, S.M., Report No. 14, Case Western Reserve Univ., 1967.
44. J. D. Stevenson, F. Moses, *Realibility analysis of frame structures*, J. Struct. Div., ASCE, **96**, ST *11* (1970).
45. H. Switzky, *Minimum weight design with structural reliability*, Proc. AIAA/ASME 5 th Struct. and Materials Conf., 1964.
46. A. B. Templeman, *Optimization concepts and techniques in structural design*, 10th Congress IABSE, Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976.
47. E. H. Vanmarcke, J. Diaz-Padilla, D. A. Roth, *Realibility — based optimum design of simple plastic frames*, MIT, Depart. Civil Eng., R 72—46, Massachusetts, 1972.
48. E. H. Vanmarke, *Matrix formulation of reliability analysis and reliability-based design*, Computers and Structures, **3**, *4* (1973).

PRETENSIONAREA TENDOANELOR REZERVOARELOR SFERICE. I

de ALECSANDRU PAVEL

Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Se expune rezolvarea originală a problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice şi, deci, a determinării saricinii de pretensionare care să asigure conlucrarea spaţială a sistemului de rezemare al rezervoarelor date. Rezolvarea respectivă priveşte cazul general cînd nu se fac diferenţieri din punctul de vedere al schemelor de solicitare a tendoanelor, admiţîndu-se că efortul unitar normal rezultant maxim din tija acestora, corespunzător condiţiilor de solicitare la întindere sau la compresiune concordante cu cele de exploatare, este cunoscut.

Rezervoarele sferice de mare capacitate pentru gaze lichefiate tehnice (GPL, butan-butilenă, propan-propilenă, etilenă etc.), de concepţie şi construcţie românească (fig. 1), sînt rezemate pe picioare (tubulare) multiple (8...12 buc.) verticale sudate la mantaua sferică într-o zonă imediat subecuatorială, rezemarea respectivă fiind, deci, de tip discret (discontinuu). Pentru a asigura conlucrarea spaţială a tuturor picioarelor acestui sistem de rezemare şi, implicit, a construcţiei metalice în întregul ei ansamblu sub acţiunea sarcinilor orizontale (eoliene, seismice etc.), picioarele respective se solidarizează între ele prin intermediul unor perechi de contravîntuiri flexibile opuse şi simetrice, care trebuie să fie *pretensionate* (acordate) în mod corespunzător (fie la montare, fie după anumite încercări, intervenţii sau incidente de exploatare), numite *tendoane* sau tiranţi.

În studiul de faţă se rezolvă problema determinării efortului unitar normal (axial) corespunzător solicitării *mecanice* — cu efect preponderent de întindere — a tijei tendoanelor în condiţiile *pretensionării* şi, deci, a determinării sarcinii de pretensionare respective care să asigure conlucrarea spaţială a sistemului de rezemare dat. Problema enunţată se investighează şi se soluţionează distinct în următoarele trei alternative (fig. 2):

1) în *cazul general* cînd nu se fac diferenţieri din punctul de vedere al modurilor (schemelor) de solicitare a tendoanelor, presupunîndu-se că efortul unitar normal (axial) rezultant maxim σ_{max} din tija tendonului, corespunzător condiţiilor de solicitare (la întindere sau la compresiune) concordante cu condiţiile de exploatare, este cunoscut;

2) în *cazul specific* cînd se fac diferenţieri din punctul de vedere al modurilor (schemelor) de solicitare a tendoanelor, neglijîndu-se însă solicitare termică (respectiv, efectul termic $\sigma_T = 0$) şi presupunîndu-se deci că $\sigma_{max} = \pm \sigma_M$ (vezi ipotezele 2 şi 3 în fig. 2);

3) în *cazul specific* cînd de asemenea se fac diferențieri din punctul de vedere al modurilor (schemelor) de solicitare a tendoanelor, dar nu se mai neglijează solicitarea termică (respectiv, efectul termic $\sigma_T \neq 0$), presupunîndu-se deci că $\sigma_{max} = \pm \sigma_M \mp \sigma_T$ (vezi ipotezele 4—7 în fig. 2).

Evident, indiferent de alternativa studiată, pretensionarea tendoanelor, care se execută în starea pe care o indică proiectantul rezervorului

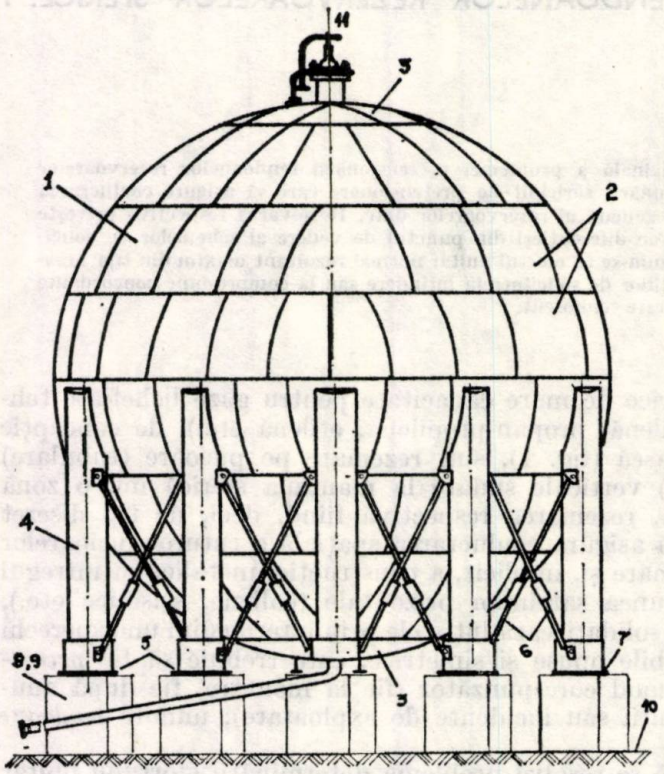


Fig. 1. — Rezervorul sferic românesc de 1 000 m³ pentru gaze petroliere lichefiate. Variantă
1 — mantaua sferică ; 2 — zonele mantalei sferice ; 3 — calotele mantalei sferice ; 4 — stîlpii metalici tubulari (picioarele) de susținere ; 5 — plăcile de rezemare pe fundații (tălpile picioarelor) ; 6 — dispozitivele întinzătoare (tendoanele, tiranții) ; 7 — șuruburile de fundație ; 8 — stîlpii de fundație din beton armat ; 9 — inelul fundației ; 10 — platforma betonată la cota terenului natural sau nivelat ; 11 — punctul cel mai înalt al construcției metalice al rezervorului.

sferic (cu rezervorul respectiv gol sau cu acesta aflat în încercarea de presiune hidraulică la rece), se va finaliza astfel, încît să fie îndeplinite simultan următoarele două *condiții fundamentale* (vezi ipoteza 1 în fig. 2) :

$$x = \sigma_{PT} \leqslant \frac{\sigma_c}{c_c} = a\sigma_c < \sigma_c, \tag{1}$$

$$x = \sigma_{PT} > 0. \tag{2}$$

În prima parte (I) a lucrării de față se expune rezolvarea problemei enunțate anterior în *cazul general*, pentru care $y = \pm \sigma_{max} \neq 0$ (vezi ipotezele 2 și 3 în fig. 2). În acest caz, *condițiile evidente de pretensionare și de funcționare pretensionată sub sarcină*, corespunzătoare tendoanelor rezervoarelor sferice, sînt următoarele :

$$x - y = \sigma_{PT} - \sigma_{max} > 0, \tag{3}$$

$$x + y = \sigma_{PT} + \sigma_{max} < K = \sigma_c, \tag{4}$$

NR. CRT.		IPOTEZA: PRETENSIONAREA	IPOTEZA: SOLICITAREA MECANICĂ CU EFECT DE: ÎNTINDERE	IPOTEZA: SOLICITAREA MECANICĂ CU EFECT DE: COMPRESIUNE	IPOTEZA: SOLICITAREA MECANICĂ CU EFECT DE: TRACȚIUNE	IPOTEZA: SOLICITAREA TERMICĂ CU EFECT DE: RELAXARE	CONDIȚIILE DE SOLICITARE	SCHEMA DE SOLICITARE
1	a	DA	NU	NU	NU	NU	$x = \sigma_{PT} = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x = \sigma_{PT} > 0$	
2	a	DA	DA	NU	NU	NU	$x + y = \sigma_{PT} + \sigma_M = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x + y = \sigma_{PT} + \sigma_M > 0$	
3	a	DA	NU	DA	NU	NU	$x - y = \sigma_{PT} - \sigma_M = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x - y = \sigma_{PT} - \sigma_M > 0$	
4	a	DA	DA	NU	DA	NU	$x + y + z = \sigma_{PT} + \sigma_M + \sigma_T = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x + y + z = \sigma_{PT} + \sigma_M + \sigma_T > 0$	
5	a	DA	DA	NU	NU	DA	$x + y - z = \sigma_{PT} + \sigma_M - \sigma_T = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x + y - z - \sigma_{PT} + \sigma_M - \sigma_T > 0$	
6	a	DA	NU	DA	DA	NU	$x - y + z = \sigma_{PT} - \sigma_M + \sigma_T = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x - y + z = \sigma_{PT} - \sigma_M + \sigma_T > 0$	
7	a	DA	NU	DA	NU	DA	$x - y - z = \sigma_{PT} - \sigma_M - \sigma_T = \sigma_C \,/\, c_C < \sigma_{0,2}$	
	b						$x - y - z = \sigma_{PT} - \sigma_M - \sigma_T > 0$	

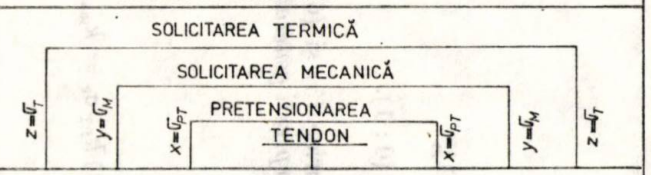


Fig. 2. — Schemele și ipotezele de solicitare corespunzătoare tendoanelor rezervoarelor sferice.

ele putîndu-se formula de asemenea astfel :

$$\sigma_{PT} - \sigma_{\max} = \frac{1}{b}\,\sigma_{PT} = m\,\sigma_{PT}, \tag{5}$$

$$\sigma_{PT} + \sigma_{\max} = a\,\sigma_c = \frac{1}{c_c}\,\sigma_c, \tag{6}$$

în care

$$m = 1 - \sigma_{\max}\,\sigma_{PT}^{-1} = b^{-1} \in (0\,;\,1), \tag{7}$$

$$a = (\sigma_{PT} + \sigma_{\max})\,\sigma_c^{-1} = c_c^{-1} \in (0\,;\,1). \tag{8}$$

Rezolvînd sistemul celor două ecuații algebrice (5) și (6) cu două necunoscute (σ_{PT} și $\sigma_{\max}$), se obțin următoarele *expresii generale:*

$$\sigma_{PT} = \frac{ab}{2b-1}\,\sigma_c = \frac{1}{(2-m)c_c}\,\sigma_c = k_{PT}\,\sigma_c, \tag{9}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{a(b-1)}{2b-1}\,\sigma_c = \frac{1-m}{(2-m)c_c}\,\sigma_c = (1-m)\,k_{PT}\,\sigma_c = k_{\max}\,\sigma_c, \tag{10}$$

în care

$$k_{PT} = \frac{ab}{2b-1} = \frac{1}{(2-m)\,c_c}, \tag{11}$$

$$k_{\max} = \frac{a(b-1)}{2b-1} = \frac{1-m}{(2-m)\,c_c} = (1-m)\,k_{PT}, \tag{12}$$

unde

$$1 - m = 1 - b^{-1} = \frac{k_{\max}}{k_{PT}} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{PT}} = C_{PT}. \tag{13}$$

Pentru *situația particulară* cînd :

a) $m = b^{-1} = 0{,}00$, rezultă

$$k_{PT} = 0{,}5\,a = \frac{1}{2c_c} = k_{\max},$$

$$C_{PT} = 1{,}00,$$

respectiv,

$$\sigma_{PT} = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_c}{2\varepsilon_e} = 0{,}5\,\frac{\sigma_c}{\varepsilon_c} < 0{,}5\,\sigma_c,$$

ceea ce înseamnă că, în condiții de solicitare, tendoanele rezervorului sferic, inițial pretensionate, *își pierd pretensionarea* indiferent de valoarea coeficientului de siguranță $c_c > 1{,}00$;

b) $a = c_c^{-1} = 1{,}00$, rezultă

$$k_{PT} = \frac{b}{2b-1} = \frac{1}{2-m},$$

$$k_{\max} = \frac{b-1}{2b-1} = \frac{1-m}{2-m},$$

$$C_{PT} = 1 - m = 1 - b^{-1},$$

respectiv,

$$\sigma_{PT} = \frac{b}{2b-1}\,\sigma_c = \frac{1}{2-m}\,\sigma_c,$$

$$\sigma_{\max} = \frac{b-1}{2b-1}\,\sigma_c = \frac{1-m}{2-m}\,\sigma_c,$$

ceea ce înseamnă că, în condiții de solicitare, în tendoanele pretensionate ale rezervorului sferic se dezvoltă eforturi unitare normale $\sigma_{\max}$ care *ating limita tehnică de curgere* σ_c a materialului de bază al acestora indiferent de valoarea coeficientului $m = b^{-1} \neq 0{,}00$ al condițiilor de lucru;

c) $m = b^{-1} > 0{,}00$, rezultă

$$k_{PT} > 0{,}5\,a = \frac{1}{2c_c},$$

$$k_{\max} < k_{PT},$$

$$C_{PT} < 1{,}0,$$

respectiv,

$$\sigma_{\max} < \sigma_{PT},$$

ceea ce înseamnă că, în condiții de solicitare, tendoanele rezervorului sferic *rămîn pretensionate* (adică au o pretensionare reziduală determinată și corespunzătoare) pentru oricare valoare a coeficientului de siguranță $c_c > 1{,}00$;

d) $a = c_c^{-1} < 1{,}00$, rezultă

$$k_{PT} < \frac{b}{2b-1} = \frac{1}{2-m},$$

$$k_{\max} < \frac{b-1}{2b-1} = \frac{1-m}{2-m},$$

$$C_{PT} = 1 - m = 1 - b^{-1},$$

respectiv,

$$\sigma_{PT} < \frac{b}{2b-1}\,\sigma_c = \frac{1}{2-m}\,\sigma_c,$$

$$\sigma_{\max} < \frac{b-1}{2b-1}\,\sigma_c = \frac{1-m}{2-m}\,\sigma_c,$$

ceea ce înseamnă că, în condiții de solicitare, în tendoanele pretensionate ale rezervorului sferic se dezvoltă eforturi unitare normale (axiale) rezultante care *nu ajung la nivelul valoric corespunzător limitei tehnice de curgere* a materialului de bază al acestora pentru oricare valoare a coeficientului $m = b \neq 0{,}00$ al condițiilor de lucru :

e) $m = b^{-1} < 0{,}00$, rezultă

$$k_{PT} > 0{,}5\, a = \frac{1}{2c_c},$$

$$k_{\max} > k_{PT},$$

$$C_{PT} > 1{,}00,$$

respectiv,

$$\sigma_{\max} > \sigma_{PT},$$

ceea ce înseamnă că, în condiții de solicitare, tendoanele rezervorului sferic, inițial pretensionate, *își pierd pretensionarea* indiferent de valoarea coeficientului de siguranță $c_c > 1{,}00$.

Așadar, pentru ca tendoanele inițial pretensionate ale rezervorului sferic *să rămînă pretensionate* (rezidual) și în condițiile solicitărilor pentru care se dezvoltă eforturi unitare normale (axiale) rezultante ce nu ajung la nivelul valoric al unei jumătăți din limita tehnică de curgere a materialului lor de bază, este necesară îndeplinirea simultană a următoarelor două *condiții restrictive:*

$$k_{PT} = \frac{ab}{2b-1} = \frac{1}{(2-m)c_c} < 0{,}5, \tag{14a}$$

$$k_{\max} = \frac{a(b-1)}{2b-1} = \frac{1-m}{(2-m)c_c} < \frac{1-m}{2-m}, \tag{14b}$$

rezultînd imediat că

$$\sigma_{PT} = k_{PT}\sigma_c < 0{,}5\ \sigma_c, \tag{14c}$$

$$\sigma_{\max} = k_{\max}\sigma_c < \frac{b-1}{2b-1}\sigma_c = \frac{1-m}{2-m}\sigma_c, \tag{14d}$$

respectiv

$$k_{PT} < 0{,}5 < \frac{1}{2-m}. \tag{14e}$$

Iată , deci, că tendoanele rezervorului sferic își pot îndeplini funcția, utilizarea lor ca atare fiind *rațională*, numai dacă efortul unitar de pretensionare σ_{PT} corespunzător acestora nu depășește și nici nu atinge 50% din limita tehnică de curgere $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0.2}$ a materialului lor de bază și dacă, concomitent, efortul unitar rezultant $\sigma_{\max}$ îndeplinește condiția respectivă (14d).

Comparînd prin raportare expresiile (9) și (10), concomitent cu considerarea expresiei (13), se obține următoarele *formule finale simple* pentru calculul:

— efortului unitar de pretensionare:

$$\sigma_{PT} = k_{PT}\, k_{\max}^{-1}\, \sigma_{\max} = C_{PT}^{-1}\, \sigma_{\max} = \frac{\sigma_{\max}}{1 - m} = \frac{b}{b-1}\, \sigma_{\max}, \quad [\mathrm{N/mm^2}], \tag{15}$$

— forței de pretensionare:

$$F_{PT} = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_{PT} = 0{,}7854\, d^2\, k_{PT}\, k_{\max}^{-1}\, \sigma_{\max} =$$

$$= 0{,}7854\, d^2\, C_{PT}^{-1}\, \sigma_{\max} = \frac{0{,}7854\, d^2}{1 - m}\, \sigma_{\max} =$$

$$= \frac{0{,}7854\, bd^2}{b-1}\, \sigma_{\max}, \qquad [\mathrm{N, kN}], \tag{16}$$

— forței maxime din tija tendoanelor:

$$F_{\max} = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_{\max} = 0{,}7854\, d^2\, k_{\max}\, k_{PT}^{-1}\, \sigma_{PT} =$$

$$= 0{,}7854\, d^2\, C_{PT}\, \sigma_{PT} = 0{,}7854\, (1 - m)\, d^2\, \sigma_{PT} =$$

$$= \frac{0{,}7854\, (b-1)\, d^2}{b}\, \sigma_{PT}, \qquad [\mathrm{N, kN}], \tag{17}$$

— deformației specifice de pretensionare:

$$\varepsilon_{PT} = \frac{\sigma_{PT}}{E} = 4{,}7619\, \sigma_{PT} = 4{,}7619\, k_{PT}\, k_{\max}^{-1}\, \sigma_{\max} =$$

$$= 4{,}7619\, C_{PT}^{-1}\, \sigma_{\max} = 4{,}7619\, (1 - m)^{-1}\, \sigma_{\max} =$$

$$= \frac{4{,}7619\, b}{b-1}\, \sigma_{\max} = \frac{10\, \sigma_{PT}}{2{,}1}, \qquad [\mu\mathrm{m/m}]. \tag{18}$$

Corelarea coeficienților numerici $c_c = a^{-1}$ și $m = b^{-1}$, pentru cîteva dintre treptele valorice reprezentative ale coeficientului pretensionării $k_{PT} \in [0{,}20\,;\ 0{,}50]$, se realizează în tabelele 1 și 2, în figura 3 exemplificîndu-se grafic dependența corespunzătoare pentru situația singulară și limită cînd $k_{PT} = 0{,}50$. În continuare, dependențele tipice de tipul celei ilustrate grafic în figura 3 se vor numi curbe caracteristice de pretensionare a tendoanelor rezervorului sferic sau, pur și simplu, *caracteristici (sau caracteristica) pretensonării tendoanelor rezervorului sferic.*

Tabelul 1

Coeficientul condițiilor de lucru $m = b^{-1} \in [0{,}00;\ 1{,}00]$

Coeficientul		m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b	m	b
c_c	k_{PT} / a	0,20		0,25		0,30		0,35		0,40		0,45		0,50	
1,00	1,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,00	$+\infty$
1,10	0,91	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,18	5,50
1,20	0,83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,15	6,75	0,33	3,00
1,30	0,77	—	—	—	—	—	—	—	—	0,08	13,00	0,29	3,44	0,46	2,17
1,40	0,71	—	—	—	—	—	—	—	—	0,21	4,67	0,41	2,42	0,57	1,75
1,50	0,67	—	—	—	—	—	—	0,10	10,50	0,33	3,00	0,52	1,93	0,67	1,50
1,60	0,63	—	—	—	—	—	—	0,21	4,67	0,44	2,29	0,61	1,64	0,75	1,33
1,70	0,59	—	—	—	—	0,04	25,50	0,32	3,13	0,53	1,89	0,69	1,44	0,82	1,21
1,80	0,56	—	—	—	—	0,15	6,75	0,41	2,42	0,61	1,64	0,77	1,31	0,89	1,13
1,90	0,53	—	—	—	—	0,25	4,07	0,50	2,02	0,68	1,46	0,83	1,20	0,95	1,06
2,00	0,50	—	—	0,00	$+\infty$	0,33	3,00	0,57	1,75	0,75	1,33	0,89	1,13	1,00	1,00
2,10	0,48	—	—	0,10	10,50	0,41	2,42	0,64	1,56	0,81	1,24	0,94	1,06	—	—
2,20	0,45	—	—	0,18	5,50	0,48	2,06	0,70	1,43	0,86	1,16	0,99	1,01	—	—
2,30	0,43	—	—	0,26	3,83	0,55	1,82	0,76	1,32	0,91	1,10	—	—	—	—
2,40	0,42	—	—	0,33	3,00	0,61	1,64	0,81	1,24	0,96	1,04	—	—	—	—
2,50	0,40	0,00	$+\infty$	0,40	2,50	0,67	1,50	0,86	1,17	1,00	1,00	—	—	—	—

Notă. Expresia de calcul corespunzătoare este următoarea : $m = b^{-1} = 2 - (k_{PT}\ c_c)^{-1}$.

Tabelul 2

Coeficientul global de siguranță $c_c = a^{-1} \in [1{,}00;\ 5{,}00]$

Coeficientul		c_c	a	c_c	a	c_c	a	c_c	a	c_c	a	c_c	a	c_c	a
m	k_{PT} / b	0,20		0,25		0,30		0,35		0,40		0,45		0,50	
0,00	$+\infty$	2,50	0,40	2,00	0,50	1,67	0,60	1,43	0,70	1,25	0,80	1,11	0,90	1,00	1,00
0,10	10,00	2,63	0,38	2,11	0,48	1,75	0,57	1,50	0,67	1,32	0,76	1,17	0,86	1,05	0,95
0,20	5,00	2,78	0,36	2,22	0,45	1,85	0,54	1,59	0,63	1,39	0,72	1,23	0,81	1,11	0,90
0,30	3,33	2,94	0,34	2,35	0,43	1,96	0,51	1,68	0,60	1,47	0,68	1,31	0,77	1,18	0,85
0,40	2,50	3,13	0,32	2,50	0,40	2,08	0,48	1,79	0,56	1,56	0,64	1,39	0,72	1,25	0,80
0,50	2,00	3,33	0,30	2,67	0,38	2,22	0,45	1,90	0,53	1,67	0,60	1,48	0,68	1,33	0,75
0,60	1,67	3,57	0,28	2,86	0,35	2,38	0,42	2,04	0,49	1,79	0,56	1,59	0,63	1,43	0,70
0,70	1,43	3,85	0,26	3,08	0,33	2,56	0,39	2,20	0,46	1,92	0,52	1,71	0,59	1,54	0,65
0,80	1,25	4,17	0,24	3,33	0,30	2,78	0,36	2,38	0,42	2,08	0,48	1,85	0,54	1,67	0,60
0,90	1,11	4,55	0,22	3,64	0,28	3,03	0,33	2,60	0,39	2,27	0,44	2,02	0,50	1,82	0,55
1,00	1,00	5,00	0,20	4,00	0,25	3,33	0,30	2,86	0,35	2,50	0,40	2,22	0,45	2,00	0,50

Notă. Expresia de calcul corespunzătoare este următoarea : $c_c = a^{-1} = k_{PT}^{-1}(2 - m)^{-1}$.

Interpretînd în mod corespunzător dependența limită redată în figura 3, se pun în evidență următoarele *două domenii* distincte:

1) domeniul perechilor de valori $a = c_c^{-1} \in (0,0;\ 1,0)$ și $m = b^{-1} \in \in (0,0;\ 1,0)$, respectiv $c_c = a^{-1} \in (+\infty;\ 1,00)$ și $b = m^{-1} \in (+\infty;\ 1,00)$, care definesc mulțimea punctelor M_1 — aflate sub caracteristica pretensionării limită — corespunzătoare situațiilor în care tendoanele rezervorului sferic își îndeplinesc funcția ca atare, *utilizarea lor fiind rațională*, deoarece

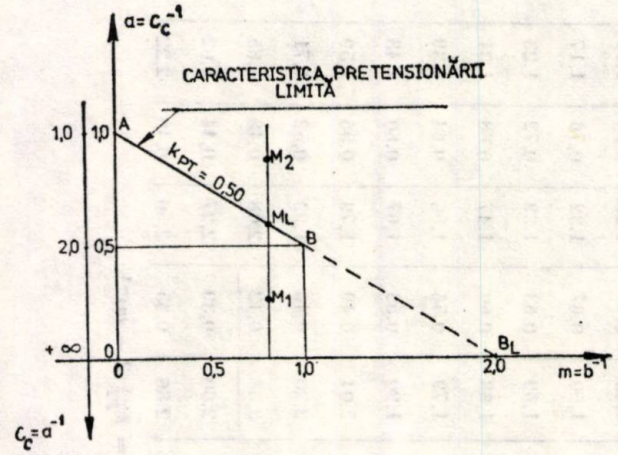


Fig. 3. — Corelarea coeficienților numerici a și m, respectiv c_c și b, pentru situația limită cînd $k_{PT} = 0,5$. Punctele reprezentative ale caracteristicii de pretensionare limită sînt următoarele: A — pentru care $m = 0,0$, deci $b = +\infty$ și $a = 1,0$, deci $c_c = 1,0$; B — pentru care $m = b = 1,0$ și $a = 0,5$, deci $c_c = 2,0$; B_L — pentru care $m = 2$, deci $b = 0,5$ și $a = 0,0$, deci $c_c = +\infty$, în toate punctele M_L, aflate pe dreapta AB_L, tendoanele rezervorului sferic — inițial pretensionate — pierzîndu-și pretensionarea în condiții de solicitare.

sînt satisfăcute concomitent condițiile restrictive (14); evident, acesta este *domeniul pretensionării corecte*, propriu-zise;

2) domeniul perechilor de valori $c_c = a^{-1}$ și $m = b^{-1}$ care definesc mulțimea punctelor M_L — aflate pe caracteristica pretensionării limită, sau M_2 — aflate deasupra caracteristicii pretensionării limită, corespunzătoare situațiilor în care tendoanele rezervorului sferic nu-și mai îndeplinesc funcția ca atare, *utilizarea lor fiind superfluă*, deoarece condițiile restrictive (14) nu pot fi satisfăcute concomitent, neîndeplinirea condiției (14c) de altfel fiind întotdeauna certă; evident, acesta este *domeniul pretensionării incorecte (greșite)* sau al *pretensionării periculoase*, care trebuie evitat.

Nomograma care corelează valoric coeficienții numerici m și c_c, respectiv a și b, pentru intervalul $k_{PT} \in [0,30;\ 0,50]$, este prezentată în figura 4. Din această nomogramă rezultă indubitabil că, dintre toate situațiile posibile, corespunzătoare unei anumite caracteristici de pretensionare (de exemplu celei pentru care $k_{PT} = 0,40$), nu se pot lua în seamă cele definite prin punctele M_L (de exemplu M'_L) și M_2, deoarece pretensionările respective sînt incorecte sau chiar periculoase.

Pentru valorile *extremal admisibile* $m = 0,10$, respectiv $b = m^{-1} = 10,00$ și $c_c = 1,25$, respectiv $a = c_c^{-1} = 0,80$, corespund următorii coeficienți de caracterizare a pretensionării tendoanelor rezervorului sferic (vezi formulele 14, a și b):

$$k_{PT} = \frac{0,80 \cdot 10,00}{2.10,00 - 1} = \frac{1}{(2 - 0,10) \cdot 1,25} = 0,421 < 0,500,$$

$$k_{\max} = \frac{0,80 \cdot (10,00 - 1)}{2.10,00 - 1} = \frac{1 - 0,10}{(2 - 0,10) \cdot 1,25} = 0,379 < 0,421 < \frac{1 - 0,10}{2 - 0,10} = 0,474,$$

pentru care rezultă (vezi formulele 14, *c* și *d*):

$$\sigma_{PT} = 0{,}421\ \sigma_c < 0{,}500\ \sigma_c,$$

$$\sigma_{max} = 0{,}379\ \sigma_c < 0{,}421\ \sigma_c < 0{,}474\ \sigma_c,$$

respectiv (vezi formula 14e),

$$k_{PT} = 0{,}421 < 0{,}500 < \frac{1}{2 - 0{,}10} = 0{,}526,$$

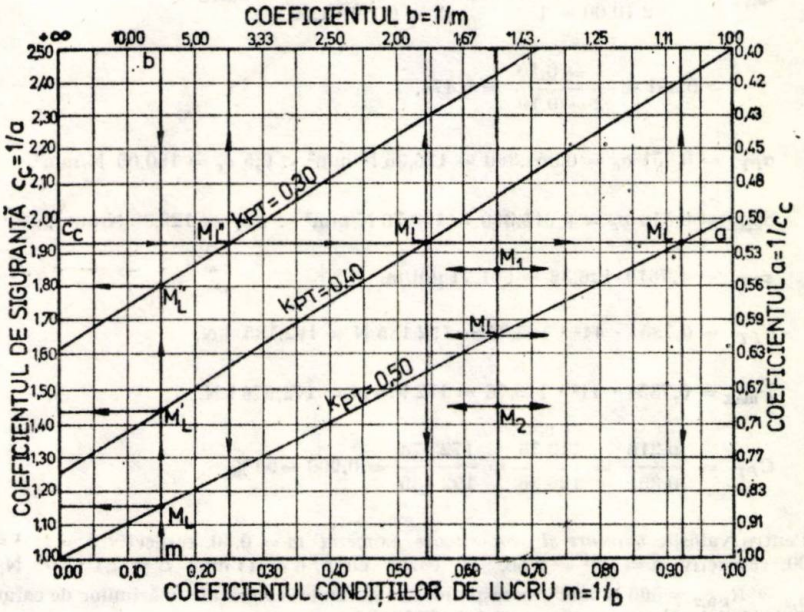


Fig. 4. — Nomograma pentru corelarea coeficienților numerici *m* și c_c, respectiv *a* și *b*, pentru intervalul $k_{PT} \in [0{,}30\ ;\ 0{,}50]$.

în cazul cînd $d = 44$ mm, $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm² și $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360$ N/mm² obținîndu-se (vezi formulele 15 —18):

$$\sigma_{PT} = 0{,}421 \cdot 360 = 151{,}56\ \text{N/mm}^2,$$

$$\sigma_{max} = 0{,}379 \cdot 360 = 136{,}44\ \text{N/mm}^2 < 151{,}56\ \text{N/mm}^2,$$

$$\varepsilon_{PT} = 4{,}7619 \cdot 151{,}56 = 721{,}71\ \mu\text{m/m},$$

$$F_{PT} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 151{,}56 = 230\,452\ \text{N} = 230{,}452\ \text{kN},$$

$$F_{max} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 136{,}44 = 207\,462\ \text{N} = 207{,}462\ \text{kN},$$

deci (vezi formula 13):

$$C_{PT} = \frac{0{,}379}{0{,}421} = \frac{136{,}44}{151{,}56} = \frac{207\,462}{230\,452} = 0{,}900 \rightarrow 90\,\%.$$

Pentru valorile *practice uzuale* $m = 0{,}10$, respectiv $b = m^{-1} = 10{,}00$ și $c_c = 1{,}50$, respectiv $a = c_c^{-1} = 0{,}667$, corespund următoarele valori ale mărimilor de caracterizare a pretensionării tendoanelor rezervorului sferic cu $d = 44$ mm, $E = 2{,}1 \cdot 10^5 \text{N/mm}^2$ și $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360 \text{ N/mm}^2$:

$$k_{PT} = \frac{0{,}667 \cdot 10{,}00}{2.10{,}00 - 1} = \frac{1}{(2 - 0{,}10) \cdot 1{,}50} = 0{,}351 < 0{,}500,$$

$$k_{max} = \frac{0{,}667 \cdot (10{,}00 - 1)}{2.10{,}00 - 1} = \frac{1 - 0{,}10}{(2 - 0{,}10) \cdot 1{,}50} = 0{,}316 <$$

$$< 0{,}351 < \frac{1 - 0{,}10}{2 - 0{,}10} = 0{,}474,$$

$$\sigma_{PT} = 0{,}351\ \sigma_c = 0{,}351.360 = 126{,}36 \text{ N/mm}^2 < 0{,}5\ \sigma_c = 180{,}00 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{max} = 0{,}316\ \sigma_c = 0{,}316.360 = 113{,}76 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{PT} = 126{,}36 \text{ N/mm}^2,$$

$$\varepsilon_{PT} = 4{,}7619 \cdot 126{,}36 = 601{,}71 \text{ μm/m},$$

$$F_{PT} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 126{,}36 = 192\,135 \text{ N} = 192{,}135 \text{ kN},$$

$$F_{max} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 113{,}76 = 172\,976 \text{ N} = 172{,}976 \text{ kN},$$

$$C_{PT} = \frac{0{,}316}{0{,}351} = \frac{113{,}76}{126{,}36} = \frac{172\,976}{192\,135} = 0{,}900 \rightarrow 90\,\%.$$

Pentru valorile *oarecare și acoperitoare exagerat* $m = 0{,}30$, respectiv $b = m^{-1} = 3{,}33$ și $c_c = 2{,}00$, respectiv $a = c_c^{-1} = 0{,}50$, în cazul cînd $d = 44$ mm, $E = 2{,}1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ și $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360 \text{ N/mm}^2$, corespund următoarele valori ale mărimilor de caracterizare a pretensionării tendoanelor rezervorului sferic dat:

$$k_{PT} = \frac{0{,}50 \cdot 3{,}33}{2.3{,}33 - 1} = \frac{1}{(2 - 0{,}30) \cdot 2{,}00} = 0{,}294,$$

$$k_{max} = \frac{0{,}50 \cdot (3{,}33 - 1)}{2.3{,}33 - 1} = \frac{1 - 0{,}30}{(2 - 0{,}30) \cdot 2{,}00} = 0{,}206.$$

$$\sigma_{PT} = 0{,}294 \cdot 360 = 105{,}84 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{max} = 0{,}206 \cdot 360 = 74{,}16 \text{ N/mm}^2,$$

$$\varepsilon_{PT} = 4{,}7619 \cdot 105{,}84 = 504{,}00 \text{ μm/m},$$

$$F_{PT} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 105{,}84 = 160\,933 \text{ N} = 160{,}933 \text{ kN},$$

$$F_{max} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 74{,}16 = 112\,763 \text{ N} = 112{,}763 \text{ kN},$$

$$C_{PT} = \frac{0{,}206}{0{,}294} = \frac{74{,}16}{105{,}84} = \frac{112\,763}{160\,933} = 0{,}700 \rightarrow 70\,\%.$$

Pentru intervalele valorice de interes practic ale coeficienților $c_c = a^{-1}$ și $m = b^{-1}$, în figura 5 se prezintă o nomogramă care facilitează determinarea rapidă a coeficientului pretensionării $k_{PT} < 0{,}500$, iar în tabelul 3 se indică valorile corespunzătoare coeficientului solicitării tendoanelor pretensionate $k_{max} < (1 - m)/(2 - m)$.

Efortul unitar de pretensionare σ_{PT}, corespunzător tendoanelor rezervorului sferic executate din oțeluri cu $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} \in [200\,;\,600]$ N/mm^2,

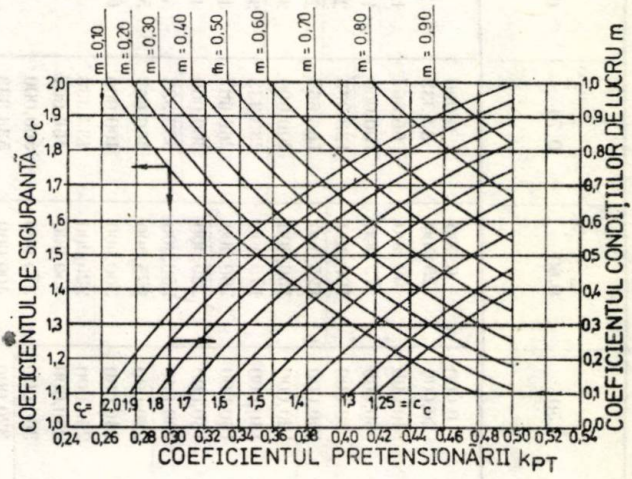


Fig. 5. — Nomograma coeficientului pretensionării $k_{PT} < 0{,}500$.

Tabelul 3

Coeficientul solicitării tendoanelor pretensionate $k_{max} < (1-m)/(2-m)$

$b = m^{-1}$	$a = c_c^{-1}$ / m / c_c	0,80 / 1,25	0,77 / 1,30	0,71 / 1,40	0,67 / 1,50	0,63 / 1,60	0,59 / 1,70	0,56 / 1,80	0,53 / 1,90	0,50 / 2,00
10,00	0,1	0,379	0,364	0,338	0,316	0,296	0,279	0,263	0,249	0,237
5,00	0,2	0,356	0,342	0,317	0,296	0,278	0,261	0,247	0,234	0,222
3,33	0,3	0,329	0,317	0,294	0,275	0,257	0,242	0,229	0,217	0,206
2,50	0,4	—	0,288	0,268	0,250	0,234	0,221	0,208	0,197	0,188
2,00	0,5	—	—	0,238	0,222	0,208	0,196	0,185	0,175	0,167
1,67	0,6	—	—	—	0,190	0,179	0,168	0,159	0,150	0,143
1,43	0,7	—	—	—	—	0,144	0,136	0,128	0,121	0,115
1,25	0,8	—	—	—	—	—	0,098	0,093	0,088	0,083
1,11	0,9	—	—	—	—	—	—	—	0,048	0,045

rezultă direct din nomograma redată în figura 6 pentru $k_{PT} \in [0{,}22\,;\,0{,}50]$. Valorile practice ale aceluiași efort unitar σ_{PT} sînt corelate în tabelul 4 cu cele ale coeficientului $m \in [0{,}10\,;\,0{,}90]$ și efortului unitar $\sigma_{max} \in [0\,;\,300]$ N/mm^2.

Deformația specifică de pretensionare ε_{PT}, corespunzătoare tendoanelor rezervorului sferic în situațiile practice pentru care $m \in [0{,}10\,;\,0{,}90]$ și $\sigma_{max} \in [0\,;\,300]$ N/mm^2, se indică în tabelul 5, iar corelarea evidentă —

Tabelul 4

Efortul unitar de pretensionare σ_{pT}, în N/mm², corespunzător tendoanelor rezervorului sferic

σ_{max}' în N/mm² \ m	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	11,111	12,500	14,286	16,667	20,000	25,000	33,333	50,000	100,000
20	22,222	25,000	28,571	33,333	40,000	50,000	66,667	100,000	200,000
30	33,333	37,500	42,857	50,000	60,000	75,000	100,000	150,000	300,000
40	44,444	50,000	57,143	66,667	80,000	100,000	133,333	200,000	400,000
50	55,556	62,500	71,429	83,333	100,000	125,000	166,667	250,000	500,000
60	66,667	75,000	85,714	100,000	120,000	150,000	200,000	300,000	600,000
70	77,778	87,500	100,000	116,667	140,000	175,000	233,333	350,000	—
80	88,889	100,000	114,286	133,333	160,000	200,000	266,667	400,000	—
90	100,000	112,500	128,571	150,000	180,000	225,000	300,000	450,000	—
100	111,111	125,000	142,857	166,667	200,000	250,000	333,333	500,000	—
110	122,222	137,500	157,143	183,333	220,000	275,000	366,667	550,000	—
120	133,333	150,000	171,429	200,000	240,000	300,000	400,000	600,000	—
130	144,444	162,500	185,714	216,667	260,000	325,000	433,333	—	—
140	155,556	175,000	200,000	233,333	280,000	350,000	466,667	—	—
150	166,667	187,500	214,286	250,000	300,000	375,000	500,000	—	—
160	177,778	200,000	228,571	266,667	320,000	400,000	533,333	—	—
170	188,889	212,500	242,857	283,333	340,000	425,000	566,667	—	—
180	200,000	225,000	257,143	300,000	360,000	450,000	600,000	—	—
190	211,111	237,500	271,429	316,667	380,000	475,000	—	—	—
200	222,222	250,000	285,714	333,333	400,000	500,000	—	—	—
210	233,333	262,500	300,000	350,000	420,000	525,000	—	—	—
220	244,444	275,000	314,286	366,667	440,000	550,000	—	—	—
230	255,556	287,500	328,571	383,333	460,000	575,000	—	—	—
240	266,667	300,000	342,857	400,000	480,000	600,000	—	—	—
250	277,778	312,500	357,143	416,667	500,000	—	—	—	—
260	288,889	325,000	371,429	433,333	520,000	—	—	—	—
270	300,000	337,500	385,714	450,000	540,000	—	—	—	—
280	311,111	350,000	400,000	466,667	560,000	—	—	—	—
290	322,222	362,500	414,286	483,333	580,000	—	—	—	—
300	333,333	375,000	428,571	500,000	600,000	—	—	—	—

Tabelul 5

Deformația specifică de pretensionare ε_{PT}, în μm/m, corespunzătoare tendoanelor rezervorului sferic

σ'_{max} în N/mm² \ m	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
10	52,9	59,5	68,0	79,4	95,2	119,0	158,7	238,1	476,2
20	105,8	119,0	136,1	158,7	190,5	238,1	317,5	476,2	952,4
30	158,7	178,6	204,1	396,8	285,7	357,1	476,2	714,3	1 428,6
40	211,6	238,1	272,1	317,5	381,0	476,2	634,9	952,4	1 904,8
50	264,5	297,6	340,1	396,8	476,2	595,2	793,7	1 190,5	2 381,0
60	317,5	357,1	408,2	476,2	571,4	714,3	952,4	1 428,6	2 857,1
70	370,4	416,7	476,2	555,6	666,7	833,3	1 111,1	1 666,7	—
80	423,3	476,2	544,2	634,9	761,9	952,4	1 269,8	1 904,8	—
90	476,2	535,7	612,2	714,3	857,1	1 071,4	1 428,6	2 142,9	—
100	529,1	595,2	680,3	793,7	952,4	1 190,5	1 587,3	2 381,0	—
110	582,0	654,8	748,3	873,0	1 047,6	1 309,5	1 746,0	2 619,0	—
120	634,9	747,6	816,3	952,4	1 142,9	1 428,6	1 904,8	2 857,1	—
130	687,8	773,8	884,4	1 031,7	1 238,1	1 547,6	2 063,5	—	—
140	740,7	833,3	952,4	1 111,1	1 333,3	1 666,7	2 222,2	—	—
150	793,7	892,9	1 020,4	1 190,5	1 428,6	1 785,7	2 381,0	—	—
160	846,6	952,4	1 088,4	1 269,8	1 523,8	1 904,8	2 539,7	—	—
170	899,5	1 011,9	1 156,5	1 349,2	1 619,0	2 023,8	2 698,4	—	—
180	952,4	1 071,4	1 224,5	1 428,6	1 714,3	2 142,9	2 857,1	—	—
190	1 005,3	1 131,0	1 292,5	1 507,9	1 809,5	2 261,9	—	—	—
200	1 058,2	1 190,5	1 360,5	1 587,3	1 904,8	2 381,0	—	—	—
210	1 111,1	1 250,0	1 428,6	1 666,7	2 000,0	2 500,0	—	—	—
220	1 164,0	1 309,5	1 496,6	1 746,0	2 095,2	2 619,0	—	—	—
230	1 216,9	1 369,0	1 564,6	1 825,4	2 190,5	2 738,1	—	—	—
240	1 269,8	1 428,6	1 632,7	1 904,8	2 285,7	2 857,1	—	—	—
250	1 322,8	1 488,1	1 700,7	1 984,1	2 381,0	—	—	—	—
260	1 375,7	1 547,6	1 768,7	2 063,5	2 476,2	—	—	—	—
270	1 428,6	1 607,1	1 836,7	2 142,9	2 571,4	—	—	—	—
280	1 481,5	1 666,7	1 904,8	2 222,2	2 666,7	—	—	—	—
290	1 534,4	1 726,2	1 972,8	2 301,6	2 761,9	—	—	—	—
300	1 587,3	1 785,7	2 040,8	2 381,0	2 857,1	—	—	—	—

pentru cazul cînd $E = 2{,}1.10^5$ N/mm² — a caracteristicilor de pretensionare $\sigma_{PT} \leqslant 0{,}5\,\sigma_c$ și ε_{PT} se materializează grafic în figura 7.

Forța de pretensionare F_{PT}, corespunzătoare tendoanelor rezervorului sferic caracterizate prin mărimile $\sigma_{PT} \in [0\,;\ 600]$ N/mm² și $d \in [10\,;\ 100]$ mm, are valorile care se indică în tabelul 6.

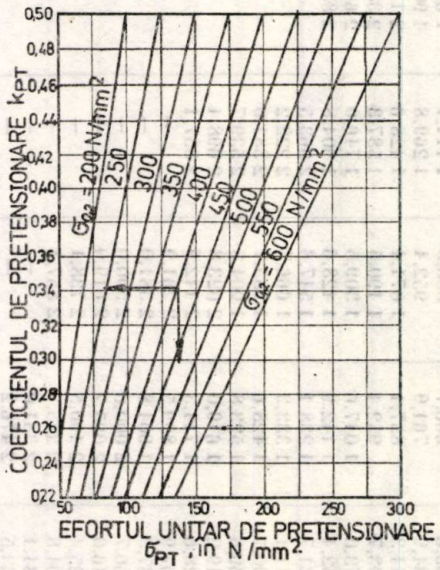


Fig. 6. — Nomograma corelării efortului unitar de pretensionare σ_{PT} cu limita tehnică de curgere a materialului de bază al tijei tendonului și cu coeficientul pretensionării al acestuia.

Prelucrarea matematică și interpretarea grafică corespunzătoare a formulelor generale (15), (16) și (18) a permis construirea nomogramei redate în figura 8, care se va numi *nomograma pretensionării (acordării) tendoanelor rezervorului sferic* și cu ajutorul căreia se pot rezolva *direct și rapid* cel puțin următoarele *probleme practice*:

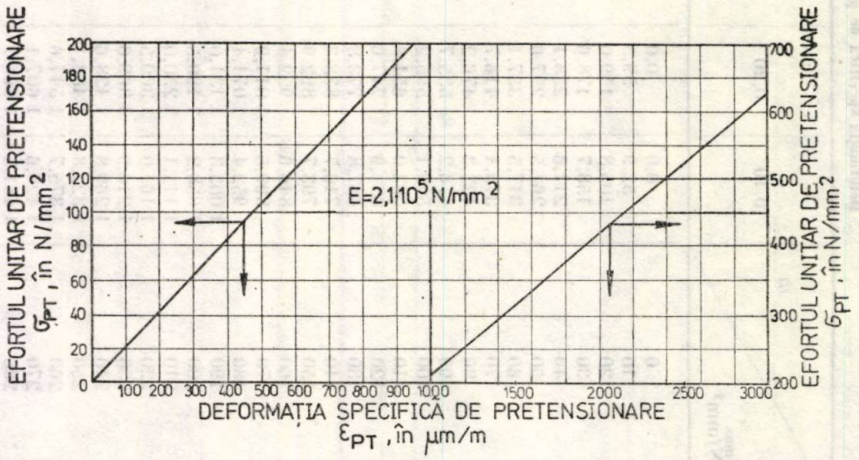


Fig. 7. — Diagrama corelării caracteristicilor de pretensionare σ_{PT} și ε_{PT} pentru cînd $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm².

Tabelul 6

Forța de pretensionare F_{PT}, în kN, corespunzătoare tendoanelor rezervorului sferic

σ_{PT}, în N/mm² \ d, în mm	10	20	30	35	40	45	50	55	60	100
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,785	3,142	7,069	9,621	12,566	15,904	19,635	23,758	28,274	78,540
20	1,571	6,283	14,137	19,242	25,133	31,809	39,270	47,517	56,549	157,080
30	2,356	9,425	21,206	28,863	37,699	47,713	58,905	71,275	84,823	235,619
40	3,142	12,566	28,274	38,485	50,265	63,617	78,540	95,033	113,097	314,159
50	3,927	15,708	35,343	48,106	62,832	79,522	98,175	118,791	141,372	392,699
60	4,712	18,850	42,412	57,727	75,398	95,426	117,810	142,550	169,646	471,239
70	5,498	21,991	49,480	67,348	87,965	111,330	137,445	166,308	197,920	549,779
80	6,283	25,133	56,549	76,969	100,531	127,235	157,080	190,066	226,195	628,319
90	7,069	28,274	63,617	86,590	113,097	143,139	176,715	213,825	254,469	—
100	7,854	31,416	70,686	96,211	125,664	159,043	196,350	237,583	282,743	—
110	8,639	34,558	77,754	105,832	138,230	174,947	215,984	261,341	311,018	—
120	9,425	37,699	84,823	115,454	150,796	190,852	235,619	285,100	339,292	—
130	10,210	40,841	91,892	125,075	163,363	206,756	255,254	308,858	367,566	—
140	10,996	43,982	98,960	134,696	175,929	222,660	274,889	332,616	395,841	—
150	11,781	47,124	106,029	144,317	188,496	238,565	294,524	356,374	424,115	—
160	12,566	50,265	113,097	153,938	201,062	254,469	314,159	380,133	452,389	—
170	13,352	53,407	120,166	163,559	213,628	270,373	333,794	403,891	480,664	—
180	14,137	56,549	127,235	173,180	226,195	286,278	353,429	427,649	508,938	—
190	14,923	59,690	134,303	182,801	238,761	302,182	373,064	451,408	537,212	—
200	15,708	62,832	141,372	192,423	251,327	318,086	392,699	475,166	565,487	—
250	19,635	78,540	176,715	240,528	314,159	397,608	490,874	593,957	706,858	—
300	23,562	94,248	212,058	288,634	376,991	477,129	589,049	712,749	—	—
350	27,489	109,956	247,400	336,739	439,823	556,651	687,223	—	—	—
400	31,416	125,664	282,743	384,845	502,655	636,173	—	—	—	—
450	35,343	141,372	318,086	432,951	565,487	—	—	—	—	—
500	39,270	157,080	353,429	481,056	628,319	—	—	—	—	—
550	43,197	172,788	388,772	529,162	—	—	—	—	—	—
600	47,124	188,496	424,115	577,268	—	—	—	—	—	—

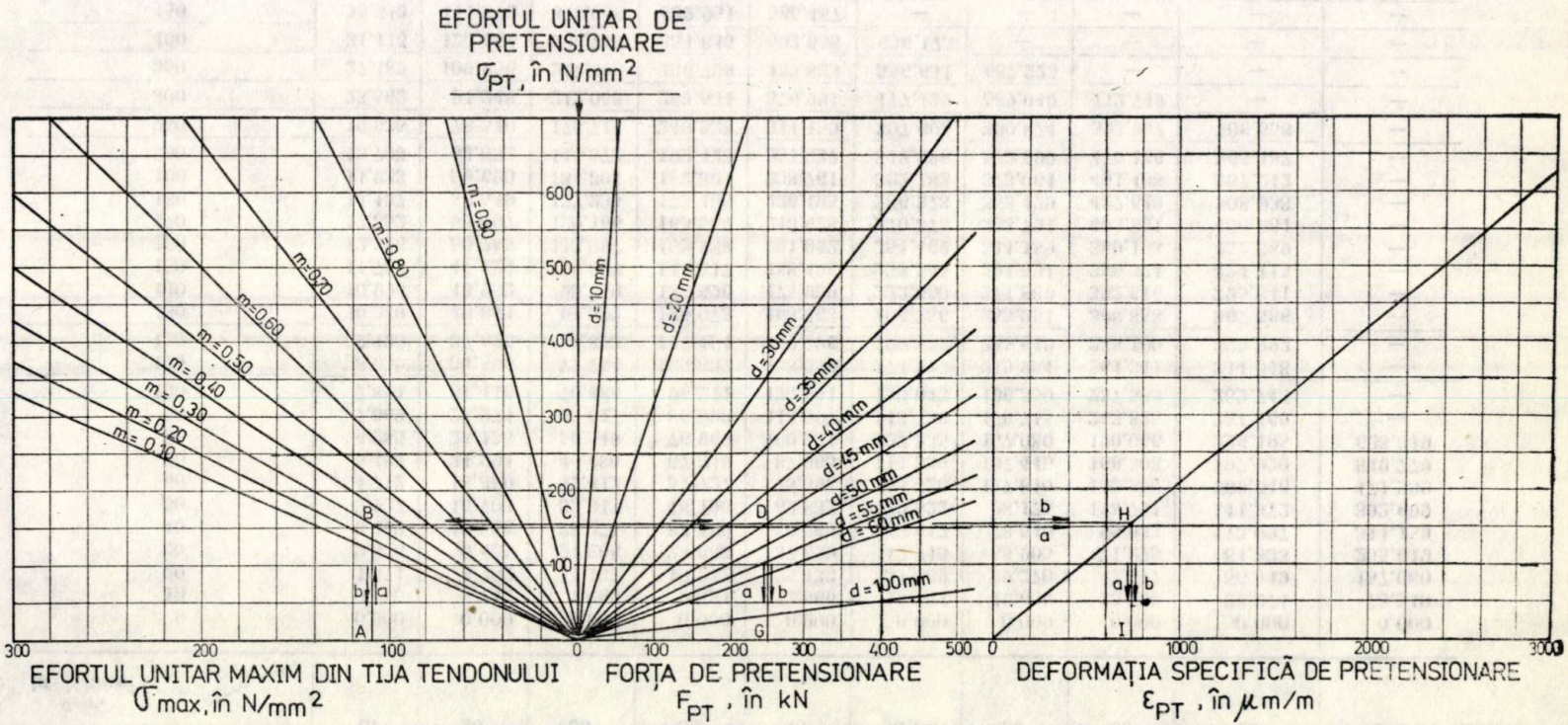


Fig. 8. — Nomograma pretensionării (acordării) tendoanelor rezervorului sferic.

1) determinarea efortului unitar de pretensionare σ_{PT} (care trebuie să îndeplinească condiția restrictivă 14c), atunci cînd se cunosc efortul unitar σ_{max} (evaluat prin calculele de proiectare) și coeficientul condițiilor de lucru m (impus sau adoptat de către proiectant);

2) determinarea forței de pretensionare F_{PT}, atunci cînd se cunosc mărimile σ_{max} și m, respectiv $\sigma_{PT} < 0{,}5\,\sigma_c$ și diametrul (minim al) tijei tendoanelor rezervorului sferic;

3) determinarea deformației specifice de pretensionare ε_{PT}, a cărei cunoaștere este necesară dacă acordarea tendoanelor rezervorului sferic se realizează tensometric, atunci cînd se cunosc fie mărimile σ_{max} și m, fie mărimea $\sigma_{PT} < 0{,}5\,\sigma_c$;

4) determinarea efortului unitar maxim σ_{max} din tija tendonului, atunci cînd se cunosc mărimile ε_{PT} sau $\sigma_{PT} < 0{,}5\,\sigma_c$ și m;

5) determinarea valorii coeficientului condițiilor de lucru $m \in [0{,}10\,;\ 0{,}90]$, atunci cînd se cunosc mărimile ε_{PT} sau $\sigma_{PT} < 0{,}5\,\sigma_c$ (impuse sau adoptate de către proiectant) și σ_{max} (evaluat prin calculele de proiectare);

6) verificarea diametrului (minim al) tijei tendoanelor rezervorului sferic d, atunci cînd se cunosc fie mărimile σ_{max}, m și F_{PT}, fie mărimile $\sigma_{PT} < 0{,}5\,\sigma_c$ sau ε_{PT} și F_{PT} etc.

Primită la redacție la 15 noiembrie 1978

ANALIZA EFECTELOR NEUNIFORMITĂȚII INJECȚIEI ASUPRA ÎNCĂRCĂRII ARBORELUI COTIT AL MOTORULUI DIESEL

de C. A. VASILESCU,

T. TURCOIU,

Institutul de marină Constanța

S. SIDON

Institutul politehnic București

Se simulează producerea neuniformității injecției, prin arderea unor cantități de combustibil diferite pe evoluția de ardere izocoră a unui ciclu de motor diesel rapid. Prin intermediul unui program de calcul se analizează efectul neuniformității injecției asupra încărcării (reacțiuni și momente de răsucire) fusurilor palier ale arborelui cotit. Totodată, se pune în evidență ordinul de mărime al solicitărilor suplimentare introduse de anumite tipuri de combinații de neuniformitate.

Funcționarea cu performanțe energetice ridicate și în condiții de identică încărcare a coturilor arborelui cotit a unui motor diesel, solicită o bună uniformitate a debitului de combustibil injectat, pentru toți cilindrii motorului.

Neuniformitatea dozei de combustibil afectează performanțele energetice [1], economice și de durabilitate care se realizează la valoarea lor maximă numai în cazul funcționării identice a tuturor cilindrilor motorului. Totodată, funcționarea în condiții de neuniformitate sporită determină solicitări suplimentare ale arborelui cotit.

1. SIMULAREA PRODUCERII NEUNIFORMITĂȚII INJECȚIEI

În cazul motorului diesel policilindric, neuniformitatea injecției între cilindri s-a simulat prin arderea unor cantități de combustibil diferite pe evoluția de ardere izocoră a ciclului motor. Pentru studiul influenței neuniformității injecției asupra încărcării arborelui cotit este suficientă cunoașterea numai a două cicluri, întrucît, în general, la motoarele diesel fusurile palier (mai puțin cele extreme) situîndu-se între două coturi, sînt solicitate exclusiv de forțele care încarcă coturile respective.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 4, 1979, P. 557–565

În acest sens, s-au considerat două cicluri de motor diesel rapid, la care se arde pe evoluţia izocoră 80%, respectiv 20% din cantitatea totală de combustibil, corespunzătoare regimului de sarcină plină. Figura 1 prezintă cele două cicluri teoretice care simulează neuniformitatea injecţiei, iar figurile 2 şi 3 diagramele indicate reale, calculate [1].

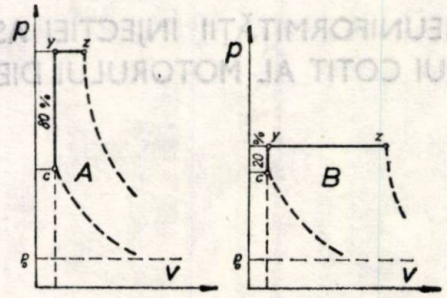


Fig. 1. — Ciclurile teoretice ale motorului diesel rapid care simulează neuniformitatea injecţiei.

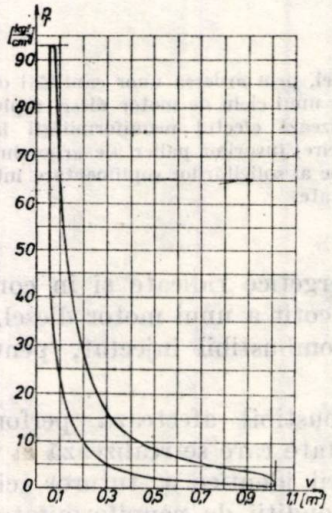


Fig. 2. — Diagrama indicată a ciclului real pentru $\chi_v = 80\%$.

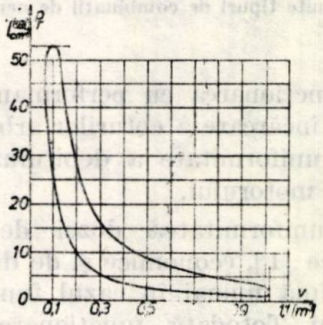


Fig. 3. — Diagrama indicată a ciclului real pentru $\chi_v = 20\%$.

2. ÎNCĂRCAREA ARBORELUI COTIT ÎN CONDIŢII DE NEUNIFORMITATE A INJECŢIEI

Studiul neuniformităţii injecţiei asupra încărcării arborelui cotit al unui motor diesel, s-a făcut prin analiza modului în care un anumit grad de neuniformitate ($N = 120\%$) afectează reacţiunile şi momentele de răsucire ale fusurilor palier. Pentru acest studiu, s-a considerat că cele două cicluri, care simulează neuniformitatea injecţiei, aparţin unui motor diesel rapid cu patru cilindri în linie (motorul D—121), şi că ele pot apare, aleator, la oricare din cei patru cilindri. În această ipoteză sînt posibile combinaţiile de neuniformitate prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Combinații de neuniformitate posibile, la un motor diesel cu patru cilindri, funcționînd după două cicluri diferite

Ciclul		A				B	
Fracția de combustibil χ_v(%)		80				20	
Combinații	posibile	*AAAA*	*BAAA*			*ABBA*	*BBAB*
		AAAB	*BBAA*			*ABAB*	*BABB*
		AABA	*BABA*			*AABB*	*ABBB*
		ABAA	*BAAB*			*BBBA*	*BBBB*
	rămase după eliminarea simetriilor	*AAAA*	*BAAA*	*BBAA*	*BBBA*	*BBBB*	
		ABBA	*BAAB*	*ABAB*	*BABB*	*AABA*	

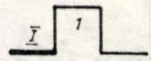
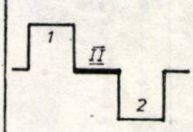
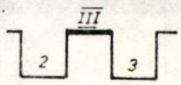
Eliminînd o parte dintre aceste combinații, din considerente de simetrie la nivelul motorului, rămîn, pentru evidențierea influenței neuniformității injecției asupra încărcării arborelui cotit, zece tipuri de combinații (tabela 1); dintre acestea însă, două sînt combinații de uniformitate (*AAAA* și *BBBB*), dar pentru cicluri diferite.

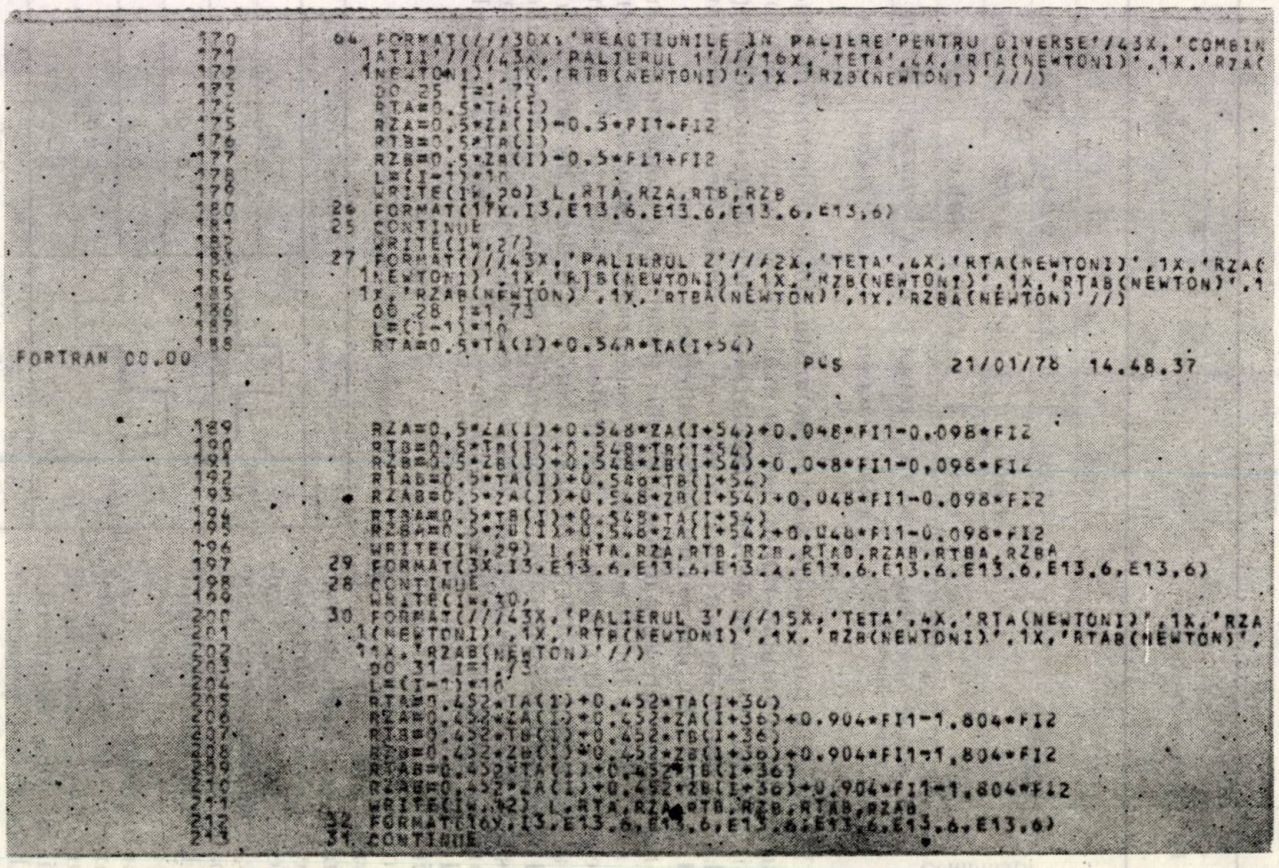
Solicitările care apar în fusurile palier (reacțiuni și momente de răsucire), s-au calculat ținînd seama de ipotezele uzuale [2], care se fac pentru arborele cotit (pentru calcul s-a folosit desenul de execuție al arborelui cotit al motorului D—121). În acest scop, s-a realizat un program de calcul care permite determinarea momentelor de răsucire și reacțiunilor pe fusurile palier extreme, intermediare și central (pentru fusurile intermediare s-a considerat influența ambelor coturi care încadrează fusul), ținînd seama de tipurile de combinații de neuniformitate și de ordinea de aprindere a motorului. În figura 4 este prezentată partea din instrucțiunile de calcul referitoare la calculul reacțiunilor și momentelor de răsucire pe fusurile palier.

La calculul reacțiunilor s-a avut în vedere faptul că, asupra fusurilor palier intermediar și central pot acționa cel mult două coturi, fie cu cicluri identice, fie diferite. În tabela 2 sînt prezentate cazurile distincte de combinații ale ciclurilor, care acționează asupra fusurilor palier. Se constată că asupra fusu-

Tabela 2

Combinații de cicluri la nivelul fusurilor palier

Fus palier	Poziția coturilor	Combinații posibile la nivelul fusurilor palier
I sau V		a
		b
II sau IV		a – a
		b – b
		a – b
		b – a
III		a – a
		b – b
		a – b



```
      64 FORMAT(///30X,'REACTIUNILE IN PALIERE PENTRU DIVERSE'/43X,'COMBIN
     1ATII'////43X,'PALIERUL 1'///16X,'TETA',4X,'RTA(NEWTONI)',1X,'RZA(
     1NEWTONI)',1X,'RTB(NEWTONI)',1X,'RZB(NEWTONI)'///)
        DO 25 I=1,73
        RTA=0.5*TA(I)
        RZA=0.5*ZA(I)-0.5*FI1+FI2
        RTB=0.5*TB(I)
        RZB=0.5*ZB(I)-0.5*FI1+FI2
        L=(I-1)*10
        WRITE(IW,26) L,RTA,RZA,RTB,RZB
      26 FORMAT(17X,I3,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6)
      25 CONTINUE
        WRITE(IW,27)
      27 FORMAT(///43X,'PALIERUL 2'///2X,'TETA',4X,'RTA(NEWTONI)',1X,'RZA(
     1NEWTONI)',1X,'RTB(NEWTONI)',1X,'RZB(NEWTONI)',1X,'RTAB(NEWTON)',1
     1X,'RZAB(NEWTON)',1X,'RTBA(NEWTON)',1X,'RZBA(NEWTON)'//)
        DO 28 I=1,73
        L=(I-1)*10
        RTA=0.5*TA(I)+0.548*TA(I+54)
FORTRAN 00.00                                    PCS        21/01/78  14.48.37

        RZA=0.5*ZA(I)+0.548*ZA(I+54)+0.048*FI1-0.098*FI2
        RTB=0.5*TB(I)+0.548*TB(I+54)
        RZB=0.5*ZB(I)+0.548*ZB(I+54)+0.048*FI1-0.098*FI2
        RTAB=0.5*TA(I)+0.548*TB(I+54)
        RZAB=0.5*ZA(I)+0.548*ZB(I+54)+0.048*FI1-0.098*FI2
        RTBA=0.5*TB(I)+0.548*TA(I+54)
        RZBA=0.5*ZB(I)+0.548*ZA(I+54)+0.048*FI1-0.098*FI2
        WRITE(IW,29) L,RTA,RZA,RTB,RZB,RTAB,RZAB,RTBA,RZBA
      29 FORMAT(3X,I3,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6)
      28 CONTINUE
        WRITE(IW,30)
      30 FORMAT(///43X,'PALIERUL 3'///15X,'TETA',4X,'RTA(NEWTONI)',1X,'RZA
     1(NEWTONI)',1X,'RTB(NEWTONI)',1X,'RZB(NEWTONI)',1X,'RTAB(NEWTON)',
     11X,'RZAB(NEWTON)'//)
        DO 31 I=1,73
        L=(I-1)*10
        RTA=0.452*TA(I)+0.452*TA(I+36)
        RZA=0.452*ZA(I)+0.452*ZA(I+36)+0.904*FI1-1.804*FI2
        RTB=0.452*TB(I)+0.452*TB(I+36)
        RZB=0.452*ZB(I)+0.452*ZB(I+36)+0.904*FI1-1.804*FI2
        RTAB=0.452*TA(I)+0.452*TB(I+36)
        RZAB=0.452*ZA(I)+0.452*ZB(I+36)+0.904*FI1-1.804*FI2
        WRITE(IW,32) L,RTA,RZA,RTB,RZB,RTAB,RZAB
      32 FORMAT(16X,I3,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6)
      31 CONTINUE
```

Fig. 4.a — Instrucțiunile programului de calcul pentru calcul reacțiunilor și momentelor de răsucire pe fusurile palier ale arborelui cotit, în condiții de neuniformitate a injecției.

```
      WRITE(IW,33)
   33 FORMAT(///30X,'MOMENTELE DE TORSIUNE ALE FUSURILOR PALILOR'/30X,'P
     1ENTRU DIVERSE COMBINATII (NEWTON*METRU)'//40X,'COMBINATIA AAAA'
     1//20X,'TETA',5X,'TMP2',11X,'TMP3',11X,'TMP4',11X,'TMP5')
      DO 34 I=1,73
      TMP2=TA(I)*R
      TMP3=(TA(I)+TA(I+54))*R
      TMP4=(TA(I)+TA(I+54)+TA(I+18))*R
      TMP5=(TA(I)+TA(I+54)+TA(I+18)+TA(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
   35 FORMAT(20X,I3,3X,E13.6,E13.6,E13.6,E13.6)
   34 CONTINUE
      WRITE(IW,36)
   36 FORMAT(///40X,'COMBINATIA BAAA')
      DO 37 I=1,73
      TMP2=TB(I)*R
      TMP3=(TB(I)+TA(I+54))*R
      TMP4=(TB(I)+TA(I+54)+TA(I+18))*R
      TMP5=(TB(I)+TA(I+54)+TA(I+18)+TA(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
FORTRAN 00.00                                    PCS          21/01/78  14.48.37

   37 CONTINUE
      WRITE(IW,38)
   38 FORMAT(///40X,'COMBINATIA BBAA')
      DO 39 I=1,73
      TMP2=TB(I)*R
      TMP3=(TB(I)+TB(I+54))*R
      TMP4=(TB(I)+TB(I+54)+TA(I+18))*R
      TMP5=(TB(I)+TB(I+54)+TA(I+18)+TA(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
   39 CONTINUE
      WRITE(IW,40)
   40 FORMAT(///40X,'COMBINATIA BBBA')
      DO 41 I=1,73
      TMP2=TB(I)*R
      TMP3=(TB(I)+TB(I+54))*R
      TMP4=(TB(I)+TB(I+54)+TB(I+18))*R
      TMP5=(TB(I)+TB(I+54)+TB(I+18)+TA(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
   41 CONTINUE
      WRITE(IW,42)
   42 FORMAT(///40X,'COMBINATIA BBBB')
      DO 43 I=1,73
      TMP2=TB(I)*R
      TMP3=(TB(I)+TB(I+54))*R
      TMP4=(TB(I)+TB(I+54)+TB(I+18))*R
      TMP5=(TB(I)+TB(I+54)+TB(I+18)+TB(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
   43 CONTINUE
      WRITE(IW,44)
   44 FORMAT(///40X,'COMBINATIA BAAB')
      DO 45 I=1,73
      TMP2=TB(I)*R
      TMP3=(TB(I)+TA(I+54))*R
      TMP4=(TB(I)+TA(I+54)+TA(I+18))*R
      TMP5=(TB(I)+TA(I+54)+TA(I+18)+TB(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
   45 CONTINUE
      WRITE(IW,46)
   46 FORMAT(///40X,'COMBINATIA BABB')
      DO 47 I=1,73
      TMP2=TB(I)*R
      TMP3=(TB(I)+TA(I+54))*R
      TMP4=(TB(I)+TA(I+54)+TB(I+18))*R
FORTRAN 00.00                                    PCS          21/01/78  14.48.37

      TMP5=(TB(I)+TA(I+54)+TB(I+18)+TB(I+36))*R
      L=(I-1)*10
      WRITE(IW,35) L,TMP2,TMP3,TMP4,TMP5
   47 CONTINUE
  200 CONTINUE
      STOP
      END
```

Fig. 4 b

rilor palier extreme acţionează fie numai cicluri A, fie numai cicluri B, pe cînd asupra celor intermediare şi central acţionează combinaţii de cicluri de tip $A-A$, $B-B$, $A-B$ şi $B-A$.
Un exemplu de încărcare a fusului palier intermediar II, la combinaţia $A-B$, este prezentat în figura 5.

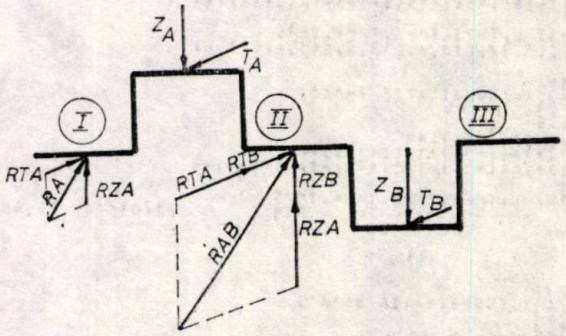


Fig. 5. — Reacţiunile fusului palier intermediar II, la combinaţia $A-B$.

Calculul, pentru toate combinaţiile de neuniformitate, s-a efectuat pentru trei turaţii ale motorului ($n = 2400$; 1200; 600 rot/min), atît cu scopul evidenţierii efectului de moderare a forţelor de inerţie asupra forţelor de presiune a gazelor, cît şi cu scopul stabilirii influenţei neuniformităţii injecţiei asupra încărcării arborelui cotit, la turaţii mici (600 rot/min), avînd în vedere faptul că la aceste turaţii, în exploatarea sistemului de injecţie, apar neuniformităţile cele mai mari [4].

Rezultatele programului privind valorile maxime ale reacţiunilor rezultante pe fusurile palier intermediare, acolo unde ordinea combinaţiilor poate fi cea mai generală, arată că apar încărcări cu 9,15% mai mari în cazul combinaţiei de tip $B-A$ faţă de cea de tip $A-B$, încărcări care se menţin la aceeaşi valoare indiferent de turaţia motorului.

În tabela 3 sînt prezentate valorile maxime ale reacţiunilor pe fusul palier intermediar II în cazul celor două tipuri de combinaţii.

Tabela 3

Valorile reacţiunilor rezultante pe fusul palier intermediar II

PALIER / TURAŢIA [rot/min] / TIPURI de REACŢIUNI	II		
	2400	1200	600
rab_{max} [N]	30886	32231	32569
rba_{max} [N]	33778	35255	35625
Diferenţa [%]	9,15	9,15	9,15

Încărcarea la răsucire a arborelui cotit, pentru toate combinaţiile de neuniformitate precizate, s-a apreciat atît prin intermediul coeficientului de siguranţă la oboseală mediu, la nivelul întregului arbore cotit, cît şi prin determinarea solicitărilor de răsucire din fiecare fus palier. În tabela 4 este prezentată ordinea combinaţiilor de neuniformitate care încarcă arborele cotit, iar în tabela 5, ordinea încărcării fusurilor palier.

Tabela 4

Ordinea combinațiilor de neuniformitate care încarcă arborele cotit

Ordinea încărcării la răsucire a arborelui cotit	Tipul de combinație de neuniformitate care produce încărcarea	Coeficientul de siguranta la oboseala mediu ($c_{\tau m}$)		
		2400 [rot/min]	1200 [rot/min]	600 [rot/min]
1	*AAAA*	7,26	5,72	5,32
2	*ABBA*; *ABAB*	7,39	5,73	5,33
3	*AABA*	7,40	5,76	5,34
4	*BAAA*; *BAAB*; *BABB*	7,62	5,88	5,42
5	*BBAA*	7,91	6,07	5,58
6	*BBBA*	8,11	6,20	5,72
7	*BBBB*	9,03	6,34	5,85

Tabela 5

Ordinea încărcării fusurilor palier

Ordinea încărcării la răsucire a fusurilor palier		Coeficientul de siguranța la oboseală (c_{τ})			Tipul de combinație de neuniformitate care produce încărcarea
		2400* [rot/min]	1200 [rot/min]	600 [rot/min]	
II	1	6,61	5,46	5,22	*AAAA*; *ABBA*; *ABAB*; *AABA*
	2	7,58	6,05	5,75	*BAAA*; *BBAA*; *BBBA*; *BAAB*; *BABB*; *BBBB*;
III	1	6,37	5,48	5,27	*BAAA*; *ABBA*; *BAAB*; *ABAB*; *BABB*
	2	6,38	5,58	5,30	*AAAA*; *AABA*
	3	7,63	6,23	5,81	*BBAA*; *BBBA*; *BBBB*
IV	1	6,06	5,76	5,32	*AAAA*
	2	6,52	5,89	5,33	*BAAA*; *BBAA*; *ABBA*; *BAAB*; *ABAB*; *BABB*; *AABA*
	3	7,19	6,46	5,88	*BBBA*; *BBBB*
V	1	10,04	6,09	5,44	*AAAA*; *BAAA*; *BBAA*; *BBBA*; *ABBA*; *BAAB*; *ABAB*; *BABB*; *AABA*.
	2	13,68	6,76	5,98	*BBBB*

* pentru această turație ordinea încărcării fusurilor palier este (IV, III, II, V); s-a considerat, totuși, ordinea din tabel avînd în vedere valorile mult mai mici ale coeficientului de siguranță la turații scăzute.

Se constată că pentru acest fel de încărcare, solicitările cele mai mari sînt produse de combinaţii în care mai importantă decît numărul, este ordinea diferitelor cicluri dezavantajoase. Spre exemplu, locul imediat următor combinaţiei care introduce cea mai mare solicitare (combinaţia $AAAA$), este ocupat de combinaţii cu două cicluri A şi două cicluri B; dar o combinaţie cu aceeaşi componenţă se află pe locul 5, ceea ce arată că mult mai importantă, pentru acest fel de solicitare, este ordinea în care se găsesc ciclurile în combinaţia respectivă. Situaţia se menţine şi pentru combinaţii de neuniformitate în care ponderea o deţine un tip sau altul de ciclu şi se manifestă identic la cele trei turaţii considerate, fie că se referă la încărcarea arborelui cotit, fie la cea a fusurilor palier.

3. CONCLUZII

Neuniformitatea injecţiei afectează, pe lîngă performanţe, economicitate etc., şi încărcarea arborelui cotit al motorului diesel. Încărcarea arborelui cotit, atît din punct de vedere al reacţiunilor, cît şi a momentului de răsucire este diferită, funcţie de combinaţia de neuniformitate, solicitarea cea mai importantă fiind introdusă de combinaţii în care ordinea ciclurilor este preferată. În acest sens, la nivelul valorilor maxime ale reacţiunilor pe fusul palier intermediar apar încărcări cu peste 9% mai mari la tipul de combinaţie $B-A$ faţă de $A-B$.

Aceasta, ar putea constitui o explicaţie a uzurilor diferite ale lagărelor arborelui cotit ale motoarelor diesel, ceea ce impune, avîndu-se în vedere şi afectarea sensibilă a performanţelor [1], funcţionarea motorului cu un grad sporit al uniformităţii injecţiei.

În situaţia în care, în exploatare, apar neuniformităţi şi eliminarea lor este imposibilă (unele motoare diesel funcţionează, voit, cu unul sau mai mulţi cilindri suspendaţi), cunoaşterea efectelor acestora ar putea permite sporirea durabilităţii şi fiabilităţii arborelui cotit, prin dirijarea convenabilă a neuniformităţii injecţiei, bineînţeles cu afectarea puterii şi economicităţii motorului.

NOTAŢII

c_τ[−], coeficient de siguranţă la oboseală pentru solicitarea de răsucire;

χ_v[%], fracţia de combustibil care arde pe evoluţia izocoră de ardere;

N [%], gradul de neuniformitate al injecţiei.

n (rot/min), turaţia motorului;

RAB, RBA [N], reacţiuni totale pe fusul palier intermediar produse de combinaţiile de neuniformitate $A-B$ şi $B-A$;

RTA, RTB [N], reacţiuni tangenţiale pe fusul palier produse de forţele tangenţiale ale ciclurilor A şi B;

$RTAB$, $RTBA$ [N], reacţiuni tangenţiale pe fusul palier intermediar produse de combinaţiile de neuniformitate $A-B$ şi $B-A$;

RZA, *RZB* [N], reacțiuni normale pe fusul palier produse de forțele normale ale ciclurilor *A* și *B*;

RZAB, *RZBA* [N], reacțiuni normale pe fusul palier intermediar produse de combinațiile de neuniformitate *A*—*B* și *B*—*A*;

TA, *TB* [N], forțe tangențiale pe fusul maneton, produse de ciclurile *A* și *B*.

ZA, *ZB* [N], forțe normale pe fusul maneton, produse de ciclurile *A* și *B*.

Primită la redacție la 2 noiembrie, 1978

BIBLIOGRAFIE

1. C. A. Vasilescu, T. Turcoiu, *Influența neuniformității injecției asupra performanțelor și comportării motorului cu aprindere prin comprimare*, A V-a Sesiune de comunicări a cadrelor didactice din Institutul de marină, Constanța, 19—21 mai 1978.
2. B. Grünwald, *Teoria, construcția și calculul motoarelor pentru autovehicule rutiere*, Edit. did. ped., București, 1969.
3. P. Burman, Frank De Luca, *Fuel injection and controls for internal combustion engines*, The Technical Press, Ltd., London, 1962.
4. L. Doinaru, *Aparatura de injecție pentru motoare diesel*, Edit. tehnică, București, 1973.
5. G. Moldovan, *Scheme logice și programe FORTRAN*, Edit. did. ped., București, 1978.

EVOLUȚIA CARACTERISTICILOR DE FUNCȚIONARE ALE INSTALAȚIILOR DE HIDROTRANSPORT A ZGURII ȘI CENUȘII ÎN TIMPUL EXPLOATĂRII. II

de MIHAIL ROCO
I.P.B.

Pe baza măsurătorilor efectuate asupra unor instalații industriale de hidrotransport, în lucrare (I, II) se prezintă tendințele de modificare în timp ale caracteristicilor de funcționare, aspecte ale comportării echipamentelor sub efectul fenomenelor de încrustare și de abraziune, precum și unele măsuri de îmbunătățire a funcționării acestora. Rezultatele experimentale sînt exemplificate pentru două instalații de evacuare hidraulică a zgurei și cenușii.
A doua parte a lucrării (II) cuprinde aspecte referitoare la abraziunea pompelor și conductelor, la fărîmițarea particulelor solide transportate, la fenomenele tranzitorii în instalațiile de hidrotransport și la direcții de mărire a capacității de transport hidraulic într-o instalație existentă.

1. INTRODUCERE

În prima parte a lucrării [1] s-a analizat modul de evoluție a capacității instalațiilor de hidrotransport în timpul exploatării, trăsături ale formării crustelor în lungul conductelor și efectele acestora asupra caracteristicilor de funcționare. În acest articol vom prezenta unele elemente specifice privind abraziunea echipamentelor, degradarea particulelor solide în timpul transportului, particularitățile fenomenelor tranzitorii și direcții pentru îmbunătățirea comparării în exploatare a instalațiilor de hidrotransport.

2. EFECTE ALE ABRAZIUNII ECHIPAMENTELOR ASUPRA CARACTERISTICILOR DE FUNCȚIONARE

Abraziunea echipamentelor este rezultatul desprinderii succesive a unor straturi de material de la suprafața pieselor aflate în contact cu hidroamestecul în mișcare, în urma fricțiunii, a șocurilor și a oboselii cauzate de acțiunea particulelor solide. Acest fenomen determină durata de exploatare și caracteristicile de funcționare ale conductelor, pompelor armăturilor și aparatelor de măsură dintr-o instalație de hidrotransport.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 4, 1979, P. 567–594

2.1. ASPECTE PRIVIND ABRAZIUNEA CONDUCTELOR

Caracteristicile de funcționare ale conductelor sînt influențate de fenomenul de abraziune atît prin modificarea rugozității suprafețelor interioare și deci a rezistențelor hidraulice, cît și prin diminuarea grosimii pereților și în consecință a rezistențelor mecanice.

Modificarea rugozității conductelor prin care circulă o suspensie este cauzată de „șlefuirea" asperităților pereților de către particulele solide. În lucrarea [2] se menționează scăderea rezistențelor hidraulice la vehicularea apei cu 20—22% după hidrotransportul unui sort de cărbune, timp de 100—150 ore, printr-o conductă metalică D_n 255 mm. În lucrarea [3] se arată, similar, că pierderile de sarcină liniară după hidrotransportul zgurei și cenușii scad, rugozitatea relativă a conductelor metalice ajungînd în limitele de $R/k = 1.500—4.200$ (R reprezintă rasa conductei, k — înălțimea asperităților).

Pe conducta experimentală D_n 505 mm din *instalația nr. I* ([1], fig. 1) de hidrotransport a zgurei și cenușii am stabilit prin măsurători hidraulice valoarea medie pe conductă a coeficientului $\lambda = 0{,}0147$ după opt ani de funcționare, mai mic decît valoarea inițială $\lambda_0 = 0{,}018$. În momentul măsurătorii, conducta, în lungime totală de 3.200 m, prezenta unele încrustații izolate pe primii 300 m de la refularea pompelor.

De asemenea, am pus în evidență în condiții de *laborator* scăderea rugozității unor conducte noi D_n 100 mm în prima perioadă de funcționare cu trei hidroamestecuri (apă-cenușă, apă-zgură și cenușă, apă-nisip). Conductele erau confecționate din oțel, P.V.C., azbociment și poliesteri armați cu fibre de sticlă. În figura 1*a*, *b*, *c*, *d* se prezintă modul de variație în timp a rugozității tehnice k la vehicularea unui sort de cenușă cu un conținut ridicat de SiO_2 ($d \approx 0{,}07$ mm; $\gamma_{sp} = 2{,}3$ t/m^3; $v = 1{,}4$ m/s; $G_{cen}/G_{apă} = 1/10$), pe baza măsurătorilor hidraulice efectuate în domeniul $\mathcal{R}e = 5 \cdot 10^4 — 5 \cdot 10^5$ ($\mathcal{R}e$ reprezintă numărul adimensional Reynolds). În partea de jos a figurii 1 (1 *e*) este trasat profilul rugozității conductei noi de P.V.C. ($t = 0$) în lungul unei generatoare, mărit cu ajutorul unui profilograf special. Se observă că măsurătoarea hidraulică a rugozității tehnice a conductei din P.V.C. (fig. 1*a*; $t = 0$; $k_0 = 0{,}08$ mm) corespunde cu măsurătoarea pe cale directă a înălțimii asperităților ce caracterizează profilul suprafeței interioare a conductei după o generatoare dacă se neglijează macro-denivelările mai lent variabile în lungul generatoarei (fig. 1*e*). Scăderea rapidă a rugozității tehnice după 10 ore de vehiculare a amestecului apă—cenușă (fig. 1 *a*, $t = 10$h, $k_{P.V.C} = 0{,}026$ mm) este justificată de reducerea înălțimii asperității datorită abraziunii particulelor solide, de rotunjirea și eventual colmatarea asperităților rămase. Mărirea ulterioară a valorii rugozității în jurul unei valori cvasistaționare (fig. 1 *a*, $t = 60$ h și 110 h) se poate explica prin accentuarea macro-denivelărilor inițiale (în figura 1 *e* amplitudinea acestora este de $k' \approx 0{,}03$ mm), în mod similar cu fenomenul de formare a macrorugozității crustelor.

Determinările experimentale din laborator au arătat o creștere a gradului de „șlefuire": la conductele din P.V.C. și poliesteri față de conductele metalice ($\Delta k_{plastic} = 0{,}043—0{,}045$ mm, față de $\Delta k_{metal} = 0{,}03$ mm, la hidrotransportul unui sort de cenușă); la hidrotransportul nisipului de Aghireș față de hidrotransportul cenușii ($\Delta k_{metal,\ nisip} = 0{,}05$ mm, față de

$\Delta k_{metal,\ cenușă} = 0{,}03$ mm) și la sporirea vitezei de curgere a hidroamestecului prin conducte (prin dublarea vitezei se obține aceeași „șlefuire" într-un timp de circa trei ori mai scurt).

În cazul apariției fenomenului de coroziune rugozitatea suprafeței interioare a conductei rămîne practic neinfluențată datorită procesului

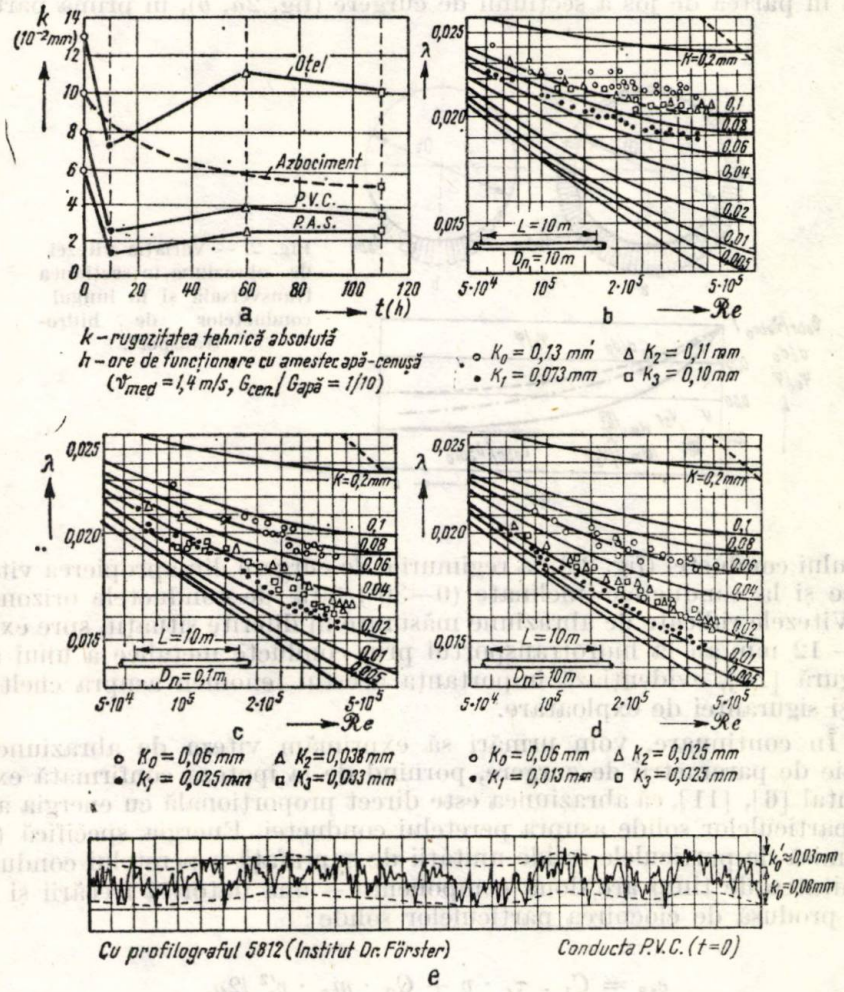


Fig. 1. — Modificarea rugozității conductelor de hidrotransport în prima perioadă de funcționare.

continuu de „șlefuire" produs de particulele solide transportate. În cazul formării crustelor, situație întîlnită în instalația nr. II, rugozitatea absolută crește odată cu mărirea grosimii crustelor [1], viteza de depunere depășind pe cea de abraziune.

Viteza de abraziune a pereților conductelor depinde, conform datelor experimentate cunoscute, de parametrii de transport (este direct propor-

țională cu concentrația și cu puteri ale vitezei de curgere cuprinse între 1,5 și 4,5) și de caracteristicile particulelor solide (crește odată cu dimensiunea particulelor solide avînd o duritate superioară materialului conductei, cu greutatea specifică, cu modulul de elasticitate și cu gradul de nesfericitate al particulelor) [4]—[8]. Observațiile efectuate pe instalațiile de hidrotransport în exploatare au confirmat că abraziunea este mai accentuată în partea de jos a secțiunii de curgere (fig. 2*a*, *b*), în prima parte a

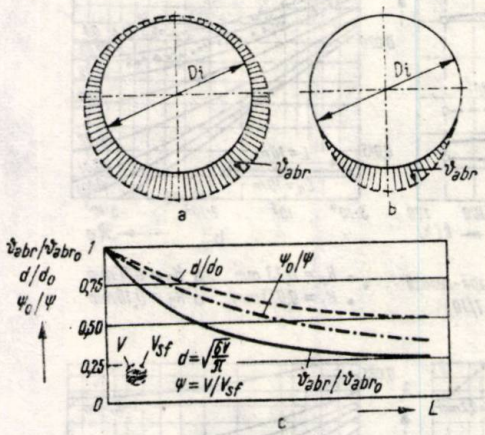


Fig. 2. — Variația vitezei de abraziune în secțiunea transversală și în lungul conductelor de hidrotransport.

traseului conductei (fig. 2*c*), la regimurile de curgere din apropierea vitezei critice și la conductele înclinate (0—30°) față de conductele orizontale [9]. Vitezele ridicate de abraziune măsurate în diferite situații, spre exemplu — 12 mm/an la hidrotransportul prin conducte metalice a unui sort de zgură [10], evidențiază importanța acestui fenomen asupra cheltuielilor și siguranței de exploatare.

În continuare, vom urmări să exprimăm viteza de abraziune în funcție de parametrii de curgere, pornind de la ipoteza confirmată experimental [6], [11], că abraziunea este direct proporțională cu energia acțiunii particulelor solide asupra peretelui conductei. Energia specifică (e_{sp}) transmisă de particulele solide unității de suprafață a peretelui conductei în unitatea de timp are două componente — una datorită frecării și o a doua produsă de ciocnirea particulelor solide:

$$e_{sp} = C_1 \cdot \tau_f \cdot v + C_2 \cdot m_p \cdot v_s'^2 / 2g, \tag{1}$$

în care

C_1, C_2 reprezintă coeficienți adimensionali;

τ_f — efortul tangențial la perete determinat de frecarea particulelor solide;

v — viteza medie de curgere în conductă;

m_p — masa relativă în lichid a particulelor solide ce lovesc unitatea de suprafață a peretelui conductei în unitatea de timp;

v'_s — valoarea medie a componenței pulsatorii turbulente a vitezei particulelor solide în planul transversal;

g — accelerația gravitațională.

Considerînd un tronson de conductă de diametru D și lungime ΔL, prin care sînt transportate particule solide cu masa specifică ρ_s în concentrație spațială c de un lichid avînd masa specifică ρ_L, efortul tangențial τ_f poate fi exprimat astfel:

$$\tau_f = \frac{f_{ef} \cdot G_s}{A}, \tag{2}$$

în care

$$G_s = \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot \Delta L \cdot g \cdot (\rho_s - \rho_L) \cdot c \tag{3}$$

reprezintă greutatea relativă în lichid a particulelor solide din tronsonul de conductă considerat;

$$A = \pi \cdot D \cdot \Delta L \tag{4}$$

aria laterală a tronsonului de conductă considerat;

f_{ef} — coeficientul de frecare efectivă a particulelor solide în conducta de hidrotransport.

Coeficientul de frecare efectivă f_{ef} este unul și același care intervine și în expresia analitică a pierderilor de sarcină liniare [9], stabilită folosind bilanțul lucrului mecanic:

$$\frac{i_B - i_L}{c} = \left(\frac{\rho_s}{\rho_L} - 1\right)\left(f_{ef} + \frac{w}{v} + i_L\right), \tag{5}$$

în care

i_B, i_L reprezintă pierderile de sarcină liniare la curgerea mediului bifazat, respectiv a lichidului;

w — mărimea hidraulică a particulelor solide.

Din compararea expresiei analitice (5) cu rezultatele experimentale ale lui Smoldîrev [12], obținem pentru coeficientul f_{ef} relațiile:

— în cazul particulelor fine ($d < 0{,}15$ mm; spre exemplu cenușă)

$$f_{ef} = C_3 \frac{w^2}{v^2} \frac{D}{d} - \frac{w}{v} - i_L + 1; \quad C_3 = 0{,}31, \tag{6}$$

— în cazul particulelor mari ($d > 0{,}15$ mm; spre exemplu zgură)

$$f_{ef} = C_4 \frac{w}{v} \sqrt{\frac{D}{d}} - \frac{w}{v} - i_L; \quad C_4(D) = 0{,}30 - 3. \tag{7}$$

Acceptînd că vitezele pulsatorii turbulente ale particulelor solide în planul transversal v'_s sînt proporţionale cu cele ale lichidului purtător v'_L, rezultă

$$v'_s \sim v'_L \sim v \cdot \sqrt{\lambda/8}, \tag{8}$$

$$m_p = C_5 (\rho_s - \rho_L) \cdot c \cdot v \cdot \sqrt{\lambda}, \tag{9}$$

în care

λ reprezintă coeficientul unitar al pierderilor de sarcină liniare;

C_5 — coeficient adimensional.

Înlocuind (2)—(9) în (1), obţinem:

— în cazul particulelor fine ($d < 0{,}15$ mm)

$$e_{sp} = g \cdot (\rho_s - \rho_L) \cdot c \cdot \left[C_1 \left(C_3 \frac{w^2}{v^2} \frac{D}{d} - \frac{w}{v} - i_L + 1 \right) \cdot D + C_2 C_5 \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{2g} \cdot v^3 \right], \tag{10}$$

— în cazul particulelor mari ($d > 0{,}15$ mm)

$$e_{sp} = g \cdot (\rho_s - \rho_L) \cdot c \cdot \left[C_1 \cdot \left(C_4 \frac{w}{v} \sqrt{\frac{D}{d}} - \frac{w}{v} - i_L \right) \cdot D + C_2 \cdot C_5 \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{2g} \cdot v^3 \right]. \tag{11}$$

Din expresiile (10) şi (11) ale energiei specifice de abraziune rezultă în primul rînd proporţionalitatea vitezei de abraziune cu greutatea specifică relativă a fazei solide în lichidul purtător $g \cdot (\rho_s - \rho_L)$ şi cu concentraţia c, fapt confirmat de experienţă. Întrucît datele experimentale ale diferiţilor autori indică în medie proporţionalitatea vitezei de abraziune cu viteza de curgere la puterea $n = 3$ rezultă că energia de ciocnire are în general ponderea principală, iar energia de frecare un rol secundar. Puterile n mai mari ca 3 pot fi justificate de apariţia abraziunii prin „smulgere" în urma şocurilor puternice. Puterile n mai mici decît 3 ($n = 1{,}5-3$) seminifică o pondere mărită a componentei de frecare, ce creşte odată cu sporirea diametrului D. În cazul pompelor centrifuge abraziunea „de ciocnire" are o pondere ridicată datorită vitezelor mari de curgere cu schimbări bruşte de direcţie. Rezultatele experimentale confirmă această observaţie intuitivă indicînd viteze de abraziune, proporţionale cu puteri ale vitezei de curgere la puteri apropiate de 3 [13].

Modul de variaţie al vitezei de abraziune pe conturul secţiunii de curgere (fig. 2, *a* şi *b*) depinde de regimul de deplasare al fazei solide în conductă. Abraziunea pe tronsoanele liniare de conductă acţionează fie pe tot perimetrul secţiunii de curgere crescînd progresiv spre partea inferioară a conductei (fig. 2 *a*, în cazul regimului de curgere cu suspensie neuniformă), fie accentuat numai în partea inferioară a conductei, la un unghi la contur de circa 120° (fig. 2*b*, în cazul regimului de curgere cu particule solide antrenate prin tîrîre şi prin salturi). Pentru mărirea duratei de viaţă a conductelor se cunosc soluţii de acoperire a pereţilor interiori cu un material rezistent la abraziune (bazalt, cauciuc, poliuretan ş.a.) distribuit pe tot perimetrul secţiunii de curgere cu o grosime constantă.

Dezavantajele acestor protecții constau în aceea că efectul util este în majoritatea cazurilor numai în partea inferioară a conductei unde abraziunea este importantă, iar prin acoperirea uniformă a întregii suprafețe a conductei rezultă un consum relativ ridicat de material de protecție și o reducere nejustificată a secțiunii de curgere. În vederea obținerii unor profile transversale de egală rezistență la abraziune propunem realizarea unor protecții antiabrazive sau însăși a peretelui conductelor cu o grosime neuniformă, proporțională cu mărimea vitezei de abraziune. În figura 3 prezentăm trei soluții constructive care materializează această idee: *a* — bandă longitudinală dintr-un material rezistent la abraziune (cauciuc

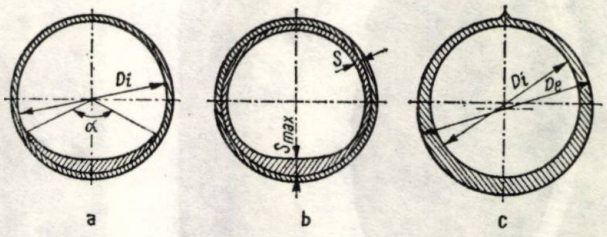


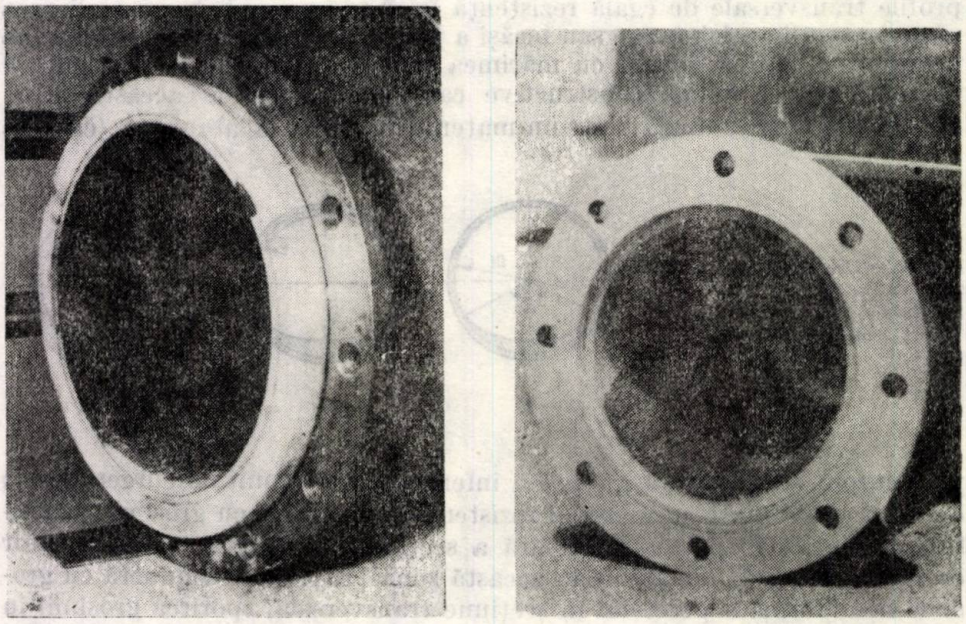
Fig. 3. — Protecții antiabrazive cu secțiuni transversale favorabile pentru hidrotransport (soluții constructive).

plastdurom etc.) plasată în partea inferioară a secțiunii de curgere [14]; *b* — căptușeală dintr-un material rezistent la abraziune cu grosimea neuniformă, mărită în partea inferioară a secțiunii de curgere corespunzător creșterii vitezei de abraziune în această zonă [15]; *c* — conductă cu grosime neuniformă a peretelui în secțiune transversală, sporirea grosimii în partea inferioară a conductei fiind obținută printr-o excentricitate între suprafețele cilindrice circulare ce delimitează peretele conductei [16]. În figura 4 sînt redate fotografiile a două tronsoane experimentale de conducte prevăzute cu protecții antiabrazive conform soluțiilor de mai sus. Conductele și protecțiile utilizate pînă în prezent la hidrotransport sînt realizate cu grosimea peretelui constantă, corespunzător optimului economic pentru transportul fluidelor omogene.

Realizarea protecțiilor și conductelor cu grosimea pereților mărită în partea inferioară conduce la calculul hidraulic al unor secțiuni de curgere tip lunulă, delimitate de două arce de curbă, fiecare caracterizată printr-o rugozitate aparte. Stabilirea distribuției vitezelor și calculul analitic al debitului pot fi efectuate cu una din metodele prezentate de autor în lucrări anterioare, în funcție de precizia de calcul urmărită: 1 — aproximînd că repartiția vitezelor se realizează după legea de distribuție generalizată față de cel mai apropiat punct al peretelui conductei, ipoteză care permite exprimarea debitelor prin integrale rezolvabile numeric [17]; 2 — utilizînd ipoteza difuziei firelor de curent pentru structura curgerii turbulente, care permite stabilirea analitică a distribuției vitezelor prin rezolvarea unei ecuații tip Poisson [18]; 3 — utilizînd metoda elementului finit pentru curgerea mono-și bi-fazată în conducte, care permite stabilirea numerică cu precizie superioară a vitezelor și debitelor în conductă [19].

În figura 5 sînt prezentate două diagrame cu exemple de calcul ale debitelor folosind prima din metodele enumerate mai sus.

Pe tronsoanele curbe ale conductelor apar două zone de abraziune accentuată : una în partea exterioară a curbei (I din figura 6*a*, specifică regi-



a *b*

Fig. 4. — Conducte protejate antiabraziv : *a* – conductă P.A.S. D_n 300 mm protejată cu poliesteri ; *b* — conductă metalică D_n 150 mm protejată cu plastdurom.

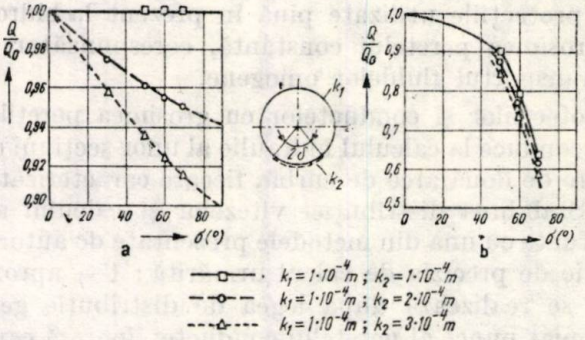


Fig. 5. — Exemple de aplicare a metodei [16].

mului de curgere cu suspensie cvasiuniformă în secțiune) și o a doua în partea inferioară spre interiorul curbei (II din figura 6*a*, specifică regimului de curgere cu suspensie concentrată spre partea inferioară a secțiunii sau cu material solid tîrît). Cele două zone cu abraziuni accentuate sînt cauzate de formarea curenților secundari caracteristici în coturi, la prima zonă

contribuind suplimentar și centrifugarea particulelor solide. Cea de-a doua zonă, nestudiată pînă în prezent de alți autori, a fost pusă în evidență cu ocazia măsurătorilor efectuate pe instalații industriale [20] și este ilustrată în figura 7*a*. Pentru protejarea zonelor curbe ale conductelor

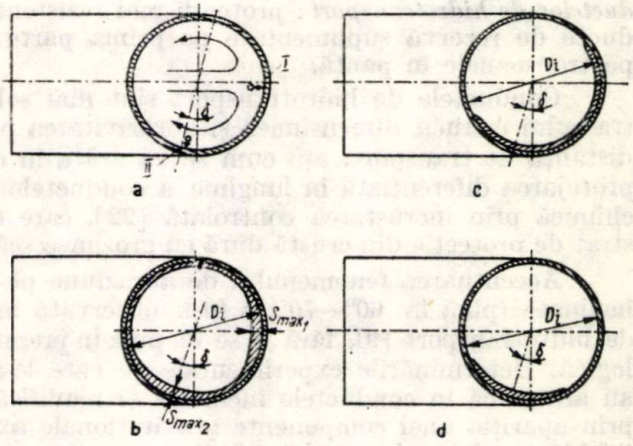
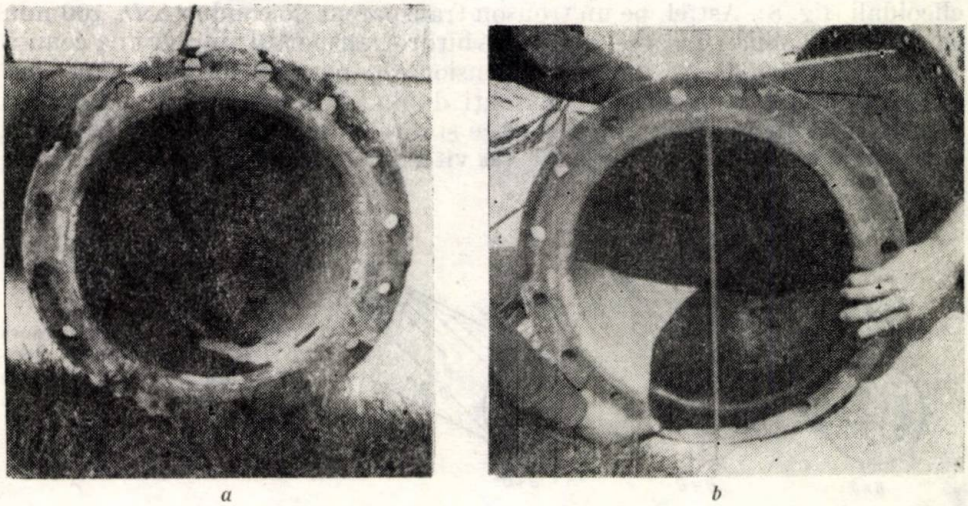


Fig. 6. — Protecții antiabrazive pentru coturile conductelor de hidrotransport.



a *b*

Fig. 7. — Zonă de abraziune accentuată în coturile conductelor de hidrotransport : *a* — Zona de abraziune (II din figura 6*a*) ; *b* — Protecție cu bandă.

se cunosc căptușeli cu grosime uniformă în toată secțiunea și blindaje metalice montate numai în zona exterioară a curbei. În vederea obținerii unor profile transversale de egală rezistență la abraziune propunem executarea protecției antiabrazive fie cu o căptușeală îngroșată în cele două zone mai solicitate (fig. 6*b*), fie cu una sau două benzi aplicate în aceste zone (fig. 6*b*, *c*, *d* și 7*b*) [21]. Principalele avantaje ale acestor soluții constructive sînt : mărirea duratei de protecție folosind aceeași cantitate de

material, protejarea corespunzătoare a celei de-a II-a zone (fig. 7*a*), realizarea mai simplă (în cazul benzilor) și posibilitatea de aplicare succesivă în condiții de șantier.

Similar cu protejarea neuniformă în secțiunea transversală sînt indicate și unele măsuri de *protecție antiabrazivă diferențiată în lungul conductelor de hidrotransport*: protecții mai rezistente și asigurarea unei conducte de rezervă suplimentare pe prima parte a traseului conductei și pe tronsoanele în pantă.

Conductele de hidrotransport sînt mai solicitate în prima parte a traseului întrucît dimensiunea și abrazivitatea particulelor solide scad cu distanța de transport, așa cum se va arăta în capitolul al 3-lea. Pentru protejarea diferențiată în lungime a conductelor se menționează metoda chimică prin încrustarea controlată [22], care determină formarea unui strat de protecție din crustă dură cu grosimea scăzînd în lungul conductei.

Accentuarea fenomenului de abraziune pe tronsoanele de conductă înclinate (pînă la 60°—70°) a fost observată în exploatarea instalațiilor de hidrotransport [9], fără a se da pînă în prezent o explicație fenomenologică. Determinările experimentale pe care le-am efectuat în laborator au arătat că în conductele înclinate se modifică regimul de curgere atît prin apariția unei componente gravitaționale axiale, diferite pentru faza lichidă și solidă, și mai ales prin formarea unor curenți transversali dublu elicoidali (fig. 8). Astfel, pe un tronson transparent de conductă D_n 100 mm cu pantă variabilă ($\theta = 0 - \pm 30°$) la hirdrotransportul unui sort de cenușă (greutatea specifică 2,3 gr/cm³, dimensionarea particulelor 0,08 mm, concentrație 15%), s-au observat curenți dublu elicoidali la care unghiul β format între firele de curent periferice și direcția generatoarelor conductei a ajuns pînă la valori de circa 25° (la viteze de curgere de 0,5 m/s și încli-

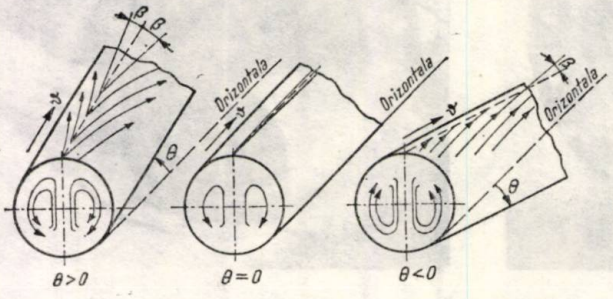


Fig. 8. — Curenții transversali secundari în conductele de hidrotransport.

nări $\theta = +20°$ și $-25°$). Apariției curenților secundari transversali, inclusiv în conductele orizontale dar cu o intensitate redusă, a fost demonstrată teoretic de autor la lucrarea [19] și a fost pusă în evidență indirect și prin unele măsurători efectuate asupra distribuției concentrației [23]. Folosind metoda de calcul prezentată în [19] mărimea curenților transversali poate fi estimată analitic. În partea inferioară a conductelor înclinate s-a constatat experimental modificarea regimului de deplasare a particulelor solide față de conductele orizontale. Pe tronsonul urcător (D_n 100 mm) regimul de deplasare prin salturi și prin tîrîre după tra-

iectorii neregulate ale particulelor s-a prelungit în domeniul vitezelor de curgere superioare, iar pe tronsonul coborîtor s-a amplificat antrenarea prin tîrîre după traiectorii aproape liniare ale particulelor. Rezultate experimentale privind efectul înclinării conductei asupra vitezei critice au fost prezentate în lucrarea [24].

Datorită inerției particulelor solide față de lichidul purtător și a unor curenți secundari specifici, fenomenul de abraziune este mai intens în toate porțiunile conductelor de hidrotransport unde apar regimuri de curgere neuniformă, așa cum sînt : reducțiile, bifurcațiile, strangulările pentru aparatele de măsură, vanele, îmbinările tronsoanelor de conductă necentrate ș.a.

2.2. ASPECTE PRIVIND ABRAZIUNEA POMPELOR CENTRIFUGE

Abraziunea echipamentelor de pompare constituie unul din criteriile de stabilire a parametrilor de funcționare a instalațiilor de hidrotransport și o cauză a variațiilor acestor parametri în perioada de exploatare. Desfășurarea fenomenului de abraziune în pompe nu este însă bine stăpînit pînă în prezent, iar soluțiile tehnice cunoscute pentru contracararea fenomenului sînt susceptibile de perfecționări.

În literatura de specialitate [25], [26], [13] se acceptă că abraziunea este direct proporțională cu debitul vehiculat și cu puterea 1,5 a înălțimii de pompare. Variația abraziunii se consideră cvasiliniară cu dimensiunea și cu greutatea specifică a particulelor solide transportate [25]. Mărimea abraziunii crește cu sporirea concentrației c după funcția $c\,(1-c)^2$ [27]. Abraziuni importante apar atunci cînd duritatea particulelor solide o depășește pe cea a materialului pompei [28].

Determinările experimentale efectuate pe instalațiile nr. I și II (figurile 1 și 2 din [1]) asupra pompelor cu rotori tip „canal" ($P_n = 185$ kW, $D_{2,\text{rotor}} = 450$ mm, producție Sigma) și cu rotori tip închis cu 3 pale ($P_n = 250$ kW, $D_{2,\text{rotor}} = 515$ mm, producție Wedag) au arătat o scădere cvasiliniară a greutății rotorilor și a blindajelor în timpul funcționării, așa cum se exemplifică în figura 9.

Fenomenul de abraziune a fost mai accentuat la rotorii tip „canal" față de rotirii tip închis cu pale. Acest aspect s-a pus în evidență folosind două loturi de cîte cinci rotori fiecare, executați din același material (oțel silicios), și funcționînd cu aceeași turație ($n \approx 1480$ rot/min) și cu aproximativ aceeași concentrație ($G_s/G_{\text{apă}} \approx 0{,}08$) în cele două tipuri de pompă. Durata medie de exploatare la rotorii tip închis cu pale a fost cu circa 25 % mai mare față de rotorii tip „canal" (circa 1.400 ore față de 1.100 ore), deși raportul diametrelor și al sarcinilor ar fi implicat un fenomen contrar.

La pompele din instalația nr. II, care funcționau la sarcini superioare celei nominale din cauza încrustării conductelor de hidrotransport, s-a observat accelerarea procesului de abraziune proporțional cu mărimea suprasarcinii. Zona cea mai solicitată a fost pe palele rotorice în dreptul diametrului de ieșire al rotorului. La pompele din instalația nr. I, care funcționau la sarcini inferioare celei nominale, abraziuni mai accentuate au apărut în zona de intrare pe palele rotorice și pe placa din spate.

Pentru a îmbunătăți comportarea de abraziune a pompelor sînt posibile două direcții principale : utilizarea unor materiale cu rezistență sporită la abraziune și adoptarea unor noi soluții constructive.

Materialele din care se confecționează piesele de uzură ale pompelor autohtone pentru hidrotransportul zgurei și cenușii sînt în principal oțelul

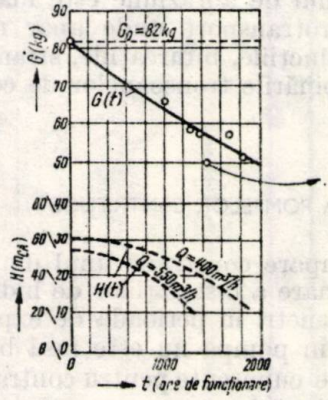
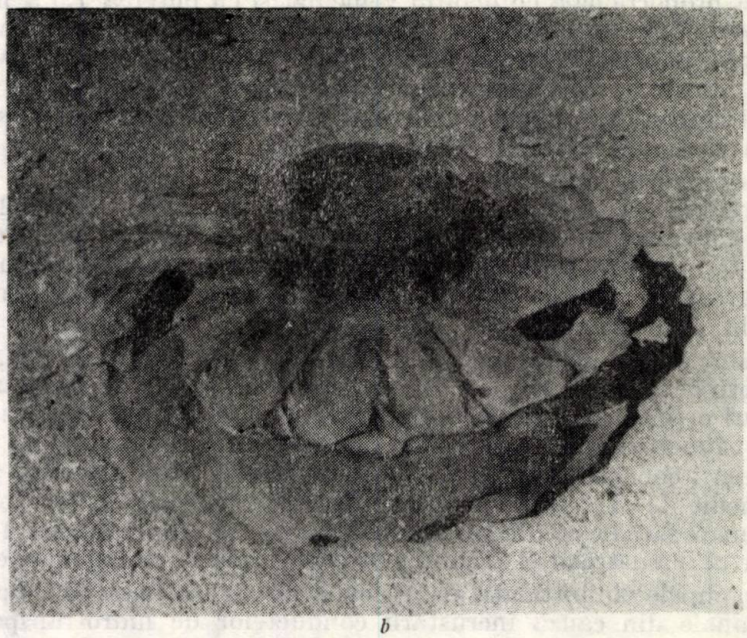


Fig. 9. — Curba de abraziune a rotorilor din FAER la pompele din instalația nr. II.

a



b

silicios și fonta aliată FAER. În vederea măririi rezistenței la abraziune am experimentat executarea blindajelor și rotorilor de la pompele din instalațiile nr. I și II dintr-un material sintetic românesc, de producție recentă,

plastdurom (fig. 10). După o durată de funcționare de circa trei ori mai mare față de durata medie de înlocuire a pieselor din oțel silicios, piesele din plastdurom nu au prezentat urme evidente de abraziune care să necesite înlocuirea acestora. Folosirea noului material este indicată în special la diametre mai mici ale rotoarelor și la turații ridicate, fapt verificat pe

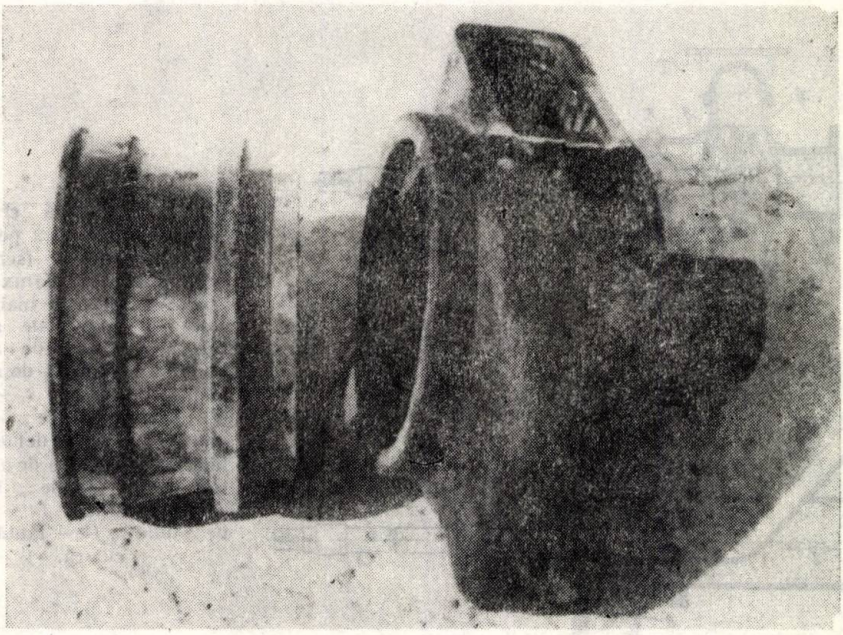


Fig. 10. — Rotor cu stuțul de aspirație (Instalația nr. I) executate din plastdurom.

loturi mari la pompele centrifuge pentru hidrotransport din industria minieră [29].

Pentru diminuarea abraziunii se cunosc unele soluții constructive care constau în introducerea materialului solid după o pompă cu apă curată [30], soluții care nu și-au găsit însă aplicarea industrială generalizabilă. În continuare prezentăm principial două soluții noi pentru pomparea suspensiilor abrazive : o pompă centrifugă cu dublu flux și un dispozitiv funcționînd pe baza fenomenului de ejecție.

Pompa centrifugă cu dublu flux pentru transportul hidraulic al materialelor solide (figura 11, [31] funcționează cu două fluxuri : unul cu apă de amestec și altul cu suspensie concentrată. Fluxurile parcurg separat, în condiții diferențiate, aspirația și zona activă a pompei. La ieșirea din zona activă a pompei fluxul de apă antrenează prin ejecție fluxul cu suspensie concentrată. Fluxul de apă parcurge un traseu în care sînt condiții optime transmiterii momentului cinetic de la palele rotorice corespunzătoare, iar fluxul de suspensie concentrată are un traseu pe care se realizează o curgere cu viteze moderate și cu schimbări limitate de direcție, avînd suprafețele de contact protejate cu piese din materiale rezistente la

abraziune uşor de executat şi de înlocuit (spre exemplu, placa rotorică demontabilă din fig. 11).

La o pompă centrifugă obişnuită materialul solid friabil se amestecă cu apă înainte de aspiraţia pompei, iar construcţia rotorului trebuie să corespundă în acelaşi timp la transmiterea momentului cinetic asupra suspensiei pompate la un randament ridicat (care necesită forme complexe

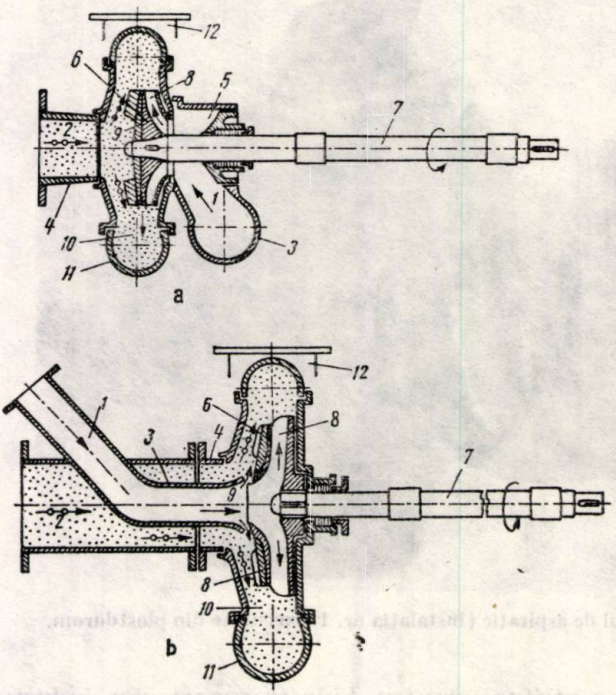


Fig. 11. — Pompa centrifugă cu dublu flux pentru hidrotransport (scheme principiale); *1* — flux de apă; *2* — flux cu material solid; *3* — ştuţ de aspiraţie; *4* — ştuţ de aspiraţie; *5* — cameră de aspiraţie; *6* — rotor; *7* — ax; *8* — pale rotorice; *9* — placă rotorică demontabilă; *10* — spaţiu de amestec prin ejecţie; *11* — carcasă spirală; *12* — ştuţ de refulare; *13* — fantă circulară.

ale palelor rotorului, elemente constructive din materiale uşor prelucrabile, viteze de curgere în funcţie de înălţimile de pompare cerute), precum şi la abraziunea suspensiilor pompate (ceea ce necesită forme simple ale palelor rotorului, piese din materiale rezistente la abraziune uşor de executat şi de înlocuit, viteze de curgere limitate). Întrucît aceste cerinţe sînt în neconcordanţă, construcţia pompelor pentru suspensii abrazive se realizează în urma unor compromisuri şi prezintă în consecinţă dezavantajele corespunzătoare.

Noul tip de pompă reprezintă de fapt, în aceeaşi carcasă, un rotor de apă curată care realizează înălţimea de pompare şi un dispozitiv de introducere a materialului solid friabil la periferia rotorului. Principalele avantaje ale acestui tip de pompă constau în mărirea domeniilor de utilizare ale pompelor centrifuge la concentraţii şi granulometrii sporite ale particulelor solide, îmbunătăţirea rezistenţei la abraziune, precum şi realizarea în pompă a amestecului fazei solide cu apa de transport, ceea ce permite reducerea sau eliminarea bazinelor de aspiraţie.

La dispozitivul pentru pomparea suspensiilor abrazive (figura 12, [32]) se elimină elementele în mișcare în contact cu suspensia abrazivă care reprezintă partea cea mai vulnerabilă la pompele centrifuge obișnuite. Funcționarea dispozitivului se bazează pe fenomenul de ejecție radial-tangențială produs de un debit de apă distribuit continuu sau discontinuu în interiorul unei carcase spirale sau circulare. Debitul de apă antrenează

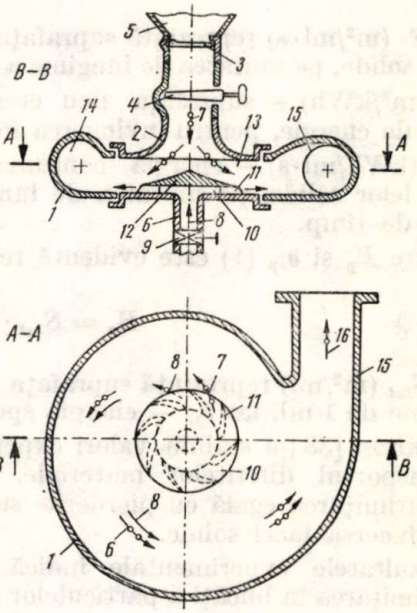


Fig. 12. — Dispozitiv pentru pomparea suspensiilor abrazive (schemă principială); *1* — carcasă; 2 — ștuț de aspirație; *3* — clapetă de reținere; *4* — vană; *5* — buncăr; *6* — conductă de alimentare; *7* — flux cu material solid; *8* — flux de apă; *9* — vană; *10* — injector; *11* — pale directoare; *12* — placă antiabrazivă; *13* — spațiu de amestec prin ejecție; *14* — carcasă spirală; *15* — ștuț de refulare; *16* — flux de suspensie (pompat).

debitul de particule abrazive într-o mișcare circulatorie spre stuțul de refulare al carcasei, pe unde este evacuat cu o anumită presiune. Avantajele principale ale acestui dispozitiv constau în îmbunătățirea rezistenței la abraziune (piesa cea mai solicitată este o placă antiabrazivă ușor de executat și de înlocuit), posibilitatea pompării unor particule cu granulometrii și abrazivități ridicate; posibilitatea de a reduce instalațiile conexe de amestec a fazei solide cu apa înainte de pompare (canale colectoare, bazine de amestec ș.a.).

3. ASPECTE PRIVIND DEGRADAREA PARTICULELOR SOLIDE TRANSPORTATE

Măcinarea particulelor solide în timpul transportului hidraulic și interacțiunea chimică a materialului solid cu lichidul purtător determină modificarea unor ipoteze inițiale de calcul ale instalațiilor de hidrotransport.

Particulele solide se fărîmițează și se rotunjesc în lungul conductelor, influențînd direct parametrii hidraulici și abraziunea conductei. În condiții de laborator s-a putut măsura modificarea curbei granulometrice a materialelor după fiecare ciocnire cu un perete rigid [5]. Degradarea meca-

nică a particulelor transportate este un fenomen calitativ asemănător abraziunii conductei, iar mărimea acesteia este corelată cu energia interacţiunii reciproce particule solide—peretele conductei. Pornind de la relaţia lui Rittenger (suprafaţa nou creată prin măcinare este direct proporţională cu energia cheltuită), avem

$$F = a \cdot E_p, \tag{12}$$

în care F ($m^2/ml \cdot s$) reprezintă suprafaţa nou creată prin fărîmiţarea particulelor solide, pe unitatea de lungime a conductei şi în unitatea de timp;

a (m^2/kWh) — suprafaţa nou creată la consumarea unei unităţi de energie, pentru învingerea forţelor de adeziune;

F_p ($kWh/ml \cdot s$) — energia consumată pentru fărîmiţarea particulelor solide, pe unitatea de lungime a conductei şi în unitatea de timp.

Între E_p şi e_{sp} (1) este evidentă relaţia:

$$E_p = S_{lat} \cdot e_{sp} \tag{13}$$

în care S_{lat} (m^2/ml) reprezintă suprafaţa peretelui conductei pe un tronson în lungime de 1 ml, iar e_{sp} — energia specifică de abraziune.

Trainis [33] a stabilit valori experimentale pentru coeficientul a la hidrotransportul diferitelor materiale, considerînd energia consumată pentru fărîmiţarea egală cu pierderile suplimentare de sarcină provocate de introducerea fazei solide.

Rezultatele experimentale indică, în general, proporţionalitatea între fărîmiţarea în bucăţi a particulelor solide cu puterea a treia a vitezei de curgere [34], în timp ce formarea categoriilor foarte fine din materialul transportat practic nu depinde de viteza de curgere [33]. Aceste corelaţii arată că fenomenul de fărîmiţare în bucăţi este cauzat în principal de energia cinetică de ciocnire (conform (13) şi termenului doi din (10) şi (11)), iar formarea categoriilor foarte fine de frecarea particulelor solide de peretele conductei (conform (13) şi primului termen din (10) şi (11)). În aceleaşi determinări experimentale [33], [34] s-a stabilit că fărîmiţarea depinde de puteri subunitare ale lungimii de transport, ceea ce arată scăderea valorii coeficientului a din relaţia (13) odată cu distanţa de transport. Acest rezultat se explică prin mărirea rezistenţei la fărîmiţare a particulelor după parcurgerea unei părţi a traseului, în care părţile slabe ale particulelor s-au desprins şi muchiile s-au rotunjit.

În instalaţiile experimentale nr. I şi II particulele de zgură poroasă evacuate de la focarele reci ale cazanelor, cu dimensiunea maximă iniţială de $d_{max} = 20-30$ mm, ajungeau în dreptul refulării conductelor după 2.600—3.200 m de transport la o granulaţie maximă de $d'_{max} = 1-3$ mm.

Pentru studierea evoluţiei în timp a dimensiunii particulelor solide am utilizat în condiţii de laborator un dispozitiv experimental simplu (fig.13*a* — cilindru orizontal umplut parţial cu hidroamestec şi antrenat într-o mişcare de rotaţie de două role motoare), care simula fenomenul de transport fără trecerea amestecului experimentat printr-o pompă. În

figura 13*b* se prezintă modul de evoluție a curbei granulometrice a unui conglomerat de nisip de Aghireș (material relativ ușor friabil, cum este și zgura poroasă). În figura 14*a* este redată scăderea dimensiunii medii a aceluiași material în funcție de o lungime echivalentă de transport $L_{echiv} = v_D \cdot t$ (v_D reprezintă viteza periferică a cilindrului din figura 13*a*, t — timpul de experimentare) și, corespunzător, variația vitezei critice cu

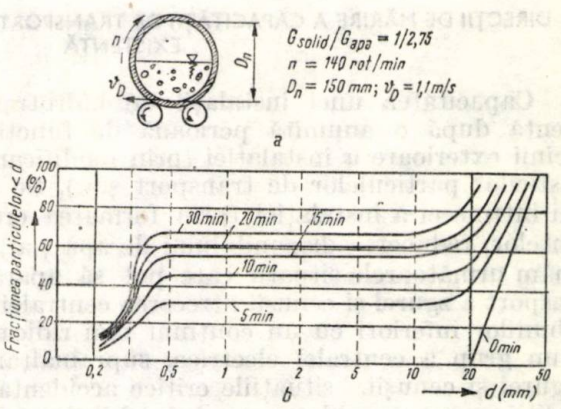


Fig. 13. — Modificarea curbei granulometrice în timp.

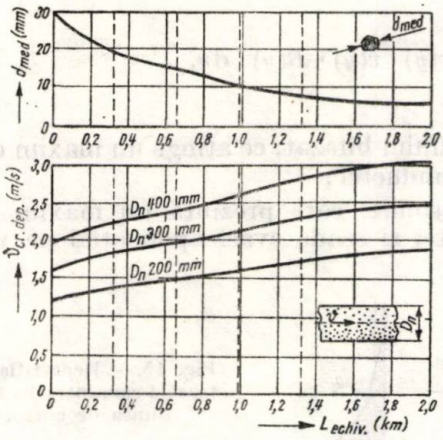


Fig. 14. — Variația dimensiunii particulelor solide (d_{med}) și a vitezei critice ($v_{cr.\ dep.}$) cu distanța de transport (L_{echiv}).

lungimea de transport pentru trei diametre ale conductei: D_n 200 mm, D_n 300 mm și D_n 400 mm. La estimarea vitezelor critice s-a utilizat diagrama lui Wilson [35].

Curbele granulometrice ale unor materiale solide, așa cum sînt unele sorturi de cenușă, se modifică după introducerea în apă. Astfel, dimensiunea medie a unui sort de cenușă analizat a scăzut de la $d = 0{,}0793$ mm (uscat) la $d' = 0{,}078$ mm (după 1 oră în apă) și la $d'' = 0{,}064$ mm (după 24 ore în apă).

Fărîmițarea particulelor solide conduce în anumite situații la schimbarea caracterului newtonian al curgerii într-un caracter nenewtonian.

Acest fenomen este specific la hidrotransportul cărbunelui inferior. Este ilustrativ faptul, că, la recircularea unui amestec de apă-lignit printr-o instalaţie de laborator D_n 100 mm, în concentraţie de $G_{\text{lignit}}/G_{\text{apă}} = 0{,}6$ viscozitatea efectivă a amestecului a crescut continuu prin degradarea materialului solid în suspensie în aşa fel, încît, a determinat după circa 30 minute de funcţionare blocarea instalaţiei.

4. DIRECŢII DE MĂRIRE A CAPACITĂŢII DE TRANSPORT HIDRAULIC LA O INSTALAŢIE EXISTENTĂ

Capacitatea unei instalaţii de hidrotransport poate deveni insuficientă după o anumită perioadă de funcţionare fie datorită măririi sarcinii exterioare a instalaţiei (prin modificarea debitului solid, a caracteristicilor particulelor de transport ş.a.), fie datorită diminuării capacităţii intrinseci a instalaţiei (prin formarea crustelor, abraziunea echipamentelor, reducerea disponibilului de apă ş.a.). Din prima categorie menţionăm următoarele situaţii care pot să apară la o instalaţie de hidrotransport a zgurei şi cenuşii : trecerea centralei termoelectrice pe utilizarea cărbunilor inferiori cu un conţinut mai ridicat de cenuşă, suplimentarea cu un grup a centralei electrice, supraînălţarea digurilor de depozitare a zgurei şi cenuşii, situaţiile critice accidentale de exploatare. În aceste condiţii se pune problema sporirii debitului solid Q_s transportabil, a cărui expresie într-o formă simplă este (fig. 15) :

$$Q_s = \int_0^D c(y) \cdot v(y) \cdot B(y) \cdot \mathrm{d}y, \tag{14}$$

în care v reprezintă viteza mediului bifazat, ce atinge un maxim deasupra axei geometrice a conductei ;

c — concentraţia fazei solide, care prezintă un maxim în parte inferioară a conductei şi scade cvasiexponenţial pe verticală.

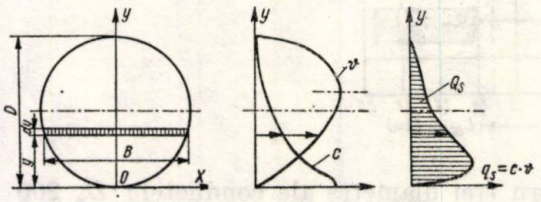


Fig. 15. — Repartiţia vitezei şi concentraţiei în secţiunea de curgere.

Analizînd expresia debitului solid (14) se pot desprinde următoarele direcţii de sporire a capacităţii de transport hidraulic :

— cu modificarea echipamentelor principale ale instalaţiei de hidrotransport : a) înlocuirea pompelor cu altele mai puternice $\left(Q_s = \int_0^D c \cdot \frac{v}{\uparrow} \cdot B \cdot \mathrm{d}y \text{ — creşte}\right)$; b) mărirea diametrului conductei, eventual pe por-

țiuni $\left(Q_s = \int_0^D c \cdot v \cdot \underset{\uparrow}{B \cdot dy} - \text{crește}\right)$. Aceste soluții, oarecum evidente, sînt costisitoare și necesită un timp îndelungat de realizare;

— fără modificarea echipamentelor principale ale instalației: a) prin sporirea concentrației fazei solide în hidroamestecul pompat pe baza recalculării parametrilor de transport, a modificării regimului de curgere sau a îmbunătățirii curbei granulometrice a particulelor solide [36], [37], [38] $\left(Q_s = \int_0^D \underset{\uparrow}{c \cdot v \cdot B} \cdot dy - \text{crește}\right)$; b) prin redistribuirea concentrației particulelor solide spre zona cu viteze ridicate din secțiunea de curgere utilizînd o structură elicoidală a mișcării medii dense ș.a. [39], [40] $\left(Q_s = \int_0^D \underset{\uparrow}{c \cdot v} \cdot B \cdot dy - \text{crește}\right)$; c) prin introducerea unor aditivi cu rolul principal de a reduce pierderile de sarcină în conducte și pompe [41] $\left(Q_s = \int_0^D \underset{\uparrow}{c \cdot v} \cdot B \cdot dy - \text{crește}\right)$; d) prin folosirea unor benzi antiabrazive cu secțiunea în formă de sector circular astfel ca în dreptul concentrațiilor mari lățimea secțiunii de curgere să fie superioară față de secțiunea circulară [40], [14], [42] $\left(Q_s = \int_0^D \underset{\uparrow}{c \cdot B} \cdot v \cdot dy - \text{crește}\right)$; e) prin reglarea vitezei de curgere în funcție de valorile variabile ale debitului solid, în vederea reducerii consumurilor specifice de apă și de energie [40]; *f*) prin soluții constructive, de material sau de exploatare pentru limitarea efectelor produse de abraziune și formarea crustelor, în vederea menținerii capacității de transport inițiale $\left(Q_s = \int_0^D c \cdot v \cdot \underset{\uparrow}{B \cdot dy} - \text{constant}\right)$.

Fără a insista în acest articol asupra căilor de mărire a capacității de transport, vom menționa posibilitatea de utilizare a aditivilor (tip polimer, tip săpun ș.a.) într-o concentrație de sub 0,1% în hidroamestecul pompat. Se obțin reduceri ale pierderilor de sarcină liniară cu zeci de procente, cu amenajări reduse ale instalațiilor respective. În figura 16 sînt redate rezultate experimentale de laborator obținute pe conducte D_n 100 mm cu un aditiv tip polimer — poliacrilamidă, produs în țară. Dacă considerăm curba pompei cvasiorizontală într-un domeniu dat al debitelor, avem

$$Q/Q_0 = \sqrt{\lambda_0/\lambda}, \tag{15}$$

în care Q_0, Q reprezintă debitele, respectiv, fără și cu introducerea aditivului;

λ_0, λ — coeficienții unitari ai pierderilor de sarcină liniară la curgere, respectiv, fără și cu introducerea aditivului.

În cazul instalației nr. II, în ipoteza reducerii pierderilor de sarcină liniare cu 40% față de curbele caracteristice reale, debitul crește la funcționarea unor pompe cu 19% (de la 565 m³/h la 670 m³/h), iar la funcționarea a două pompe în paralel cu 25% (de la 650 m³/h la 815 m³/h). Această me-

todă este utilă în special în anumite situații critice de exploatare (avarii, manevre speciale, reparații) care, în general, au o durată scurtă de desfășurare. În cazul unui aditiv cu preț redus poate fi justificată metoda și pentru economisirea energiei de pompare. Un aspect specific care trebuie studiat în fiecare aplicație este efectul poluant al aditivului în apa de transport după deversare.

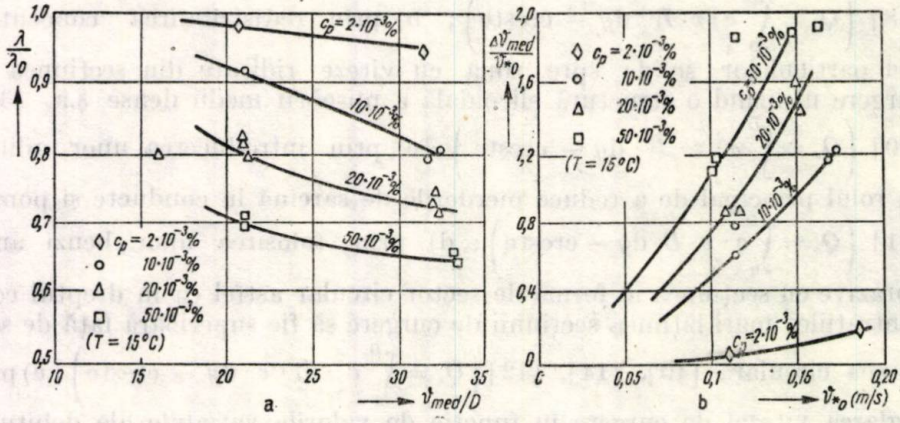


Fig. 16. — Influența aditivului (poliacrilamidă) asupra unor mărimi hidraulice ; λ și λ_0 reprezintă coeficienții unitari ai pierderilor de sarcină liniare, respectiv, cu și fără aditiv ; D — diametrul conductei ; v_{med} — viteza medie în conductă ; v_{*0} — viteza de frecare la perete : c_p — concentrația aditivului (poliacrilamidă).

5. PARTICULARITĂȚI ALE FENOMENELOR TRANZITORII ÎN INSTALAȚIILE DE HIDROTRANSPORT

Într-o instalație de transport a unui lichid omogen este cunoscut un singur regim tranzitoriu caracteristic, determinat de variația bruscă a debitului la modificarea condițiilor de curgere (strangularea conductei, manevrarea pompei ș.a.), denumit lovitură de berbec.

O instalație de transport hidraulic a materialelor solide este caracterizată, pe de o parte, prin modificarea loviturii de berbec cunoscută în cazul fluidelor omogene și, pe de altă parte, prin apariția unor noi tipuri de fenomene tranzitorii (fig. 17) :

— fenomen tranzitoriu datorat variației bruște (în intervale de ordinul secundelor) a concentrației volumice sau a greutății specifice a fazei solide din hidroamestec în momentul trecerii prin pompă (fig. 17*a*, *1* și *2*), care se manifestă și sub forma loviturii de berbec în conductă :

— fenomene tranzitorii cauzate de variația progresivă a concentrației, a greutății specifice sau a granulometriei fazei solide la trecerea prin pompă și în lungul conductei, cu o durată de ordinul minutelor sau zecilor de minute. Menționăm trei cazuri particulare : mărirea și scăderea progresivă a concentrației la punerea în funcțiune și la oprirea unei insta-

lații de hidrotransport (fig. 17*b*—*3*); transmiterea unor unde de concentrație variabilă în lungul conductei, fenomen caracteristic la drăgi (fig. 17*b*—*4*); depunerea și antrenarea materialului solid depus de pe fundul conductei, fenomen ce apare la conductele de hidrotransport „nespălate" înainte de întreruperea funcționării (fig. 17*b*—5) și în cazul variației vitezei la regimul de curgere cu depunere;

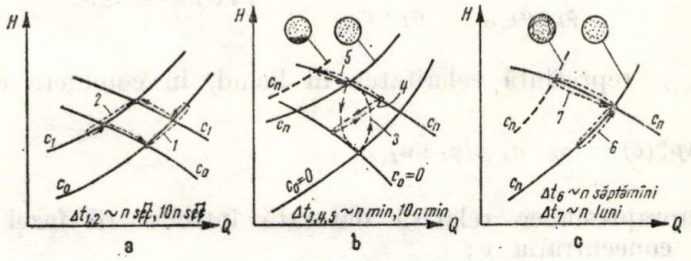


Fig. 17. — Deplasarea punctului de funcționare $Q - H$ (debit — înălțime de pompare) în timpul unor fenomene tranzitorii.

— fenomene tranzitorii provocate de abraziunea sau încrustarea echipamentelor instalației, cu intervale caracteristice de ordinul săptămînilor, lunilor sau anilor. Menționăm două situații: abraziunea rotorului pompei și înlocuirea cvasiperiodică cu unul nou, după intervale de ordinul săptămînilor (fig. 17*c*—*6*, vezi § 2.2); depunerea progresivă a crustelor pe conductele de hidrotransport cu înlocuirea sau curățarea acestora, după intervale de ordinul lunilor sau anilor (fig. 17*c*—*7*, vezi [1]).

Pentru a ilustra importanța acestor fenomene tranzitorii în instalațiile de hidrotransport, neglijate în practica curentă, vom prezenta în continuare unele considerații de calcul cu exemplificări pentru instalațiile nr. I și II (ale căror scheme sînt date în prima [1] a lucrării).

Suprapresiunea maximă care apare la lovitura de berbec într-o conductă prin care curge un lichid omogen (Δp_L) are expresia

$$\Delta p_L = \rho_L \cdot a_L \cdot v_0, \tag{16}$$

în care ρ_L reprezintă masa specifică a lichidului;

a_L — celeritatea în lichid, în interiorul conductei date;

v_0 — viteza de curgere în conductă.

În cazul hidrotransportului unui mediu bifazat lichid-particule solide printr-o conductă pe care s-au format cruste, expresia suprapresiunii maxime ($\Delta p_{s,cr}$) este

$$\Delta p_{s,cr} = \rho_B \cdot a_{s,cr} \cdot v_{0,cr}, \tag{17}$$

în care ρ_B reprezintă masa specifică a mediului bifazat;

$a_{s,cr}$ — celeritatea în lichidul cu particule solide, în conducta cu cruste;

$v_{0,cr}$ — viteza de curgere în conducta cu cruste.

Suprapresiunea relativă în cazul hidrotransportului ($\Delta p^*_{s,cr}$) va fi:

$$\Delta p^*_{s,cr}(c, g) = \frac{\Delta p_{s,cr}}{\Delta p_L} = \frac{\rho_B \cdot a_{s,cr} \cdot v_{0,cr}}{\rho_L \cdot a_L \cdot v_0} =$$

$$= \frac{\rho_{BL} \cdot a_{s,cr}}{\rho_L \cdot a_{L,cr}} \cdot \frac{a_{L,cr} \cdot v_{0,cr}}{a_L \cdot v_0} = \Delta p^*_s(c) \cdot \Delta p^*_{cr}(g), \tag{18}$$

în care $a_{L,cr}$ reprezintă celeritatea în lichid, în conducta cu cruste;

$$\Delta p^*_s(c) = \rho_B \cdot a_{s,cr} / \rho_L \cdot a_{L,cr} \tag{19}$$

— suprapresiunea relativă datorată introducerii fazei solide în lichid, cu concentrația c;

$$\Delta p^*_{cr}(g) = a_{L,cr} \cdot v_{0,cr} / a_L \cdot v_0 \tag{20}$$

— suprapresiunea relativă datorată crustei g depuse în interiorul conductei de transport.

Mărirea suprapresiunii în cazul loviturii de berbec în mediul bifazat lichid-particule solide față de cazul lichidului omogen Δp^*_s este determinată în principal de greutatea specifică și de concentrația fazei solide și practic nu depinde de dimensiunea și forma particulelor [43]. Suprapresiunea relativă Δp^*_s pentru hidrotransportul zgurei și cenușii rezultate din arderea lignitului din instalațiile nr. I și II ($\rho_s/\rho_L \approx 2$) se poate estima cu relația:

$$\Delta p^*_s(c) = 1 + c + 0{,}74\, c^{2,4}. \tag{21}$$

Această expresie aproximează bine rezultatele experimentale (eroarea relativă sub 3%) pentru orice grosime a peretelui conductei, respectiv orice grosime de crustă.

După efectuarea calculelor elementare pentru stabilirea vitezei și a celerității într-o conductă cu depuneri de crustă prin care curge un fluid oarecare, obținem următoarele raporturi semnificative pentru calculul suprapresiunii relative Δp^*_{cr}:

$$\frac{v_{0,cr}}{v_0} = \frac{1}{(1 - 2g^*)^2}, \tag{22}$$

$$\frac{a_{L,cr}}{a_L} = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{E^*_p \cdot e^*_p}}}{\sqrt{1 + \dfrac{(1 - 2g^*)^2}{E^*_p \cdot e^*_p + E^*_{cr} \cdot g^* \cdot (1 - 2g^*)}}}, \tag{23}$$

în care E_p^*, E_{cr}^* reprezintă mărimile adimensionale ale modulului de elasticitate, respectiv, al peretelui conductei ($E_p^* = E_p/E_L$) și al crustei ($E_{cr}^* = E_{cr}/E_L$); E_L, E_p, E_{cr} — modulul de elasticitate, respectiv, al lichidului, peretelui conductei și crustei;

g^* — mărimea adimensională a grosimii crustei ($g^* = g/D_n$); g — grosimea crustei; D_n — diametrul interior al conductei;

e_p^* — mărimea adimensională a grosimii peretelui conductei ($e_p^* = e_p/D_n$); e_p — grosimea peretelui conductei.

Introducînd (20)—(23) în relația (18) obținem expresia finală a suprapresiunilor relative la hidrotransportul zgurei și cenușii în conductele din instalațiile nr. I și II:

$$\Delta p_{s,cr}^*(c, g^*) = \frac{\sqrt{1 + \dfrac{1}{E_p^* \cdot e_p^*}}}{\sqrt{1 + \dfrac{(1-2g^*)^2}{E_p^* \cdot e_p^* + E_{cr}^* \cdot g^* \cdot (1-2g^*)}}} \cdot \frac{1 + c + 0{,}74\, c^{2,4}}{(1-2g^*)^2}. \quad (24)$$

Particularizînd relația (24) pentru fiecare instalație studiată în parte (instalația nr. I: $D_n = 505$ mm, $e_p = 8$ mm, $E_p^* = 100$, $E_{cr}^* = 9{,}5$ și instalația nr. II: $D_n = 305$ mm, $e_p = 8$ mm, $E_p^* = 100$, $E_{cr}^* = 9{,}5$) s-au trasat în figura 18*a*, *b* variațiile suprapresiunilor relative la hidotransport

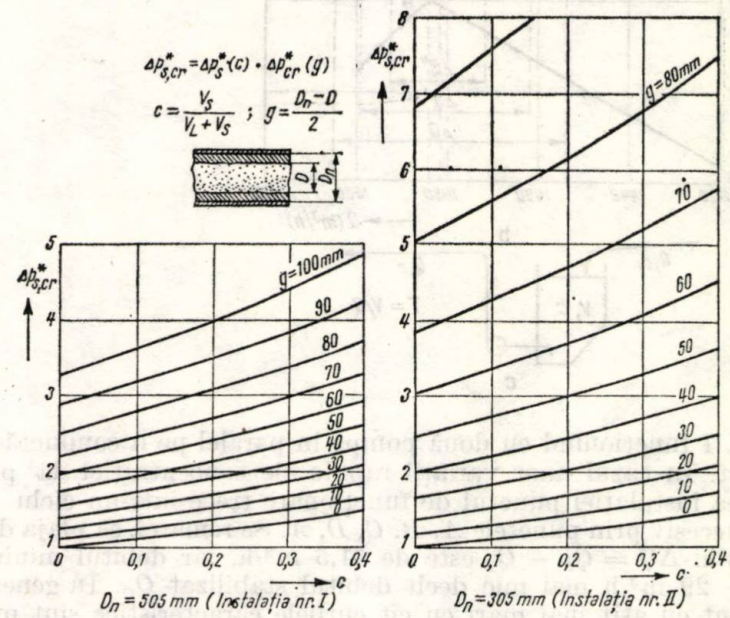


Fig. 18. — Variația suprapresiunilor relative la hidrotransport, cu concentrația (c) și cu grosimea crustei (g).

$\Delta p_{s,cr}$ în raport cu parametrii determinanți: concentrația c și grosimea g a crustei.

Variația punctului de funcționare debit-înălțime de pompare *la mărirea și scăderea progresivă a concentrației* (fig. 17*b*—*3*) are o plajă suficient de mare și poate da naștere la regimuri de curgere periculoase. În figura 19 sînt reprezentate curbele caracteristice experimentale ale insta-

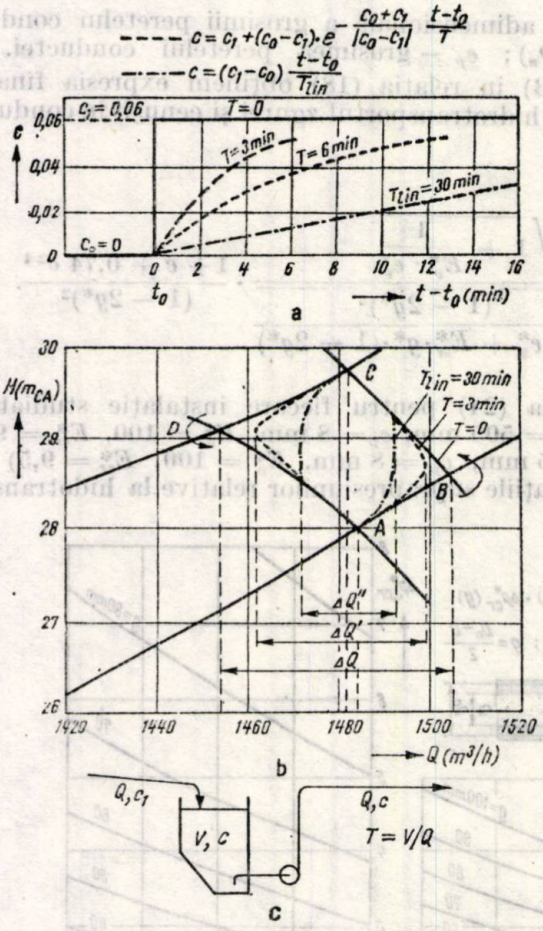


Fig. 19. — Regimuri tranzitorii la variația concentrației în instalația nr. I.

lației nr. I funcționînd cu două pompe în paralel pe o conductă de hidrotransport. În cazul unor variații rapide ale concentrației la pornirea și la oprirea instalației punctul de funcționare trece într-un ciclu pornire—oprire succesiv prin punctele A, B, C, D, A. Se remarcă că plaja de variație a debitului $\Delta Q = Q_B - Q_D$ este de 51,5 m³/h, iar debitul minim Q_D este cu circa 29 m³/h mai mic decît debitul stabilizat Q_C. În general, aceste valori sînt cu atît mai mari cu cît curbele caracteristice sînt mai aplatizate în dreptul punctului de funcționare. Întrucît alimentarea pompelor în instalația nr. I se realizează dintr-un bazin de amestec, variația concen-

trației hidroamestecului se atenuează într-o anumită măsură la intrarea în pompă. Vom calcula atenuarea unei variații rapide a concentrației de la o valoare c_0 la alta c_1, pornind de la ecuația de bilanț a fazei solide în bazinul de amestec (fig. 19*c*),

$$V \cdot \mathrm{d}c = (Q \cdot c_1 - Q \cdot c) \cdot \mathrm{d}t, \tag{25}$$

în care V reprezintă volumul bazinului de amestec;
c — concentrația medie în bazinul de amestec la un moment dat, $c = c(t)$;
c_1 — concentrația la intrarea în bazin;
Q — debitul de hidroamestec;
t — timpul.

După gruparea termenilor, ecuația diferențială (25) devine

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} - \frac{c}{T} - \frac{c_1}{T} = 0, \tag{26}$$

în care $T = V/Q$ reprezintă timpul de umplere al bazinului de amestec.

Considerînd o variație rapidă a concentrației de la o valoare c_0 la alta c_1 (fig. 19*a*), soluția ecuației (26) are forma

$$c(t) = c_1 + (c_0 - c_1) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{c_0 + c_1}{|c_0 - c_1|} \cdot \frac{t - t_0}{T}}. \tag{27}$$

Introducînd valoarea timpului de umplere a bazinelor de amestec. din instalația nr. I: $T \approx 3$ min. și considerînd un ciclu pornire—oprire a instalației la o concentrație nominală de 0,06, avem:

— la mărirea concentrației : $c_0 = 0$; $c_1 = 0{,}06$,

$$c(t) = 0{,}06 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-(t - t_0)/3}); \; t, \; t_0 \text{ în minute}, \tag{28}$$

— la reducerea concentrației:

$$c(t) = 0{,}06 \cdot \mathrm{e}^{-(t - t_0)/3}; \; t, \; t_0 \text{ în minute}. \tag{29}$$

În figura 19*a* este reprezentat modul de variație al concentrației la pornire pentru $T = 3$ min., conform relației (28), iar în figura 19*b* sînt trasate traiectoriile punctului de funcționare al instalației nr. I într-un ciclu pornire—oprire. Punctul de funcționare la un moment dat depinde de valoare instantanee a concentrației în pompă și de gradul de propagare a undei de concentrație în lungul conductei.

Datorită regimului de funcționare al cazanelor, variația concentrației nu este în general bruscă, ci se desfășoară într-un interval de 15—30 minute. Acceptînd o variație liniară a concentrației în decurs de 30 minute se obțin curbele corespunzătoare pentru variația concentrației și a traiectoriei punctului de funcționare a instalației nr. I, redate în figura 19*a*, *b*.

Se observă că plaja de pendulare a debitelor (ΔQ în fig. 19), provocată de variațiile bruște ale concentrației, se reduce cu 28% prin introducerea bazinului de amestec ($T = 3$ min) și cu 60% în cazul variației liniare a concentrației în decurs de 30 de minute.

6. CONCLUZII

În această parte (II) a lucrării privind caracteristicile de exploatare ale instalațiilor de hidrotransport sînt evidențiate aspecte referitoare la abraziunea echipamentelor, degradarea particulelor solide transportate, soluții pentru ameliorarea capacității de transport a instalațiilor și particularitățile fenomenelor tranzitorii. Se prezintă rezultate experimentale asupra modificării rugozității conductelor ce transportă suspensii, a modului de abraziune al conductelor și pompelor centrifuge de hidrotransport. Pentru mărirea rezistenței la abraziune se indică unele soluții noi de protejare a conductelor și de realizare a sistemului de pompare. Fărîmițarea particulelor solide în timpul transportului poate fi evaluată cantitativ pe cale semiempirică și influențează în principal viteza critică și abraziunea în conducte. Din ansamblul căilor de mărire a capacității de transport, aplicabile la o instalație existentă, se remarcă efectul unui aditiv (poliacrilamidă, polimer produs în țară) de reducere a pierderilor de sarcină. Lovitura de berbec din conductele de hidrotransport se intensifică odată cu mărirea concentrației fazei solide și a grosimii crustei depuse, suprapresiunile suplimentare putînd fi exprimate analitic. În paralel, în instalațiile de hidrotransport apar noi tipuri de fenomene tranzitorii datorate variațiilor în timp ale concentrației, ale regimului de curgere bifazată și ale parametrilor funcționali ai echipamentelor.

Datele prezentate în lucrare — I și II — arată importanța studierii instalațiilor de hidrotransport din punct de vedere evolutiv în perioada de funcționare, a cărei trăsătură principală este tendința de scădere progresivă a capacității de transport. Rezultatele experimentale și elementele de calcul sînt exemplificate la două instalații industriale de evacuare hidraulică a zgurei și cenușii (D_n505 mm și D_n305 mm). În urma analizei fenomenelor specifice se propun unele soluții pentru îmbunătățirea comportării în exploatare a instalațiilor de hidrotransport.

Primită la redacție la 13 decembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. M. Roco, *Evoluția caracteristicilor de funcționare ale instalațiilor de hidrotransport a zgurei și cenușii în timpul exploatării. I*, St. cerc. mec. apl., **37**, 5 (1978).
2. N. A. Silin, Y. K. Vitoșkin. *Ghidravliceskii transport uglia v truboprovodah i rasciotie ispolzovanie*, Kiev, 1964.
3. J. Hrbek, F. Kupka, *Vyprocet zakladnich parametro pri hydraulicke doprave popeloviv*, Strojirenstvi, *4* (1970).
4. G. P. Tilly, W. Sage, *The interaction of particle and material behaviour in erosion processes*, Wear, **16**, *6* (1970).

5. S. P. Turcianinov, *Vliianie abrazivnosti gornih porod pri ih transportirovanii po truboprovodam*, Ugoli, *10* (1970).
6. N. S. Penkin, *Aspects of the mechanism of wear of vulcanisates under conditions of impact hydroabrazive wear*. Soviet Rubber Techn., **29**, *8* (1970).
7. E. Kriegel, *Verschleiß und Abrieb bei hydraulischen Transport*, Industrie Anzeiger, **91**, *47* (1969).
8. A. E. Smoldîrev, V. V. Moskvitin, *Influența regimului de circulație a materialelor aflate în suspensie asupra uzurii conductelor*, Trad. I.N.I.D., din Gheologhia i razvedca *11* (1970).
9. M. Roco, *Instalații de transport hidropneumatic*, Note de curs Institutul Politehnic București (1977).
10. I. G. Posledninchenko, *Opredelenie optimalnih skorostei ghidravliceskov transportu șlaka*, Elektriceskie Stanții, *5* (1970).
11. V. V. Moskvitin, *O mehanizme ghidroabrazivnovo iznosa truboprovodov*, Fiziko-tehniceskie problemi nazrabotki poleznih iskopaemih, **6**, *5* (1970).
12. A. E. Smoldîrev, *Truboprovodnii transport*, Moscova, 1970.
13. G. Wilson, *The design aspects of centrifugal pumps for abrasive slurries*, Hydrotransport 2, Conference. paper H2, B.H.R.A., Cranfield (1972).
14. M. Roco, St. Zarea, *Protecție antiabrazivă a conductelor*, Brevet R.S.R. nr. 67 149.
15. M. Roco, D. Ionescu-Ș, *Conductă cu protecție antiabrazivă*, Brevet R.S.R. nr. 65906.
16. M. Roco, *Conductă pentru transportul hidraulic al materialelor granulare*, Brevet R.S.R. nr. 65903.
17. M. Roco, C. Novac, *Program pentru calculul hidraulic al conductelor protejate antiabraziv*, ICEMENERG (1976).
18. M. Roco, St. Zarea, *A new hypothesis about turbulent flow to obtain velocity distribution in cylindrical pipes*, Rev. Roum. Sci. Techn. -Méc. Appl., **23**, *6* (1978).
19. M. Roco, G. Frăsineanu, *Metodă și program pentru calculul caracteristicilor de curgere ale fluidelor bifazate lichid — particule solide prin conducte și canale*, St. cerc. mec. apl., **36**, *3* (1977).
20. M. Roco, C. Niculae, *Mărirea eficienței hidrotransportului zgurilor și cenușilor*, I, ICEMENERG (1975).
21. M. Roco, *Protecție antiabrazivă pentru tronsoane curbe ale conductelor de transport*, Brevet R.S.R. nr. 65904.
22. M. I. Scharpov, Brevet U.R.S.S. nr. 239752, 1969.
23. B. Scarlett, A. Grimley, *Particle velocity and concentration profiles during hydraulic transport in a circular pipe*, Hydrotransport 3 Conference, paper D3, B.H.R.A., Cranfield, (1974).
24. M. Roco, *Cercetări experimentale asupra vitezei critice în conductele pentru transportul hidraulic al solidelor*, St. cerc. mec. apl., **36**, *1* (1977).
25. W. Wiedenroth, *The influence of sand and gravel on the characteristics of centrifugal pumps, some aspects of wear in hydraulic transportation installations*, Proc. Hydrotransport 1 Conference, paper E 1, B.H.R.A., Cranfield (1970).
26. V. I. Karenin, R. A. Novoderejkin, A. I. Denisov, *Nekatorie zakonomernosti ghidroabrazivnovo iznosa nasosov*, Vodonabjenie i sanitarnovo tehnika, *7* (1971).
27. N. V. Treiner, A. A. Tai, V. I. Nikitin, N. A. Paikov, *Vlianie conțentrații zoloșlakovoi ghidrosmesi na iznoe transportiruiușchih nasosov*, Elektriceskie Stanții, *8* (1973).
28. A. Kratzer, *Auswahlkriterien für Bauteile von Kreiselpumpen zur Förderung von feststoffhaltigen Flüssigkeiten*, Pumpentagung Karlsruhe, 1978.
29. N. Mican, M. Roco, *Protecția utilajelor miniere și de preparare împotriva abraziunii și coroziunii*, I.C.P.M.M.N. (1975).
30. L. Kocsányi, H. Maurer, *Rohraufgeber für die hydraulische Förderung*, Glückauf, **108**, *24* (1972).
31. M. Roco. *Pompă centrifugă cu dublu flux pentru transportul hidraulic al materialelor solide*, Brevet R.S.R. nr. 65799.
32. M. Roco, B. Mae, *Procedeu și dispozitiv pentru pomparea suspensiilor abrazive*, Brevet R.S.R. nr. 65800.
33. V. V. Trainis, *Parametri i rejimi dlia ghidravliceskii transport uglia po provodi*, Nedra, Moscova, 1970.
34. E. C. Worster, D. F. Denny, *Degradation and wear in hydraulic transport systems*, Mining Journal, **244**, *6245* (1955).
35. K. C. Wilson, D. G. Judge, *Analitically — based nomographic charts for sand-water flow*, Proc. Hydrotransport 5 Conference, B.H.R.A., Cranfield (1978).

36. M. Roco, *Stabilirea parametrilor principali la transportul hidraulic al cenuşii rezultate din arderea şisturilor bituminoase*, Energetica, **22**, *8—9* (1974).
37. V. Harnaj, *Teză de doctorat*, I.P.G.G., Bucureşti, 1967.
38. C. Asszonyi, L. Kapolyi, *An experimental method to produce a size distribution ensuring maximum pipeline capacity*, Proc. Hydrotransport 2 Conference, paper D 3, B.H.R.A., Cranfield (1972).
39. Şt. Zarea, M. Roco, *Influence of the helical flow on hydraulic transport capacity of solids through pipes*, Internationaly Symposium on Dredge Technology, paper C 2, B.H.R.A., Canterbury (1975).
40. M. Roco, *Mărirea capacităţii de transport a zgurei şi cenuşii prin conducte*, Prima Conferinţă a Energeticienilor din România. lucrarea **VI** *29*, Bucureşti (1975).
41. P. Katsibas, C. Balakrishman, D. White, R. J. Gordon, *Drag reduction corelations*, International Conference on Drag Reduction, paper B 2, B.H.R.A., Cranfield (1974).
42. H. B. Sauerman, *Hydraulischer Transport in Rohrleitungen mit nicht kreisförmigem Querschnitt*, Proc. Hydrotransport 5 Conference, B.H.R.A., Cranfield (1978).
43. D. T. Kao, D. J. Wood, *Pressure surge generation due te rapid shutdown of pipelins conveying slurries*, Proc. Hydrotransport 5 Conference, B.H.R.A., Cranfield (1978).

UTILIZAREA PROCEDEELOR SEISMICE LA DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MECANICE ALE TERENURILOR DE FUNDAȚIE ȘI LA MICROZONAREA SEISMICĂ A AMPLASAMENTELOR

de EMIL GEORGESCU

Institutul de proiectări transporturi auto, navale și aeriene

Se prezintă modul de determinare a caracteristicilor mecanice ale masivelor de pămînt solicitate de sarcini dinamice, cu ajutorul metodelor seismice, în special pentru depozitele de pietrișuri și bolovănișuri, unde metodele de laborator nu dau rezultate satisfăcătoare. De asemenea, se prezintă o nouă metodă de microzonare seismică și rezultatele obținute într-o zonă din apropierea Cheia-Prahova.

În cele mai frecvente cazuri, fundațiile construcțiilor sînt amplasate în terenuri alcătuite din roci necoezive care se pot caracteriza printr-o serie de proprietăți fizice diferite ce se manifestă semnificativ în întreaga masă, atît la suprafață, cît și în adîncime, acestea aflîndu-se într-o stare complexă de tensiuni.

Este știut că determinările parametrilor elastici ai rocilor se pot face atît în laborator, cît și pe teren („in situ") prin diferite metode.

În cazul efectelor sarcinilor vibratoare, vehicule în mers sau forțe seismice, este nevoie să cunoaștem modulul dinamic de elasticitate al terenului de sub fundație, precum și felul cum sînt legate aceste fenomene de reacția terenului la aceste sarcini dinamice.

Mărimile deformațiilor ce se produc în teren nu pot fi măsurate în cadrul studiilor de laborator, caracteristicile elasto-plastice ale rocilor determinate în atare condiții sînt adesea departe de a ilustra situația din natură.

Pe amplasamentul stației de sol Cheia-Prahova (fig. 1), s-a urmărit testarea aplicabilității tehnicii de rutină a metodei seismice de refracție pentru determinarea modulului dinamic de elasticitate și microzonarea seismică, funcție de natura terenului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 4, 1979, P. 595–602

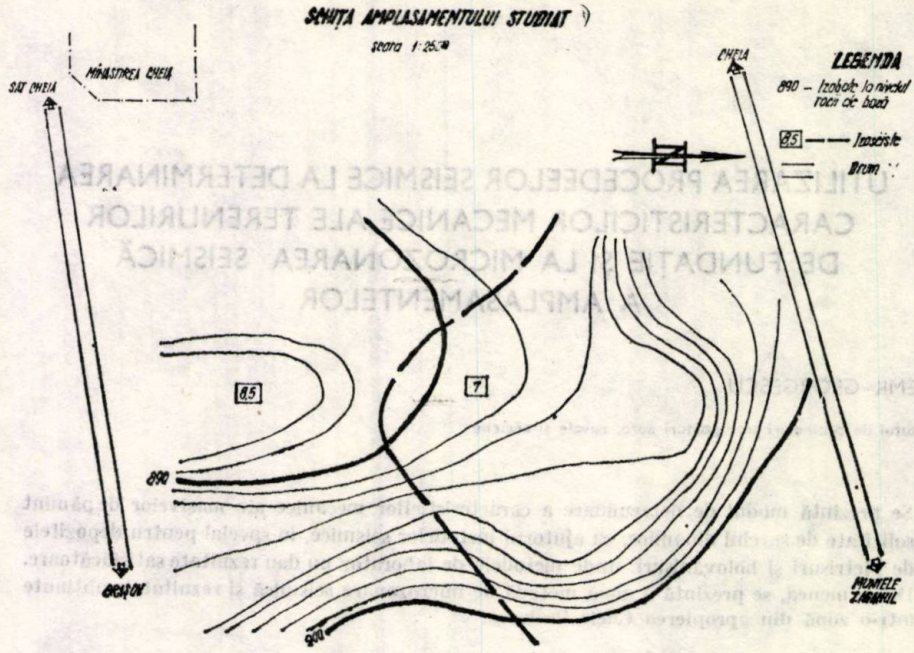


Fig. 6

1. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MECANICE ÎN DEPOZITELE DE PIETRIȘURI ȘI BOLOVĂNIȘURI

Modulul dinamic de elasticitate este considerat de unii autori ca modulul deformației la un moment dat, definit ca raportul între tensiunea aplicată și deformarea rezultată imediat. Datorită timpului scurt de acționare în cadrul încercărilor cu ajutorul undelor elastice, acestea sînt caracteristici dinamice.

Propagarea undelor elastice se face printr-o succesiune de comprimări și destinderi ale căror amplitudini sînt întotdeauna egale între ele, timp în care nu sînt posibile schimbări de energie cu mediul înconjurător, procesul fizic fiind adiabatic, iar măsurătoarea reflectă mai mult proprietățile elastice ce se manifestă la încercări instantanee.

Prin procedeul refracției seismice se determină adîncimea rocii de bază și vitezele de propagare a undelor longitudinale și transversale în stratele pe care acestea le străbat.

Relațiile teoretice și empirice stabilite, pun în evidență interdependența între viteza undei seismice longitudinale, viteza undei seismice transversale și modulul dinamic de elasticitate [6].

Viteza undei seismice longitudinale, care se înregistrează în cadrul prospecțiunii seismice de refracție obișnuită, cu geofonul vertical, este legată de modulul dinamic de elasticitate prin relația

$$E_d = 1{,}34 \cdot 10^{-2} \cdot V_l^2 \cdot \rho \cdot \frac{(1+\mu)(1-2^{\mu})}{1-\mu}, \qquad (1)$$

unde E_d este modulul dinamic de elasticitate în psi[pound(Av) Sq. inch],
V_l — viteza undei longitudinale în ft/s (1 ft = 0,3048 m),
ρ — densitatea aparentă în g/cm^3,
μ — coeficientul lui Poisson,
1 psi = 0,0703 kg/cm^2.

Prin măsurarea vitezei undei seismice transversale (V_t) în același mediu. cu ajutorul geofonului orizontal, se poate determina coeficientul lui Poisson direct din relația

$$\mu = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_l}{V_t}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_l}{V_t}\right)^2 - 1}. \qquad (2)$$

Experiența acumulată pînă în prezent întărește concepția că variația coeficientului Poisson depinde de natura materialului, de gradul de compactitate, de porozitate, de rigiditate și de conținutul în apă, ceea ce face ca într-un mediu necoeziv să varieze în limite foarte largi, modul de stabilire a acestuia conducînd la erori suficient de mari în calculul modulului dinamic de elasticitate.

Prin înregistrarea atît a vitezelor undei seismice longitudinale, cît și transversale, precum și determinarea densității aparente a mediului studiat în faza de teren, se poate aproxima relativ bine valoarea modulului dinamic de elasticitate în funcție de adîncime.

Coeficientul lui Poisson, fiind o proprietate caracteristică fiecărui material ce alcătuiește pămîntul, în general variază în limite suficient de restrînse 0,2 ÷ 0,3 pentru roci dure, 0,3 ÷ 0,35 pentru nisipuri și 0,4 ÷ 0,5 pentru argile.

Depunerile uscate, de suprafață, se caracterizează prin viteze mici ale undelor seismice și de obicei printr-un coeficient al lui Poisson relativ mic. Dacă conținutul de apă crește, se constată și o creștere a coeficientului lui Poisson pentru toate materialele alterate sau neconsolidate. De fapt, deoarece apa nu întreține undele transversale, este aproape sigur că pentru un material dat, viteza undei seismice transversale poate descreste odată cu creșterea conținutului de apă.

Măsurătorile seismice au fost făcute lîngă toate lucrările de sondaj (puțuri deschise) executate în perimetrul cercetat, unde pentru orizontul de pietriș sau bolovăniș s-au făcut determinări ale densității aparente, în opt locații.

În baza formulelor (1) și (2) s-a calculat modulul dinamic de elasticitate, așa cum rezultă din tabelul 1.

Din analiza rezultatelor obținute se constată că a fost posibilă determinarea coeficientului Poisson a cărui valoare se situează în limite suficient de largi 0,30 ÷ 0,39, caracterizînd un material slab coeziv cu granulometrie variabilă, umed, îndesat, fapt pus în evidență și de valorile vitezei undei seismice longitudinale, suficient de ridicate, cuprinse în limitele 1200 m/s și 1680 m/s, așa cum de fapt arată și valorile densităților aparente determinate pe teren.

Tabelul 1

Nr. Sondaj	adîncimea (m)	descriere litologică	densitatea aparentă — σ (g/cm³)	Viteza undei longitudinale (V_l)		Viteza undei transversale (V_t)		coeficientul lui Poisson μ	Modulul dinamic de elasticitate E_d.	
				fl/s	m/s	ft/s	m/s		psi	kg/cm².
1	3,60	Pietriș cu bolovăniș cu slab liant argilos	1,96	5.200	1.560	2.600	780	0,33	475.820	33.307
2	4,10		1,94	4.700	1.410	2.200	660	0,35	356.030	24.922
3	3,40		1,92	4.400	1.320	2.200	660	0,33	333.723	23.360
4	3,20		1,82	5.000	1.500	2.200	660	0,37	341.432	23.900
5	3,00		1,94	4.400	1.320	2.200	660	0,33	342.242	23.957
6	3,00		1,70	5.600	1.680	2.300	690	0,39	357.190	25.003
7	3,00		1,92	4.800	1.440	2.300	690	0,30	438.652	30.706
8	3,00		1,82	4.000	1.200	2.000	600	0,33	261.439	18.301
MEDIA VALORILOR MODULULUI DINAMIC DE ELASTICITATE									360.817	25.432

Apreciind starea terenului după valorile coeficientului Poisson se poate separa o zonă în partea de nord a perimetrului cercetat unde, pe relieful morfologic al unei văi cu exces de umiditate s-a calculat o valoare de 0,39 caracteristică depozitelor argiloase. De remarcat că aceeași diferențiere s-a putut face și pe baza valorilor de rezistivitate electrică prin procedeul sondajului electric vertical (S.E.V.).

Măsurătorile seismice pentru determinarea „in situ" a modulului dinamic de elasticitate au pus în evidență o valoare medie de 360.000 psi. ceea ce corespunde la circa 25.300 kg/cm², caracteristică depozitelor de pietrișuri și bolovănișuri umede, cu îndesare diferită și slab liant argilos.

2. MICROZONAREA SEISMICĂ

În cadrul cercetărilor pentru detalierea gradului de intensitate macroseismică au fost executate măsurători directe ale vitezelor de propagare a undelor elastice la partea superficială a terenului (zona vitezelor mici = Z.V.M.) în perimetrul construibil.

Lucrările întreprinse pentru microzonarea seismică au comportat următoarele faze :

a) cercetarea materialului documentar referitor la manifestările seismice anterioare și încadrarea perimetrului în zona cu grad de seismicitate corespunzător ;

b) stabilirea caracteristicilor geologice-inginerești pe baza particularităților litologice, geomorfologice, hidrogeologice și geotehnice ale formațiunilor existente ;

c) determinarea pe teren a vitezelor de propagare a undelor elastice în depozitele de suprafață.

Situația geografică a regiunii ce cuprinde perimetrul cercetat, impune cunoașterea influențelor seismice produse de cutremurele monokinetice din care fac parte cele moldavice. În unitatea geologică considerată, pe lîngă influența epicentrului important (cel din munții Vrancei), există și o serie de influențe datorate epicentrelor din partea de est a Cîmpiei Munteniei.

S-a considerat că în zona cercetată intensitatea seismică poate atinge valoarea maximă 7, așa cum de fapt este prevăzută în STAS 2923-63, care se referă la zonele de macroseismicitate de pe teritoriul R.S. România.

Din punct de vedere geologic perimetrul se încadrează în zona filișului curbicortical sau de Teleajen, la poalele masivului Ciucaș în preajma unei linii de fractură, unde apar depozite de filiș foarte caracteristice, formate din depozite de gresii curbicorticale în alternanță strînsă cu depozite argiloase-marnoase-nisipoase cenușii închise la culoare. La partea superioară se întîlnesc depozite de material de con de dejecție.

Adîncimea nivelului hidrostatic este relativ variabilă în limitele 2—6 m. de la suprafața terenului, uneori mai ridicată în partea de nord, acolo unde pe alocuri apa bălțește în apropierea unui mic pîrîu cu apă permanentă.

Determinările de viteză pentru undele longitudinale s-au făcut pe baza înregistrărilor efectuate cu seismograful portabil tip F.S — 3, pe un număr de 23 profile, calculînd viteza medie de strat pentru depozitele de deasupra rocii de bază. Valorile vitezelor de strat calculate sînt cuprinse între 1020 m/s și 1680 m/s, datorită variației litologice precum și diferențierii umidității naturale. Măsurătorile densității aparente efectuate în sondajele executate au indicat valori ce se înscriu între 1,70 g/cm^3 și 1,96 g/cm^3 pentru depozitele de la suprafață, în timp ce pentru roca de bază marnoasă s-a stabilit valoarea de 2,00 g/cm^3.

La baza microzonării seismice a stat materialul documentar al lui S. V. Medvedev [3] care, consideră că rigiditatea seismică a terenurilor poate constitui, alături de alți factori, un criteriu de mare importanță în lucrările inginerești. Definind rigiditatea seismică, ca produsul dintre densitatea aparentă a rocilor, ρ, și viteza de propagare a undei longitudinale, V, s-a stabilit corecția intensității macroseismice conform relației

$$C_s = 1{,}67 \lg \frac{V_0 \cdot \rho_0}{V_n \rho_n}, \tag{3}$$

unde C_s este corecția intensității seismice,

ρ_0 — densitatea aparentă a rocii etalon,
ρ_n — densitatea aparentă a rocii cercetate,
V_0 — viteza undei longitudinale în roca etalon,
V_n — viteza undei longitudinale în roca cercetată.

Pentru luarea în considerare a condițiilor hidrogeologice care influențează corecția intensității seismice, s-a adoptat relația empirică (4) care ține cont de adîncimea nivelului hidrostatic,

$$I_H = e^{-0,04 \cdot H^2}, \tag{4}$$

unde H este adîncimea nivelului hidrostatic (NH) în m.

Aplicînd și corectia influenței adîncimii nivelului hidrostatic, relația generală devine

$$C_s = 1,67 \frac{V_0 \cdot \rho_0}{V_n \cdot \rho_n} + e^{-0,04 \cdot H^2}. \tag{5}$$

În vederea stabilirii semnului corecției aplicate la fiecare punct de observație s-a avut în vedere că pot fi separate zone cu intensități seismice mai mici decît cele obținute prin observațiile macroseismice, conform relației

$$C = C_s - C_{s,\text{med}}, \tag{6}$$

unde C reprezintă corecția intensității seismice pentru punctul considerat,

$C_{s\text{med}}$ — valoarea medie a corecției intensității seismice, pentru terenurile cu condițiile cele mai defavorabile (în situația analizată, nivelul hidrostatic cel mai ridicat).

În tabelul 2 sînt prezentate elementele de calcul ale intensității seismice, considerînd pentru roca de bază marnoasă rigiditatea seismică medie de 4,8.

Se remarcă faptul că în cadrul microzonării seismice cel mai mare grad de intensitate seismică determinat în zonele cu condiții geologice — inginerești defavorabile nu depășește valoarea 7. Trebuie menționat că relieful perimetrului cercetat nu este accidentat, situat la cota medie de 890 m deasupra nivelului mării, nefiind afectat de procese dinamice evidente (deplasări de teren, fenomene carstice etc.).

Seismicitatea perimetrului cercetat este în cea mai mare parte funcție de activitatea seismică a regiunii hipocentrale adînci din zona Vrancea.

În cadrul microzonării s-a separat în partea de nord a perimetrului un sector cu gradul de intensitate seismică 7, acolo unde nivelul hidrostatic este mai ridicat în depozitele de terasă mai subțiri, predominante fiind materialele mai puțin grosiere.

Sectorul cu gradul de intensitate seismică 6,5 ocupă partea de sud a perimentrului, acolo unde se întîlnesc depozite mai grosiere pe o adîncime mai mare pînă la roca de bază, nivelul hidrostatic coborînd către zona văii cu apă permanentă ce curge în apropiere și în a cărei albie minoră marna aflorează la zi.

Din analiza microzonării seismice executată se conchide că cea mai mare influență asupra modificării gradului de intensitate seismică a avut-o adîncimea nivelului hidrostatic (NH).

Tabelul 2

Nr. curent	Nr. profil seismic	Nr. sondaj geotehnic	Viteza medie a undei longitudinale V(km/s)	Densitatea aparentă medie $\rho(t)$m^3)	Rigiditate seismică $R_s = V \cdot \rho$	Adîncimea (N) a nivelului hidrostatic NH(m)	Corecția intensității seismice în funcție de adîncimea NH $\Delta H = e^{-0{,}04H^2}$(grade)	*Corecția intensității seismice $C_s = 1{,}67/g\left(\frac{v_a\rho_0}{v_n\rho_n}\right) + e^{-0{,}04H^2}$ (grade)	Semnul corecției intensității seismice $C = C_s - C_{s\,med}$ (grade)	Intensitatea seismică conform STAS 2923—63 (grade)	Intensitatea seismică după datele de microzonare seismică (grade)	Observații
1	1	PD 102	1,41	1,94	2,73	6,50	0,18	0,66	−0,54	7	6,5	$C_{s\,med} = 1{,}20$ S-a estimat ca valoare medie a corecției pentru terenurile cele mai defavorabile *Corecțiile intensității seismice au fost calculate avînd ca etalon rigiditatea seismică a argilei marnoase (marna) ($R_s = 2{,}4 \times 2 = 4{,}8$)
2	2	PD 105	1,20	1,94	2,33	6,00	0,24	0,74	−0,46	7	6,5	
3	3	PD 103	1,20	1,92	2,30	4,50	0,44	0,94	−0,26	7	7	
4	4	PD 103	1,26	1,92	2,41	4,50	0,44	0,94	−0,26	7	7	
5	5	PD 106	1,68	1,70	2,85	3,60	0,60	1,10	−0,10	7	7	
6	8	PD 106	1,26	1,70	2,14	3,60	0,60	1,16	−0,04	7	7	
7	7	PD 106	1,50	1,70	2,55	3,60	0,60	1,10	−0,10	7	7	
8	9	PD 109	1,50	1,70	2,55	2,00	0,35	1,30	+0,10	7	7	
9	10	PD 110	1,20	1,70	2,04	3,00	0,70	1,30	+0,10	7	7	
10	11	PD 107	1,64	1,92	3,14	4,00	0,52	0,77	−0,43	7	6,5	
11	12	PD 107	1,50	1,92	2,88	4,00	0,52	0,92	−0,29	7	7	
12	13	PD 103	1,20	1,92	2,30	4,50	0,44	0,94	−0,26	7	7	
13	14	PD 104	1,20	1,82	2,18	6,00	0,24	0,80	−0,40	7	6,5	
14	15	PD 102	1,14	1,94	2,21	6,50	0,18	0,88	−0,52	7	6,5	
15	16	PD 108	1,20	1,82	2,18	6,50	0,18	0,68	−0,52	7	6,5	
16	17	PD 108	1,32	1,82	2,40	6,50	0,18	0,68	−0,52	7	6,5	
17	18	PD 108	1,20	1,82	2,18	6,50	0,18	0,88	−0,52	7	6,5	
18	19	PD 107	1,02	1,92	1,95	4,00	0,52	1,15	−0,05	7	7	
19	20	PD 107	1,11	1,92	2,13	4,00	0,52	1,10	−0,10	7	7	
20	21	PD 107	1,41	1,92	2,70	4,00	0,52	0,95	−0,25	7	7	
21	22	PD 101	1,26	1,96	2,46	5,80	0,26	0,70	−0,50	7	6,5	
22	23	PD 101	1,26	1,96	2,46	5,80	0,26	0,70	−0,50	7	6,5	
23	24	PD 101	1,29	1,96	2,52	5,80	0,26	0,70	−0,50	7	6,5	

Importanța influenței nivelului hidrostatic asupra construcțiilor justifică necesitatea cercetărilor de microraionare seismică, avînd în vedere că pentru proiectarea construcțiilor la parametrii impuși de condițiile reale existente în zona considerată se vor însuma economii materiale însemnate.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. I. Atanasiu, *Cutremurele de pămînt din România*, Edit. Academiei R.P.R., 1961.
2. B. Kujundzic, *Corelation between static and dynamic investigations of rock mass „in situ"*, Congresul de mecanica rocilor, Lisabona, 1966.
3. S. V. Medvedev, *Seismologie inginerească*, L. rusă, Moscova, 1962.
4. N. Mîndrescu, *Cercetări experimentale de microraionare seismică în zona de la confluența rîului Argeș cu rîul Neajlov*, St. cerc. geol. geofiz. geogr. *2*, seria geofizică, **7** (1969).
5. H. Link, *Zum Verhältnis seismisch un statisch ermittelter Elatizitätsmodul von Fels*, XVIII Kolloqium (Ludwig-Föppl-Kolloquim) der Östereichischer Gesellscahft für Geomechanic, Spinger Verlag, 1968.
6. * * * *Manual F. S—3*, Huntec Limited Canada, 1970.
7. I. Facoaru și alții, *Măsuri și control cu ultrasunete*, București, Edit. tehnică, 1965.
8. * * * STAS, 2923—63.
9. C. Radu, *Regimul seismic al regiunii Vrancei*, St. Cercet. geol. geofiz. geogr. *3*, seria geofizică **5** (1968).
10. N. Oncescu, *Geologia României*, București, Edit. tehnică, 1959.
11. INST. GEOLOGIC, *Harta geologică* 1 : 200.000 foaia Cheia.
12. L. Constantinescu și colab., *Prospecțiuni geofizice*, vol. II. Edit. tehnică, București, 1965.

CREȘTEREA TEMPERATURII ELECTROLITULUI ÎN ZONA DE LUCRU UN NOU CRITERIU DE STABILIRE A VITEZEI DE AVANS LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ

de MIRCEA IVAN, IOAN CRIȘTIAN

UNIVERSITATEA DIN BRAȘOV

Lucrarea arată deducerea relațiilor teoretice după care are loc variația temperaturii electrolitului de-a lungul interstițiului de lucru, la prelucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice, conice și sferice. După ce se prezintă verificarea experimentală a relațiilor teoretice deduse, în finalul lucrării se indică metodica de lucru pentru determinarea analitică a suprafețelor complexe, care pot fi descompuse în suprafețe elementare (cilindrice, conice sau sferice).

1. INTRODUCERE

Prelucrarea electrochimică reprezintă, alături de prelucrarea electroerozivă, unul din procedeele neconvenționale de prelucrare a metalelor, care se impune din ce în ce mai mult pe plan mondial.

Prelucrarea electrochimică este un procedeu de prelucrare a metalelor cu ajutorul curentului electric, care se bazează pe un proces de dizolvare anodică ce are loc în prezența unui electrolit (acid, bază, sare). Piesa de prelucrat este legată la polul pozitiv al unui generator de curent continuu, iar electrodul-sculă, cu formă apropiată de negativul piesei, se leagă la polul negativ al aceluiași generator. În spațiul dintre piesă și electrodul-sculă circulă cu viteză mare electrolitul, care spală produsele dizolvării anodice împiedecîndu-le să se depună pe catod.

Prelucrarea electrochimică se utilizează cu precădere la prelucrarea metalelor greu așchiabile, chiar și tratate termic, a căror prelucrare fie că este imposibilă, prin metodele clasice de așchiere, fie că necesită timp și consum foarte mare de scule. Ca principale avantaje ale prelucrării electrochimice pot fi menționate: productivitate foarte mare (10 ... 50 cm^3/min); compoziția chimică, structura și duritatea materialului piesei nu sînt afectate de prelucrare; electrodul-sculă nu se uzează; precizia de prelucrare ajunge pînă la 0,03 mm, iar rugozitatea suprafeței pînă la $R_z = 1\ \mu m$. Dezavantajele prelucrării electrochimice sînt următoarele: apar forțe apreciabile între electrodul-sculă și piesă, datorită faptului că pentru a se asigura curgerea cu viteză mare a electrolitului în spațiul de lucru acesta trebuie pompat la presiuni de ordinul 15 daN/cm^2, iar proiectarea și execuția electrodului-sculă este cu atît mai dificilă cu cît suprafața de prelucrat este mai complicată. În plus, nu se stăpînesc suficient de bine calculele analitice pentru corecția electrodului-sculă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 4, 1979, P. 603–616

Ca electrolit se utilizează, de obicei, soluții de NaCl, care asigură o productivitate bună, sau soluții de $NaNO_3$, care asigură o precizie mai bună de prelucrare.

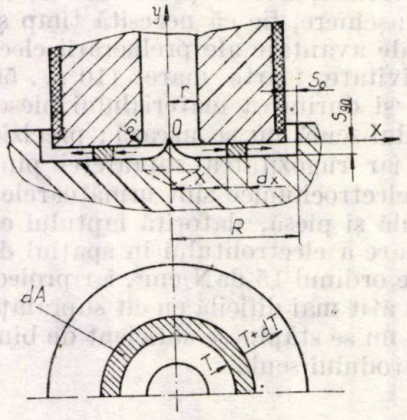
La prelucrarea electrochimică o deosebită importanță prezintă variația temperaturii în zona de lucru, căci creșterea temperaturii peste anumite limite (90°C la prelucrarea cu soluții de NaCl și 60°C la prelucrarea cu soluții de $NaNO_3$) duce la înrăutățirea condițiilor de prelucrare și randamentul prelucrării tinde spre zero. Cercetările făcute pînă în prezent în acest domeniu s-au referit fie la determinarea creșterii totale de temperatură, adică la stabilirea diferenței dintre temperatura electrolitului la ieșirea și intrarea în zona de lucru [1, 2], fie la stabilirea de relații teoretice ale variației temperaturii de-a lungul interstițiului de lucru la prelucrarea electrochimică a unor suprafețe foarte simple[3, 4].

Prezenta lucrare își propune să stabilească teoretic și apoi să verifice experimental legile de variație ale temperaturii de-a lungul interstițiului de lucru la prelucrarea suprafețelor cilindrice, conice și sferice, pentru cazul utilizării atît a soluțiilor nepasivizante de NaCl, cît și a celor pasivizante de $NaNO_3$. În finalul lucrării se indică metodica de lucru pentru determinarea analitică a creșterii temperaturii electrolitului la prelucrarea electrochimică a suprafețelor complexe, care pot fi descompuse în suprafețe elementare (cilindrice, conice sau sferice). Plecînd de la creșterea temperaturii, se poate stabili în continuare viteza de avans care să asigure o productivitate maximă prelucrării, fără ca temperatura electrolitului să depășească valoarea limită indicată anterior.

2. STABILIREA LEGII DE CREȘTERE A TEMPERATURII ELECTROLITULUI LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A SUPRAFEȚELOR CILINDRICE CU AXĂ VERTICALĂ

Se consideră prelucrarea electrochimică a unei suprafețe cilindrofrontale, de rază R, cu ajutorul unui electrod avînd un orificiu central, pentru alimentare cu electrolit, de rază r (fig. 1).

Pentru obținerea unor generatoare paralele cu axa de simetrie a suprafeței, electrodul-sculă, corectat cu mărimea interstițiului lateral S_0, se izolează pe suprafața laterală împiedecîndu-se astfel formarea de cîmpuri electrice parazite.



F ig. 1

Atașînd electrodului-sculă sistemul de coordonate xoy, se poate calcula mărimea suprafeței elementare prelucrate dA cu formula

$$dA = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dx. \qquad (1)$$

Cantitatea de energie dW ce se consumă în unitatea de timp pentru prelucrarea suprafeței elementare dA se poate calcula cu relația

$$dW = U \cdot J \cdot dA = 2\pi \cdot U \cdot J \cdot x \cdot dx, \qquad (2)$$

în care U reprezintă tensiunea de lucru aplicată electrozilor sculă și piesă, iar J — densitatea de curent din zona de lucru.

La prelucrarea electrochimică se poate considera că întreaga energie consumată la prelucrare se transformă în căldură și este preluată de electrolit, piesă și electrodul-sculă [2]. Deoarece debitele utilizate la prelucrarea electrochimică sînt mari, iar cantitățile de căldură ce se transmit piesei și sculei sînt mici, se poate admite că întreaga energie este preluată, sub formă de căldură, de către electrolit.

Dacă se notează cu T temperatura electrolitului la intrarea în elementul inelar, iar cu $T + \mathrm{d}T$ temperatura electrolitului la ieșirea din element, cantitatea de energie preluată de electrolit în unitatea de timp se se poate determina cu relația

$$\mathrm{d}W = q \cdot c \cdot \rho_E \cdot \mathrm{d}T, \tag{3}$$

în care q este debitul de electrolit, c — căldura specifică a soluției, iar ρ_E — densitatea electrolitului.

Egalînd relațiile (2) și (3) se obține creșterea de temperatură :

$$\mathrm{d}T = \frac{2\pi \cdot U \cdot J}{q \cdot c \cdot \rho_E} \, x \cdot \mathrm{d}x. \tag{4}$$

Pentru determinarea densității de curent J, în funcție de viteza de prelucrare v_d (egală în acest caz cu viteza de avans v_A a electrodului-sculă), s-au făcut prelucrări cu soluții de NaCl și de $NaNO_3$, în diferite oțeluri aliate, obținîndu-se variații liniare de forma celor din figura 2.

Deci între densitatea de curent și viteza de dizolvare, la prelucrarea cu soluții pasivizante de $NaNO_3$, există o dependență liniară de forma

$$v_d = v_A = V_{ef} \cdot J - B. \tag{5}$$

în care V_{ef} este volumul specific de material dizolvat, iar B — o constantă ce depinde de materialul de prelucrat și de caracteristicile soluției de electrolit (temperatură, concentrație).

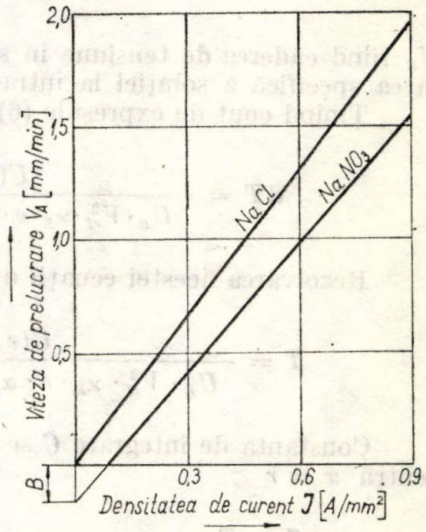


Fig. 2

La prelucrarea cu soluții de NaCl, $B = 0$.

Pornind de la relația (5) se poate calcula densitatea de curent în funcție de condițiile de prelucrare cu relația :

$$J = \frac{v_A + B}{V_{ef}}. \tag{6}$$

Pentru calculul debitului de electrolit experimentările făcute și prezentate în lucrările [1, 2] au arătat că la prelucrarea electrochimică se poate utiliza relația lui Bernoulli

$$q = \alpha_D \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho_E}} \cdot S\sqrt{\Delta p}, \tag{7}$$

celula electrochimică putînd fi asimilată cu o rezistență hidraulică.

În relația (7), α_D este un coeficient de debit ce depinde de forma secțiunii de curgere a electrolitului, Δp — diferența dintre presiunea electrolitului la intrarea și ieșirea din zona de lucru, iar S este secțiunea minimă de curgere a electrolitului.

Pentru cazul considerat secțiunea minimă de curgere se determină cu relația

$$S = 2\pi (r + r_0) \cdot S_{90} \tag{8}$$

Interstițiul frontal S_{90} se calculează în funcție de condițiile de prelucrare cu următoarea relație:

$$S_{90} = \frac{U_E \varkappa_E \cdot V_{ef}}{v_A + B}, \tag{9}$$

U_E fiind căderea de tensiune în soluția de electrolit, iar $\varkappa_E$ conductibilitatea specifică a soluției la intrarea în zona de lucru.

Ținînd cont de expresiile (6), (7), (8) și (9) relația (4) devine:

$$\mathrm{d}T = \frac{U(v_A + B)^2}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} x \cdot \mathrm{d}x. \tag{10}$$

Rezolvarea acestei ecuații diferențiale conduce la expresia

$$T = \frac{U(v_A + B)^2}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} \frac{x^2}{2} + C. \tag{11}$$

Constanta de integrare C se determină din condiția inițială $T = T_0$ pentru $x = r$

$$C = T_0 - \frac{U(v_A + B)^2}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} \cdot \frac{r^2}{2}. \tag{12}$$

Înlocuind expresia (12) în relația (11) se obține legea de variație a temperaturii electrolitului în spațiul de lucru la prelucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice cu axa verticală:

$$T = T_0 + \frac{U(v_A + B)^2}{2U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} (x^2 - r^2). \tag{13}$$

Avînd în vedere că mărimile U, T_0 și Δp se adoptă inițial, mărimile U_E, B, V_{ef} și α_D se determină experimental pentru diferite cupluri de electrozi și pentru diferite soluții de electroliți, mărimile $\varkappa_E$, c și ρ_E sînt caracteristice electrolitului utilizat, iar r și r_0 reprezintă mărimi geometrice ale electrodului-sculă, rezultă că relația (13) permite calcularea temperaturii electrolitului în orice punct situat în lungul profilului rectiliniu al părții frontale a cilindrului.

3. STABILIREA LEGII DE CREȘTERE A TEMPERATURII ELECTROLITULUI LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A SUPRAFEȚELOR CONICE

Se consideră prelucrarea electrochimică a unei suprafețe conice (fig. 3).

Urmărind aceiași metodică de lucru, în continuare se pun în evidență formele corespunzătoare pe care le iau ecuațiile (1), (6) și (8) pentru acest caz de prelucrare.

Suprafața elementară prelucrată devine:

$$\mathrm{d}A = 2\pi \cdot x \cdot \mathrm{d}L = \frac{2\pi \cdot x\, \mathrm{d}x}{\sin \alpha}, \tag{14}$$

α fiind semiunghiul conului.

Ținînd cont de legătura care există, în acest caz, între viteza de dizolvare și viteza de avans $v_d = v_A \cdot \sin \alpha$, expresia densității de curent devine:

$$J = \frac{V_A \cdot \sin \alpha + B}{V_{ef}}.$$

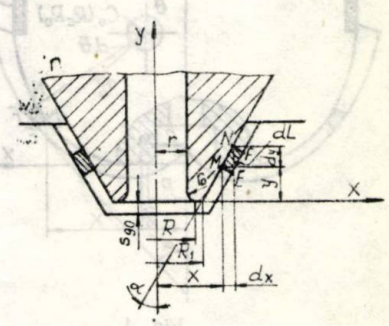


Fig. 3

Secțiunea minimă de curgere a electrolitului se determină cu relația

$$S = 2\pi(r + r_0) \cdot S_{90}. \tag{16}$$

Luînd în considerare relațiile (14), (15) și (16) se va obține următoarea expresie pentru creșterea $\mathrm{d}T$ a temperaturii:

$$\mathrm{d}T = \frac{U(v_A + B)(v_A \cdot \sin \alpha + B)}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}}\, x\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Rezolvarea acestei ecuații diferențiale conduce la expresia:

$$T = \frac{U(v_A + B)(v_A \sin \alpha + B)}{2U_E V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}}\, x^2 + C. \tag{18}$$

Pe baza condițiilor inițiale, $T = T_0$ la $x = R_1$, se va determina valoarea constantei de integrare cu ajutorul căreia se obține legea de variație a temperaturii electrolitului de-a lungul interstițiului de lucru, la prelucrarea electrochimică a suprafețelor conice la diferite regimuri de lucru și utilizînd diferiți electroliți :

$$T = T_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{U(v_A + B)(v_A \sin \alpha + B)}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0) \sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} (x^2 - R_1^2). \quad (19)$$

4. STABILIREA LEGII DE CREȘTERE A TEMPERATURII ELECTROLITULUI LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A SUPRAFEȚELOR CILINDRICE CU AXA ORIZONTALĂ

Se consideră prelucrarea electrochimică a unei suprafețe cilindrice cu axa de simetrie orizontală (fig. 4).

Pe baza aceluiași raționament ca la cazul anterior, expresiile suprafeței elementare prelucrate, densității de curent și secțiunii minime de curgere a electrolitului vor fi următoarele :

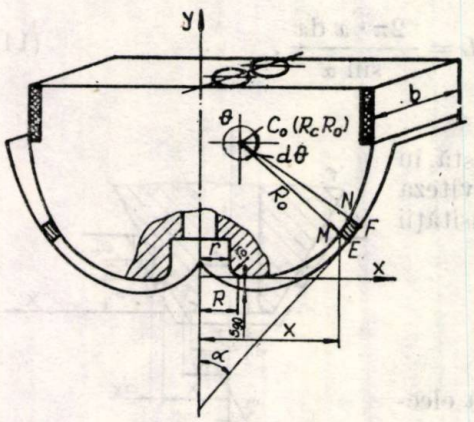


Fig. 4

$$dA = 2b \cdot dL = 2b \cdot R_0 \cdot d\theta, \quad (20)$$

$$J = \frac{v_A \sin \alpha + B}{V_{ef}}, \quad (21)$$

$$S = 2 \cdot b \cdot S_{90}. \quad (22)$$

Ținînd cont de relațiile (20), (21) și (22), și de faptul că $\alpha = 2\pi - \theta$ se obține expresia creșterii dT a temperaturii :

$$dT = -\frac{UR_0(v_A + B)}{U_E V_{ef}^2 \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D \sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} (v_A \cdot \sin \alpha + B)\, d\alpha. \quad (23)$$

Rezolvarea acestei ecuații diferențiale conduce la expresia :

$$T = \frac{UR_0(v_A + B)}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D \sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} (v_A \cdot \cos \alpha - B\alpha) + C. \quad (24)$$

Pe baza condițiilor inițiale, $T = T_0$ la $\alpha = 90°$, se va determina valoarea constantei de integrare cu ajutorul căreia se obține legea de variație a temperaturii electrolitului în lungul interstițiului de lucru, la pre-

lucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice cu axa orizontală, la diferite regimuri de lucru și utilizînd diferite tipuri de electroliți :

$$T = T_0 + \frac{UR_0(v_A + B)}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D \cdot \sqrt{2\rho_E \cdot \Delta p}} \left[v_A \cdot \cos\alpha + B\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]. \quad (25)$$

5. STABILIREA LEGII DE CREȘTERE A TEMPERATURII ELECTROLITULUI LA PRELUCRAREA ELECTROLITICĂ A SUPRAFEȚELOR SFERICE

Se consideră prelucrarea electrochimică a unei suprafețe sferice (fig. 5).

În acest caz expresiile suprafeței elementare prelucrate, densității de curent și secțiunii minime de curgere a electrolitului vor fi următoarele :

$$dA = 2\pi(R_c + R_0 \cos\theta) \cdot dL =$$

$$= 2\pi (R_c + R_0 \cos\theta) R_0 \cdot d\theta, \quad (26)$$

$$J = \frac{v_A \sin\alpha + B}{V_{ef}}, \quad (27)$$

$$S = 2\pi(r + r_0) \cdot S_{90}. \quad (28)$$

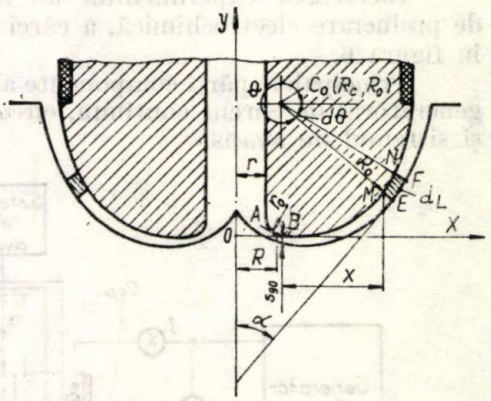


Fig. 5

Ținînd cont de relațiile (26), (27) și (28) și de faptul că $\alpha = 2\pi - \theta$, se obține expresia creșterii dT a temperaturii :

$$dT = \frac{-UR_0(v_A + B)}{U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} (v_A \sin\alpha + B)(R_c + R_0 \cos\alpha)\, d\alpha. \quad (29)$$

Rezolvarea acestei ecuații diferențiale conduce la expresia :

$$T = \frac{UR_0(v_A + B)}{U_E V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot \alpha_D \cdot c(r + r_0)\sqrt{2\rho_E \cdot \Delta p}} \left(R_c v_A \cos\alpha - \frac{1}{2} R_0 v_A \sin^2\alpha - \right.$$

$$\left. - BR_0 \sin\alpha - BR_c \alpha \right) + C. \quad (30)$$

Pe baza condițiilor inițiale, $T = T_0$ la $\alpha = 90°$, se va determina valoarea constantei de integrare cu ajutorul căreia se obține legea de variație a temperaturii electrolitului în lungul interstițiului de lucru, la prelu-

crarea electrochimică a suprafeţelor sferice, la diferite regimuri de lucru şi utilizînd diferite tipuri de electroliţi :

$$T = T_0 + \frac{UR_0(v_A + B)}{U_E V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0\sqrt{2\rho_E \cdot \Delta p}} \left[R_c \cdot v_A \cdot \cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} R_0 v_A (1 - \sin^2\alpha) + BR_0(1 - \sin\alpha) + BR_c\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]. \quad (31)$$

La prelucrarea cu soluţii nepasivizante de NaCl, $B = 0$, relaţia capătă o formă particulară simplificată, confirmată în lucrarea [5].

6. INSTALAŢIA DE ÎNCERCARE UTILIZATĂ

Încercările experimentale au fost făcute pe o instalaţie complexă de prelucrare electrochimică, a cărei schemă de principiu este prezentată în figura 6.

Principalele părţi componente ale acestei instalaţii sînt următoarele : generatorul de curent continuu, circuitul pentru electrolit, cuva de lucru şi sistemul de avans.

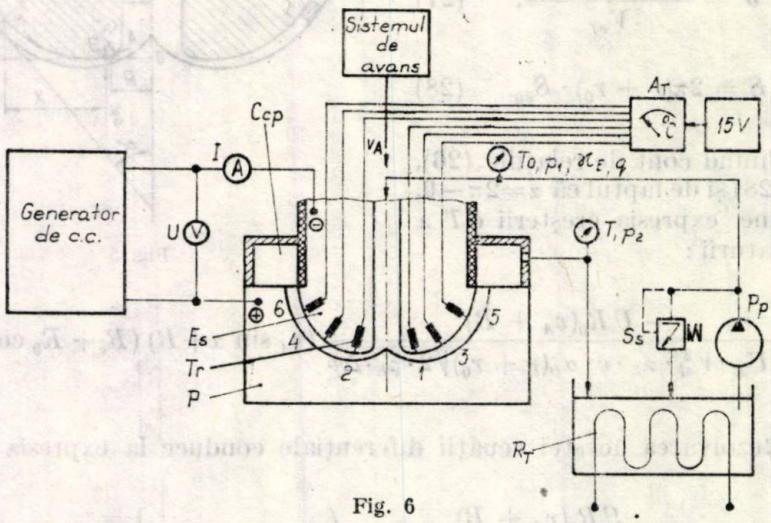


Fig. 6

Generatorul de curent continuu asigură alimentarea cu energie electrică, la un curent I de maximum 5 000 A şi o tensiune U reglabilă în intervalul 5—20 V.

Circuitul pentru electrolit asigură alimentarea zonei de lucru cu electrolit. Elementele componente, pompa de presiune P_p, supapa de siguranţă S_s, grupul de filtrare şi rezervorul cu sistemul de reglare a temperaturii R_T asigură menţinerea constantă a parametrilor electrolitului la intrarea în zona de lucru : temperatura T_0, presiunea p_1, conductibilitatea electrică $\varkappa_E$ şi debitul q.

În interiorul cuvei de lucru se fixează piesa de prelucrat P. Camera de contrapresiune C_{cp} asigură obținerea unei presiuni p_2 de ieșire a electrolitului din zona de lucru, presiune ce determină o uniformizare a curgerii în zona de lucru, împiedecînd astfel apariția nervurajelor pe suprafața prelucrată.

Sistemul de avans asigură deplasarea electrodului-sculă E_s cu o viteză v_A reglabilă în intervalul 0,25 ... 2 mm/min.

Instalația experimentală este dotată cu o serie de aparate necesare măsurării parametrilor de lucru. Pentru măsurarea temperaturii în zona de lucru se folosesc termorezistențele T_r fixate la suprafața electrodului sculă, izolate de acesta și distribuite în lungul profilului. Termorezistențele sînt montate în punțile de măsurare ale aparatului A_T.

7. PREZENTAREA ȘI INTERPRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Verificarea experimentală a relațiilor teoretice s-a efectuat pentru prelucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice cu axă verticală și pentru prelucrarea suprafețelor sferice. În timpul experimentărilor s-a măsurat temperatura la intrarea și ieșirea din zona de lucru precum și debitul de electrolit ce trece prin zona de lucru pentru diferite viteze de avans, diferite soluții de electroliți și diferite materiale de prelucrat.

Pentru verificarea relației (13), care arată legea de variație a temperaturii electrolitului în spațiul de lucru la prelucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice cu axa verticală, s-au utilizat ca electroliți o soluție de NaCl cu concentrație de 12% și alta de $NaNO_3$ cu concentrație de 20% (s-a recurs la aceste concentrații pentru a se ajunge la aceiași conductibilitate specifică a ambelor soluții de electrolit).

Experimentările s-au făcut pe epruvete executate din oțelul de matriță MoCN15 utilizînd trei viteze diferite de avans : 0,75 ; 1 și 1,45 mm/min.

Celelalte valori necesare pentru rezolvarea relației (13), în cazul folosirii NaCl, sînt următoarele : $T_0 = 308°K$; $p_1 = 12$ daN/cm², $p_2 = 3$ daN/cm² ; $V_{ef} = 2{,}46$ mm³/A.min ; $U_E = 13{,}2V$ ($U = 15V$, $\Delta U = 1{,}8V$) ; $B = 0$; $\rho_E = 1\,050$ kg/m³ ; $c = 378$ kJ/kg.°K ; $\varkappa_E = 164$ mms/cm ; $\alpha_D = 0{,}84$; $r = 10$ mm, $r_0 = 1{,}5$ mm.

Pentru cazul folosirii soluției de $NaNO_3$ diferă doar următoarele mărimi : $V_{ef} = 2{,}33$ mm³/A. min ; $U_E = 10{,}5$ V ($U = 15$ V, $\Delta U = 4{,}5$ V) $B = 0{,}19$ mm/min.

Rezultatele experimentale obținute la prelucrarea cu soluție de NaCl sînt prezentate în figura 7, iar cele obținute în cazul folosirii soluției de $NaNO_3$ sînt prezentate în figura 8.

Pentru comparație sînt trasate cu linie continuă curbele teoretice calculate cu ajutorul relației (13). Se constată o apropiere foarte mare între rezultatele experimentale și curbele teoretice, ceea ce confirmă justețea ipotezelor de calcul.

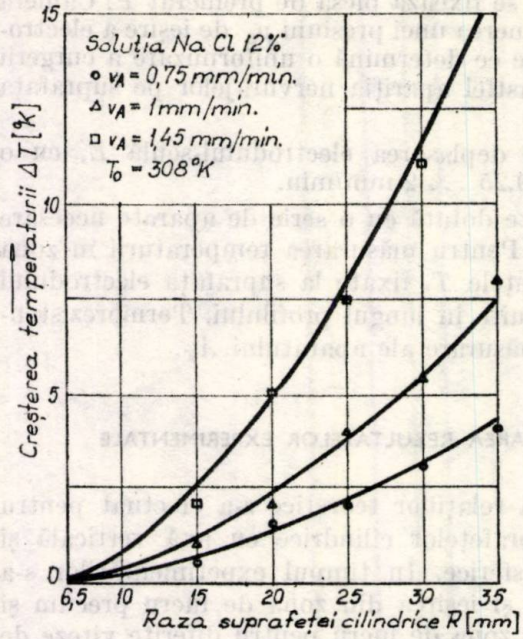


Fig. 7

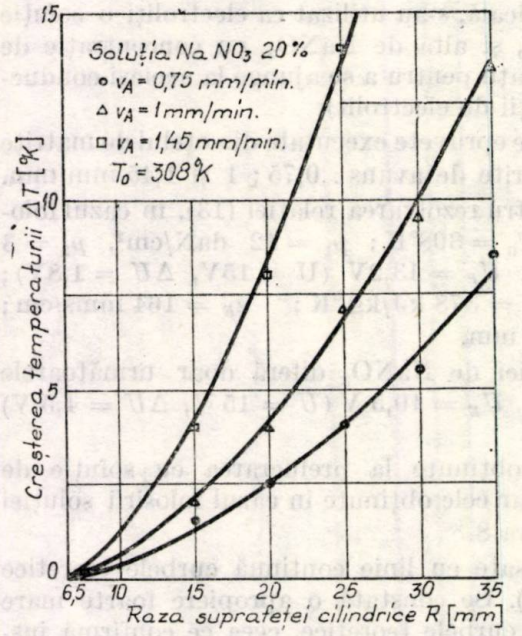


Fig. 8

Analizînd rezultatele obținute se constată că influența hotărîtoare asupra creșterii temperaturii în zona de lucru o are viteza de avans v_A. De asemenea, influențe importante au și parametrii electro-chimici de bază ai materialului de prelucrat ca B, U_E și V_{ef}.

Comparînd creșterile de temperatură la prelucrarea cu aceeași viteză de avans dar cu electroliți diferiți, se observă o creștere mult mai mare a temperaturii în cazul prelucrării cu soluție de $NaNO_3$. Acest lucru se datorează fenomenului de pasivizare ce apare în materialul de prelucrat, care determină o mai mare cădere de tensiune în acest strat și deci micșorarea căderii de tensiune în electrolit U_E. Micșorarea tensiunii U_E are ca efect micșorarea interstițiului de lucru, fenomen ce determină reducerea debitului de electrolit și deci creșterea temperaturii electrolitului.

Pentru verificarea relației (31), care arată legea de variație a temperaturii electrolitului în spațiul de lucru la prelucrarea suprafețelor sferice, s-au utilizat tot soluții de NaCl 12% și de $NaNO_3$ 20%.

Utilizînd patru viteze diferite de avans (0,79; 1,02; 1,22 și 1,45 mm/min), s-au executat experimentări pe epruvete dintr-un oțel aliat cu Ni, Cr, Mo, V (0,7%) și cu un procent de 0,56%C.

Pentru punerea în evidență a modului cum diferența de presiune $\Delta p = p_1 - p_2$ influențează asupra creșterii temperaturii electrolitului, s-au efec-

tuat experimentări cu două presiuni p_1 de intrarea electrolitului în zona de lucru (14 și 18 daN/cm²), menținînd constantă presiunea de ieșire $p_2 = 4$ daN/cm².

Restul valorilor necesare pentru rezolvarea relației (31), în cazul folosirii NaCl, sînt următoarele: $T_0 = 308°K$; $V_{ef} = 2{,}15$ mm³/A. min. $U_E = 13V$ ($U = 15$ V, $\Delta U = 2V$); $B = 0$; $\rho_E = 1\,050$ kg/m³; $c = 3{,}78$ kJ/kg · °K; $\varkappa_E = 164$ mm⁵/cm; $\alpha_D = 0{,}85$; $r = 5$ mm; $r_0 = 1{,}5$ mm.

În cazul folosirii soluției de $NaNO_3$ diferă doar următoarele mărimi:

$$V_{ef} = 1{,}95 \text{ mm}^3/\text{A.min}; \quad U_E = 10{,}7V \ (U = 15\text{V}, \ \Delta U = 4{,}3V).$$

$$B = 0{,}25 \text{ mm/min [6]}.$$

Rezultatele experimentale obținute la prelucrarea suprafețelor sferice cu soluție de NaCl sînt prezentate în figura 9, iar cele obținute în cazul folosirii soluției de $NaNO_3$ sînt reprezentate în figura 10.

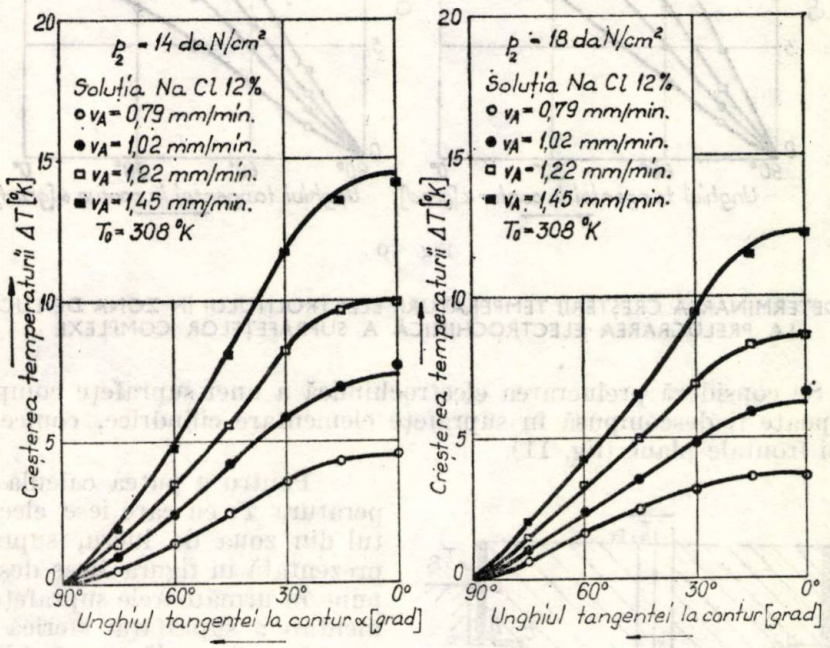


Fig. 9

Și în acest caz se constată o apropiere foarte mare între rezultatele experimentale și curbele teoretice. Este verificat de asemenea, și modul cum influențează creșterea temperaturii căderea de presiune Δp.

Observațiile făcute pentru prelucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice cu axă verticală rămîn valabile și în acest caz de prelucrare.

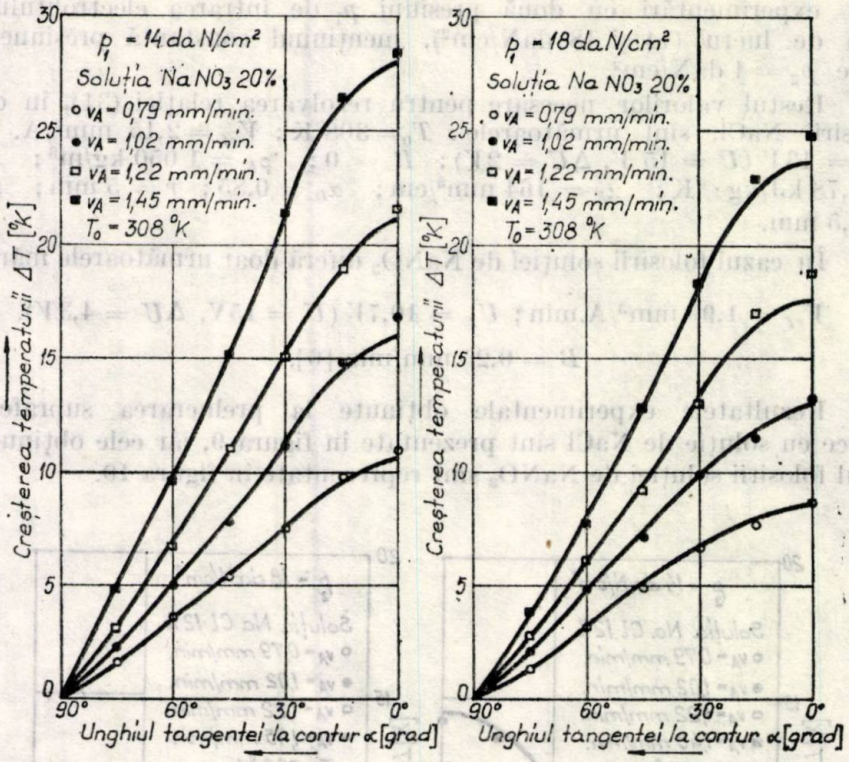


Fig. 10

8. DETERMINAREA CREȘTERII TEMPERATURII ELECTROLITULUI ÎN ZONA DE LUCRU LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A SUPRAFEȚELOR COMPLEXE

Se consideră prelucrarea electrochimică a unei suprafețe complexe, care poate fi descompusă în suprafețe elementare cilindrice, conice, sferice și frontale plane (fig. 11).

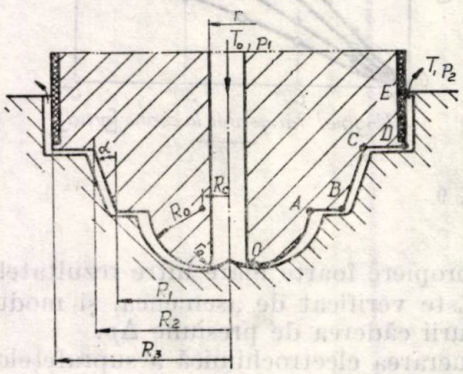


Fig. 11

Pentru a putea calcula temperatura T, cu care iese electrolitul din zona de lucru, suprafața prezentată în figura 10 se descompune în următoarele suprafețe elementare: suprafața sferică OA, suprafața frontală plană AB, suprafața conică BC, suprafața frontală plană CD și suprafața cilindrică DE. Calculul temperaturii T se rezumă la a calcula temperaturile intermediare, cu care iese electrolitul din interstițiul de lucru corespunzător fiecărei suprafețe elementare, și de a ține cont că în zona

de legătură dintre două suprafețe elementare temperatura de intrare în noua suprafață elementară este egală cu temperatura de ieșire din suprafața elementară anterioară.

În formulele de calcul intervin mărimile U, T_0 și Δp, care se adoptă inițial, mărimile U_E, V_{ef}, B și α_D, care se determină experimental, mărimile $\varkappa_E$, c și ρ_H, care sînt caracteristice electrolitului utilizat și mărimile geometice ale electrodului sculă r, r_0, R_0, α, R_1, R_2 și R_3. De precizat că $\Delta p = p_1 - p_2$ este o mărime constantă, asigurată de camera de contrapresiune, iar coeficientul α_D se determină experimental pentru secțiunea minimă de curgere a electrolitului.

Temperatura T_A, cu care iese electrolitul după parcurgerea suprafeței sferice OA, se calculează cu ajutorul ecuației (31) ținînd cont de notațiile din figura 10.

$$T_A = T_0 + \frac{UR_0(v_A + B)}{U_E V_{ef}^2 \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} \left[v_A \left(R_c + \frac{R_0}{2} \right) + B \left(R_0 + \frac{R_c \cdot \pi}{2} \right) \right]. \quad (32)$$

Temperatura T_B, cu care iese electrolitul după parcurgerea suprafețelor OA și AB se calculează cu ajutorul relației (13), care devine în acest caz:

$$T_B = T_A + \frac{U(v_A + B)^2}{2U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D \cdot (r + r_0)\sqrt{2 \cdot \rho_E \cdot \Delta p}} [R_1^2 - (R_0 + R_c)^2]. \quad (33)$$

Temperatura T_C, pe care o are electrolitul după parcurgerea suprafețelor OA, AB și BC se calculează, pe baza relației (19), cu următoarea formulă:

$$T_C = T_B + \frac{1}{2} \frac{U(v_A + B)(v_A \sin \alpha + B}{U_E V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E c \cdot \alpha_D \cdot (r + r_0)\sqrt{2\rho_E \cdot \Delta p}} (R_2^2 - R_1^2). \quad (34)$$

Avînd în vedere că $T_D = T_E$, deoarece în lipsa prelucrării electrolitul nu se încălzește la parcurgerea suprafeței cilindrice izolate, rezultă că temperatura T cu care electrolitul iese din zona de lucru, pe baza relației (13), se calculează cu următoarea formulă:

$$T = T_C + \frac{U(v_A + B)^2}{2U_E \cdot V_{ef}^2 \cdot \varkappa_E \cdot c \cdot \alpha_D (r + r_0)\sqrt{2\rho_E \cdot \Delta p}} (R_3^2 - R_2^2). \quad (35)$$

În mod asemănător se va putea calcula temperatura cu care iese electrolitul din zona de lucru sau temperatura electrolitului în oricare punct al profilului pentru orice suprafață complexă, care se poate descompune în suprafețele elementare cilindrice, conice, sferice și frontale plane.

9. CONCLUZII

Pe baza ecuațiilor (13), (19), (25) și (31) și a metodologiei indicate la punctul 8 se poate determina temperatura electrolitului la prelucrarea electrochimică a suprafețelor simple și complexe în cazul folosirii atît a soluțiilor nepasivizante, de tipul clorurii de sodiu NaCl, cît și a soluțiilor pasivizante, de tipul azotatului de sodiu $NaNO_3$.

Determinarea creșterii temperaturii electrolitului în zona de lucru are o importanță deosebită la stabilirea regimului optim de lucru, deoarece depășirea unei anumite temperaturi (90°C la prelucrarea cu NaCl și 60°C la prelucrarea cu $NaNO_3$) duce la înrăutățirea condițiilor de lucru și randamentul prelucrării tinde spre zero.

În vederea obținerii unei productivități maxime a prelucrării fie că se reduce viteza de avans a electrodului sculă, fie că se mărește presiunea de intrare a electrolitului în zona de lucru. În felul acesta se evită ajungerea în domeniul temperaturilor critice de lucru.

Relațiile obținute permit determinarea temperaturii în orice punct al suprafeței prelucrate. Cu ajutorul variației temperaturii electrolitului în spațiul de lucru se poate determina variația conductibilității specifice $\varkappa_E$, și ca urmare variația interstițiului de lucru, care are un rol hotărîtor în stabilirea corecției electrodului-sculă.

Primită la redacție la 2 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. H. W. Heitman, *Über die Ermittlung der optimalen Bearbeitungsbedingungen beim elektrochemischen Senken*, Dissertation TH Aachen, 1966.
2. D. Pahl, *Über die Abbildungsgenauigkeit beim elektrochemischen Senken*, Dissertation TH Aachen, 1969.
3. K. Kawafune, T. Mikoshiba, K. Noto, *The Effect of the working parameters in the working gep during elektrochemical machining*, CIRP — Ann *18* (1970) p. 305—315.
4. J. F. Thorpe, R. O. Zerkle, *Analityc Determination of the Equilibrium Electrode Gap in Electrochemical Machining*, Int. Jour. Mach. Tool Des. and Res., *9* (1969) p. 131—144.
5. D. M. Ivan, H. J. Hümbs, P. Lindenlauf, *Temperaturverteilung im Arbeitsspalt beim elektrochemischen Senken von Raumformen*. Industrie Anzeiger, *20* (1974) p. 447—451.
6. H. J. Hümbs, *Elektrochemischen Senken. Experimentelle und analytische Untersuchung der Prozeßzusammenhänge*. Dissertation TH Aachen 1976.

VIRGILIU FLORIAN, VIRGILIU TALLE, SPERANȚA PRODAN

CALCULUL CABLELOR ÎNCĂRCATE CU SARCINI UNIFORM REPARTIZATE ÎN LUNGUL LOR ȘI CU FORȚE CONCENTRATE

În această etapă se dezvoltă un algoritm de calcul al eforturilor și al săgeților unui cablu, pentru diferite poziții ale unei forțe concentrate, verticale, pe cablu. Se consideră forma reală de echilibru a acestuia (două curbe lănțișor, intersectate în punctul de aplicație al forței concentrate).
Se aplică acest algoritm pe un exemplu și se compară rezultatele cu cele ce se obțin prin metoda obișnuită de calcul (al parabolei echivalente).
În anexa lucrării se dau programele de calcul la un minicalculator științific, cuprinzind succesiunea „pas cu pas" a operațiunilor de efectuat.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 4, 1979 p. 487—517
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

DAN FRANGOPOL

CONCEPTE PROBABILISTE ÎN OPTIMIZAREA STRUCTURILOR. I

Lucrarea tratează problema optimizării structurilor prin prizma conceptelor moderne probabilistice. În prima parte a lucrării (I) se propune o ierarhizare a problemelor de optimizare și se analizează o serie de aspecte specifice procesului optimizării.O a doua parte a lucrării (II) este consacrată concepției probabilistice de optimizare a structurilor, ținîndu-se seama de criteriile de optimizare specifice și de metodele matematice necesare pentru evaluarea siguranței structurilor. După ce se prezintă exemple de optimizare probabilistică, lucrarea se încheie cu concluzii privind stadiul actual al aplicării conceptelor probabilistice în optimizarea structurilor indicîndu-se și obiectivele spre care trebuie orientată cercetarea în viitor.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 4, 1979, p. 519—535
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

A. PAVEL

PRETENSIONAREA TENDOANELOR REZERVOARELOR SFERICE. I

Se expune rezolvarea originală a problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice și, deci, a determinării sarcinii de pretensionare care să asigure conlucrarea spațială a sistemului de rezemare al rezervoarelor date. Rezolvarea respectivă privește cazul general cînd nu se fac diferențieri din punctul de vedere al schemelor de solicitare a tendoanelor, admițîndu-se că efortul unitar normal rezultant maxim din tija acestora, corespunzător condițiilor de solicitare la întindere sau la compresiune concordante cu cele de exploatare, este cunoscut.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 4, 1979, p. 537—555
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

C. A. VASILESCU, T. TURCOIU, S. SIDON

ANALIZA EFECTELOR NEUNIFORMITĂȚII INJECȚIEI ASUPRA ÎNCĂRCĂRII ARBORELUI COTIT AL MOTORULUI DIESEL

Se simulează producerea neuniformității injecției, prin arderea unor cantități de combustibil diferite pe evoluția de ardere izocoră a unui ciclu de motor diesel rapid. Prin intermediul unui program de calcul se analizează efectul neuniformității injecției asupra încărcării (reacțiuni și momente de răsucire) fusurilor palier ale arborelui cotit. Totodată, se pune în evidență ordinul de mărime al solicitărilor suplimentare introduse de anumite tipuri de combinații de neuniformitate.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 4, 1979, p. 557—565
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

ΠΡΟΕΚΤΑΣΗ ΤΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ ΤΗΛΕΘΕΡΜΑΝΣΗΣ ΣΤΗ ΔΥΤΙΚΗ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΑΝΔΡΕΑΣ ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΗΣ
Μηχανολόγος Μηχανικός

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται η προοπτική επέκτασης του δικτύου τηλεθέρμανσης στη Δυτική Θεσσαλονίκη. Αναλύονται οι τεχνικοί περιορισμοί, οι οικονομικοί παράμετροι και οι περιβαλλοντικές επιπτώσεις του έργου. Η μελέτη βασίζεται σε δεδομένα λειτουργίας του υπάρχοντος δικτύου και σε προβλέψεις ζήτησης για τα επόμενα 15 χρόνια.

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το υπάρχον δίκτυο τηλεθέρμανσης της Θεσσαλονίκης εξυπηρετεί σήμερα περίπου 18.000 κατοικίες και καταστήματα στο κέντρο της πόλης. Η επέκτασή του προς τη Δυτική Θεσσαλονίκη αποτελεί μία από τις πιο φιλόδοξες υποδομές που έχουν προταθεί για τον αστικό ιστό.

2. ΤΕΧΝΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Η συνολική θερμική ισχύς που απαιτείται για την κάλυψη των νέων φορτίων εκτιμάται σε 120 MW. Η μεταφορά θερμού νερού γίνεται μέσω προκατασκευασμένων αγωγών διπλής μόνωσης, με μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας 120 °C.

3. ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η συνολική επένδυση υπολογίζεται σε 210 εκατ. ευρώ. Η περίοδος αποπληρωμής εκτιμάται σε 12 έτη, με εσωτερικό συντελεστή απόδοσης 9,4%. Η ανάλυση ευαισθησίας δείχνει ότι η βιωσιμότητα του έργου παραμένει θετική ακόμη και σε σενάριο μείωσης της ζήτησης κατά 15%.

4. ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΕΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ

Η αντικατάσταση 95 λεβητοστασίων από τοπικές μονάδες καύσης θα μειώσει τις εκπομπές CO₂ κατά περίπου 180.000 τόνους ετησίως. Η μείωση αυτή αντιστοιχεί στην απόσυρση περίπου 60.000 αυτοκινήτων από την κυκλοφορία.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η επέκταση του δικτύου αποτελεί τεχνικά εφικτή και οικονομικά βιώσιμη λύση για την αναβάθμιση της ενεργειακής υποδομής της Δυτικής Θεσσαλονίκης. Απαιτείται όμως ολοκληρωμένος σχεδιασμός και στενός συντονισμός μεταξύ φορέων, ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι όχλησεις κατά την κατασκευή.

MIHAIL ROCO

EVOLUȚIA CARACTERISTICILOR DE FUNCȚIONARE ALE INSTALAȚIILOR DE HIDROTRANSPORT A ZGUREI ȘI CENUȘII ÎN TIMPUL EXPLOATĂRII. II

Pe baza măsurătorilor efectuate asupra unor instalații industriale de hidrotransport, în lucrare (I, II) se prezintă tendințele de modificare în timp ale caracteristicilor de funcționare, aspecte ale comportării echipamentelor sub efectul fenomenelor de încrustare și de abraziune, precum și unele măsuri de îmbunătățire a funcționării acestora. Rezultatele experimentale sînt exemplificate pentru două instalații de evacuare hidraulică a zgurei și cenușii.
A doua parte a lucrării (II) cuprinde aspecte referitoare la abraziunea pompelor și conductelor, la fărîmițarea particulelor solide transportate, la fenomenele tranzitorii în instalațiile de hidrotransport și la direcții de mărire a capacității de transport hidraulic într-o instalație existentă.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 4, 1979, p. 567—594
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

EMIL GEORGESCU

UTILIZAREA PROCEDEELOR SEISMICE LA DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MECANICE ALE TERENURILOR DE FUNDAȚIE ȘI LA MICROZONAREA SEISMICĂ A AMPLASAMENTELOR

Se prezintă modul de determinare a caracteristicilor mecanice ale masivelor de pămînt solicitate de sarcini dinamice, cu ajutorul metodelor seismice, în special pentru depozitele de pietrișuri și bolovănișuri, unde metodele de laborator nu dau rezultate satisfăcătoare. De asemenea, se prezintă o nouă metodă de microzonare seismică și rezultatele obținute într-o zonă din apropierea Cheia-Prahova.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 4, 1979, p. 595—602
Redacția : București, str. Const. Mille, nr. 15

MIRCEA IVAN, IOAN CRISTIAN

CREȘTEREA TEMPERATURII ELECTROLITULUI ÎN ZONA DE LUCRU — UN NOU CRITERIU DE STABILIRE A VITEZEI DE AVANS LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ

Lucrarea arată deducerea relațiilor teoretice după care are loc variația temperaturii electrolitului de-a lungul interstițiului de lucru, la prelucrarea electrochimică a suprafețelor cilindrice, conice și sferice. După ce se prezintă verificarea experimentală a relațiilor teoretice deduse, în finalul lucrării se indică metodica de lucru pentru determinarea analitică a creșterii temperaturii electrolitului la prelucrarea electrochimică a suprafețelor complexe, care pot fi descompuse în suprafețe de elemente (cilindrice, conice sau sferice).

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 4, 1979, p. 603—616
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38, nr. 5 septembrie—octombrie

SUMAR

STUDII

I. SETEANU, R. POPA, A. MARINOV, Amortizarea undelor de suprafaţă în albii deschise 619

I. CREŢU, Modelări numerice ale mişcării petrolului şi gazelor în medii poroase, în condiţiile transferului masic interfazic 629

AL. D. STAN, Curgerea laminară a fluidelor în spaţii inelare . . 637

MIHAI POPESCU, Studiul manevrelor optime ale vehiculelor spaţiale în apropierea punctelor de libraţie din sistemul Pământ-Lună 649

MIRCEA MUNTEANU, Asupra unei probleme plane de contact 661

ALEXANDRU NICOLAU, MIRCEA IEREMIA, Studiul voalării plăcilor plane prin metode iterative de calcul 681

DAN FRANGOPOL, Concepte probabiliste în optimizarea structurilor. II 695

ALECSANDRU PAVEL, Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice. II 717

AUREL OPREAN, CONSTANTIN CODREANU, Cercetări privind dinamica sistemelor hidraulice de acţionare cu acumulator 731

GORUN MANOLESCU, O încercare de formalizare a abordării top-down-structurate a produselor informatice cu aplicare la cercetarea, proiectarea tehnică şi tehnologică 741

RECENZII 761

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICA APLICATĂ

AMORTIZAREA UNDELOR DE SUPRAFAȚĂ ÎN ALBII DESCHISE

de ION SETEANU, RADU POPA, ANCA MARINOV

Institutul politehnic București

În lucrare se analizează curgerea nepermanentă, cu suprafață liberă, în albii deschise, cu referire la undele de stăvilire în canalele de aducțiune ale U.H.E.. Amortizarea regimului nestaționar produs în modelele experimentale se studiază în cadrul curgerii laminare cu sistemul de ecuații Navier-Stokes.

1. INTRODUCERE

Datorită funcționării centralelor hidroelectrice în conformitate cu graficul de sarcină, a manevrării stavilelor la baraje ca urmare a modificării hidrografului de curgere, precum și datorită întreruperii funcționării centralelor hidroelectrice în caz de avarie, se întîlnește foarte des în practica hidroenergetică mișcarea nepermanentă a curenților cu suprafață liberă. Sursele de perturbare ale stării de regim inițiale, enumerate mai sus, au ca rezultat formarea unui ansamblu de unde, elementul specific al mișcării nepermanente. Cînd se reduce brusc, total sau parțial, sarcina centralei hidroelectrice, iar canalul de deviație nu este prevăzut cu un evacuator de siguranță, se produce o undă pozitivă inversă, de tipul unei unde de stăvilire care se propagă în lungul canalului și produce creșterea nivelului suprafeței libere. Unda se reflectă la confluența dintre canal și lacul de acumulare, putîndu-se produce ulterior influențe pozitive de amplitudini însemnate.

Analiza mișcării nepermanente în albii deschise se bazează pe sistemul hiperbolic de ecuații cu derivate parțiale al lui Saint-Venant, în care influența frecării vîscoase turbulente este introdusă prin analogie cu cazul mișcării gradual-variate [1]. Coeficientul lui Chezy, sau indicele de rugozitate Manning care apar în aceste relații constituie parametri globali experimentali, greu de apreciat prin măsurători directe, impunîndu-se cercetări de laborator în special în vederea determinării timpului total de amortizare al undei și pentru aprecierea amplitudinii maxime a acesteia.

În lucrare se prezintă un procedeu analitic de analiză a curgerii nepermanente cu suprafață liberă în canale deschise, modelată în laborator. Datorită factorului de scară, curgerea pe model este laminară (adîncimi relativ reduse, circa 2—5 cm) și se poate studia în cadrul sistemului Navier-Stokes. Se determină evoluția suprafeței libere în timp prin suprapunerea și interferența undelor elementare amortizate, folosind un procedeu utilizat de Shiau și Rumer în cazul unui bazin închis [2].

2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII OSCILATORII

Se consideră un rezervor (fig. 1) care este mărginit la un capăt de un perete impermeabil, iar la celălalt se află în legătură cu un alt rezervor de capacitate mare. Se admite că inițial suprafața liberă are o pantă negativă S_0 și se analizează mișcarea oscilatorie (undele de suprafață), generată în procesul de stabilire a echilibrului hidrostatic final. Panta inițială a suprafeței libere se realizează experimental pentru modelul din laborator prin coborîrea rapidă a întregii mase a bazinului la momentul inițial (fig. 2).

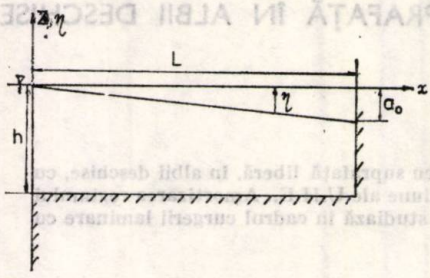


Fig. 1

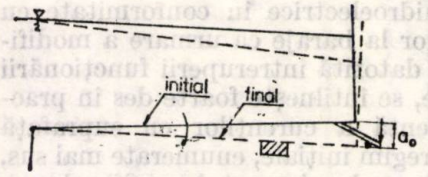


Fig. 2

În condițiile mișcării plan paralele laminare nepermanente, dacă se neglijează termenii accelerației convective în raport cu forțele de vîscozitate și dacă se alege ca mărime necunoscută abaterea η a suprafeței libere față de nivelul final, ecuația dinamică și ecuația de continuitate globală sînt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\,g\,\frac{\partial \eta}{\partial x} + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{-h}^{0} u\,dz = 0, \tag{1}$$

unde ν este coeficientul cinematic de vîscozitate, iar h este adîncimea bazinului. Introducînd panta $S = -\,\partial\eta/\partial x$ se obține sistemul echivalent:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = gS + \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad -\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-h}^{0} u\,dz = 0. \tag{1'}$$

Condițiile inițiale sînt:

$$u\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{(repaus)}, \qquad S\Big|_{t=0} = S_0, \tag{2}$$

iar condițiile la limită se scriu:

$$u\Big|_{x=L} = 0 \quad \text{(perete impermeabil)}, \qquad \eta\Big|_{x=0} = 0 \quad \text{(joncțiunea cu rezervorul infinit)}. \tag{3}$$

Dezvoltarea Fourier a ecuației suprafeței libere inițiale fiind

$$\eta_0(x) = \frac{a_0}{L}\, x = \frac{8a_0}{\pi^2}\left(-\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{2L} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{2L} - \dots\right),$$

se poate scrie, la un moment dat,

$$\eta(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_k(z, t)\sin k\cdot x, \qquad k = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \tag{4}$$

iar panta este

$$S(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} S_k(z, t)\cos k\cdot x. \tag{5}$$

Introducînd expresiile (4) și (5) în sistemul (1) se obține pentru viteza u dezvoltarea Fourier:

$$u(x, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_k(z, t)\cos k\cdot x.$$

Componentele Fourier satisfac sistemul echivalent:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = g\, S_k + \nu\cdot\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}, \qquad k = \frac{(2n-1)\pi}{2L}.$$

$$-\frac{\partial S_k}{\partial t} - k^2\int_{-h}^{0} u_k\, dz = 0. \tag{6}$$

Condițiile la limită (3) sînt satisfăcute datorită dezvoltărilor Fourier alese, pentru funcțiile necunoscute u.η.s.

3. DETERMINAREA SOLUȚIEI CU TRANSFORMAREA LAPLACE

Folosind imaginea Laplace $F(p)$ a funcției original $f(t)$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt, \tag{7}$$

se transcrie sistemul (6) sub forma:

$$pU_k = g\cdot\sigma_k + \nu\cdot\frac{d^2 U_k}{dz^2} -$$

$$-p\cdot\sigma_k + \frac{2a_0}{L^2 k} + k^2\int_{-h}^{0} U_k\, dz. \tag{8}$$

Eliminînd pe σ_k, rezultă ecuaţia integro-diferenţială:

$$p^2 U_k - \frac{2a_0 g}{L^2 k} + k^2 g \int_{-h}^{0} U_k \mathrm{d}z = p\nu \frac{\mathrm{d}^2 U_k}{\mathrm{d}z^2}, \tag{9}$$

care va fi derivată în raport cu z pentru a se obţine o ecuaţie mai simplă, de ordin superior,

$$p^2 \frac{\mathrm{d}U_k}{\mathrm{d}z} = p\nu \frac{\mathrm{d}^3 U_k}{\mathrm{d}z^3}, \tag{10}$$

a cărei soluţie este

$$U_k(z) = A + C_1 \mathrm{e}^{rz} + C_2 \mathrm{e}^{-rz}, \tag{11}$$

unde $r = \sqrt{p/\nu}$.
Satisfacerea condiţiilor la limită: $U_k(-h) = 0$, $U_k(0) = 0$, care corespund condiţiei de aderenţă la fundul rezervorului şi frecării nule pe suprafaţa liberă în condiţiile neglijării rezistenţei aerului, precum şi verificarea relaţiei (9) implică transcrierea soluţiei (11) sub forma

$$U_k = C[\mathrm{ch}(rz) - \mathrm{ch}(rh)]; r = \sqrt{p/\nu}, \tag{12}$$

unde constanta C are expresia

$$C = -\frac{2a_0 g}{L^2 k} \cdot \frac{1}{\mathrm{ch}(rh)} \cdot \frac{1}{p^2 + k^2 gh - k^2 g \dfrac{th(rh)}{r}}. \tag{13}$$

Imaginile U_k şi σ_k se scriu în forma finală:

$$U_k(z, p) = \frac{2a_0 g}{L^2 k} \cdot \frac{1 - \dfrac{\mathrm{ch}(z\sqrt{p/\nu})}{\mathrm{ch}(h\sqrt{p/\nu})}}{p^2 + k^2 gh - k^2 g\sqrt{\nu/p}\ \mathrm{th}(h\sqrt{p/\nu})}, \tag{14}$$

$$\sigma_k(z, p) = \frac{2a_0}{L^2 k} \cdot \frac{p}{p^2 + k^2 gh - k^2 g\sqrt{\nu/p}\ \mathrm{th}(h\sqrt{p/\nu})}. \tag{15}$$

Exprimînd funcţia original $f(t)$ prin funcţia imagine cu relaţia

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\zeta - \mathrm{i}\infty}^{\zeta + \mathrm{i}\infty} \mathrm{e}^{pt} F(p)\, \mathrm{d}p \tag{16}$$

rezultă expresiile original ale soluției:

$$\eta(x, z, t) = -\sum_k \frac{2a_0}{k^2 L^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty}\frac{e^{pt}\,dp}{p+\dfrac{gk^2}{p}\left[h-\sqrt{\nu/p}\,\mathrm{th}(h\sqrt{p/\nu})\right]}\right\}\sin kx, \tag{17}$$

$$u(x, z, t) = \sum_k \frac{2a_0 g}{kL^2}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\zeta-i\infty}^{\zeta+i\infty}\frac{e^{pt}\left[1-\dfrac{\mathrm{ch}(z\sqrt{p/\nu})}{\mathrm{ch}(h\sqrt{p/\nu})}\right]dp}{p^2+gk^2\left[h-\sqrt{\nu/p}\,\mathrm{th}(h\sqrt{p/\nu})\right]}\right\}\cos kx. \tag{18}$$

4. AMORTIZAREA UNDELOR DE SUPRAFAȚĂ. REZULTATE

Dacă se face substituția $p = \nu w^2$ și se aplică teorema reziduurilor, se obține

$$\eta = -\sum_k \frac{2a_0}{k^2 L^2}\sum_R \frac{\nu w^3\, e^{pt}\, 2\nu w}{5\nu^2 w^4 + gk^2 h\,\mathrm{th}^2(hw)}, \tag{19}$$

unde R semnifică mulțimea rădăcinilor ecuației

$$p^2 + gk^2[h - \sqrt{\nu/p}\,\mathrm{th}(h\sqrt{p/\nu})] = 0. \tag{20}$$

Această ecuație în planul complex are o infinitate de rădăcini, care constituie polii integranzilor din relațiile (17) și (18). Pentru a explicita părțile reală și imaginară ale ecuației (20) este convenabil să se introducă variabila complexă $\lambda = -ih\sqrt{p/\nu} = \varphi + i\psi$, cu ajutorul căreia se obține

$$\theta\lambda^4 + 1 - \frac{\mathrm{tg}\,\lambda}{\lambda} = 0, \tag{21}$$

unde

$$\theta_k = \frac{\nu^2}{gk^2 h^5} \tag{22}$$

reprezintă numărul lui Proudman corespunzător undei k.

Folosind notațiile:

$$\lambda^4 \cos^2\lambda = D_1 + iD_2,$$

$$5\theta\,\lambda^4\cos^2\lambda - \sin^2\lambda = A_1 + iB_1,$$

$$D_3 + iD_4 = (D_1 + iD_2)(A_1 - iB_1),$$

$$\varepsilon_1 = \mathrm{arctg}\frac{D_4}{D_3} \tag{23}$$

și observînd că

$$p = -b^2(\varphi^2 - \psi^2) - i2b^2\varphi\psi,$$

unde s-a notat $b = \sqrt{\nu/h}$, ecuația suprafeței libere devine :

$$\eta(x, z, t) = -\sum_k \frac{8a_0\,\theta_k}{k^2 L^2}\left[\sum_{R_1}\frac{\sqrt{D_3^2 + D_4^2}}{A_1^2 + B_1^2}\cdot e^{-b^2(\varphi^2-\psi^2)t}\times\right.$$
$$\left.\times\cos(-2b^2\varphi\psi t + \varepsilon_1)\right]\cdot\sin kx, \tag{24}$$

unde R_1 reprezintă mulțimea polilor situați deasupra axei reale.

Se observă că, în relația (24), condiția de absență a amortizării este $b^2(\varphi^2 - \psi^2) \approx 0$, adică $\varphi \approx \psi$. În acest caz pulsația undei este $\omega_0 = 2b^2\varphi\psi \approx$ $\approx 2b^2\varphi^2$. Prin urmare, într-o primă aproximație, $\varphi_0 \approx \psi_0 \approx \sqrt{\dfrac{\omega_0}{2b^2}}$.

Pe de altă parte, undele de suprafață neamortizate și staționare au, după Lamb [3], expresia

$$\omega_0^2 = g\cdot k\cdot th\,(kh), \tag{25}$$

pentru care prima aproximație se scrie :

$$\varphi_0 \approx \psi_0 \approx \sqrt{\frac{h}{2\nu}}\,[k\cdot g\cdot \mathrm{th}(kh)]^{\frac{1}{4}}. \tag{26}$$

Părțile reală și imaginară ale ecuației (21) sînt :

$$F_1(\varphi, \psi) = A + \omega_0^2\varphi + (B + \omega_0^2\psi)\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{th}\,\psi - \omega_0^2\,\mathrm{tg}\varphi = 0,$$
$$F_2(\varphi, \psi) = B - (A + \omega_0^2\varphi)\,\mathrm{tg}\varphi\,\mathrm{th}\psi - \omega_0^2\,\mathrm{th}\psi + \omega_0^2\psi = 0, \tag{27}$$

unde s-a notat :

$$A(\varphi, \psi) = b^4(\varphi^5 - 10\varphi^3\psi^2 + 5\varphi\psi^4),$$
$$B(\varphi, \psi) = b^4(5\varphi^4\psi - 10\varphi^2\psi^3 + \psi^5). \tag{28}$$

Într-o primă aproximație se poate limita aplicarea teoremei reziduurilor la contribuția polului care, atunci cînd vîscozitatea este neglijabilă și bazinul infinit, corespunde relației (25). Pentru determinarea rădăcinii φ_0, ψ_0 a sistemului neliniar de ecuații (27) s-a folosit un procedeu de minimizare necondiționată de tip Hooke și Jeeves [4] aplicat funcției :

$$F = -|F_1(\varphi, \psi)| - |F_2(\varphi, \psi)| \tag{29}$$

întrucît metoda Newton-Raphson s-a dovedit ineficace datorită instabilității numerice.

Pentru testarea procedeului numeric utilizat s-a întocmit un program de calcul în limbaj FORTRAN IV alegînd ca date de intrare $h = 4$ cm, $L = 180$ cm, $\nu = 1{,}56\ 10^{-2}$ cm^2/s.

Reprezentarea undelor parțiale adimensionalizate date de formulele

$$\frac{\eta_n}{a_0} = -\tau_{1n} e^{-\tau_{2n} t} \cdot \cos(-\tau_{3n} \cdot t + \tau_{4n}) \cdot \sin k_n x,$$

$$\tau_{1n} = \frac{\sqrt{D_3^2 + D_4^2}}{A_1^2 + B_1^2} \cdot \tau_{0n}; \quad \tau_{2n} = b^2(\varphi^2 - \psi^2),$$

$$\tau_{3n} = 2b^2 \varphi\psi; \quad \tau_{4n} = \varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \frac{D_4}{D_3},$$

$$\tau_{0n} = \frac{32\ \theta_n}{(2n-1)^2 \pi^2}; \quad \theta_n = \frac{b^4}{g \cdot k_n^2 h}, \quad k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}.$$

s-a efectuat cu pași de timp variabili dependenți de constanta de amortizare a exponențialei:

$$\Delta t_n = \frac{T_n}{10} = \frac{1}{10\ \tau_{2n}},$$

iar pentru unda totală

$$\frac{\eta}{a_0} = \sum_n \frac{\eta_n}{a_0}$$

s-a folosit același pas de timp $\Delta t_1 = \dfrac{1}{10\tau_{2n}}$ pentru toate undele în noduri de coordonată x impusă.

Unda corespunzătoare nodului de coordonată $\dfrac{x}{L} = \dfrac{1}{3}$ este indicată în tabelul nr.1, la intervale de timp Δt_1.

Undele parțiale

$$\zeta_n = e^{-\tau_{2n} \cdot t} \cdot \cos(-\tau_{3n} \cdot t + \tau_{4n})$$

pentru diferite armonici sînt reprezentate în figura 3. Forma suprafeței libere η/τ_{11} la diverse momente de timp este reprezentată în figura 4, iar oscilațiile suprafeței libere în timp pentru diferite puncte în spațiu sînt indicate în figura 5. Se constată o rapidă amortizare a undelor superficiale și o tendință de trecere simultană prin zero a undelor totale pe toată

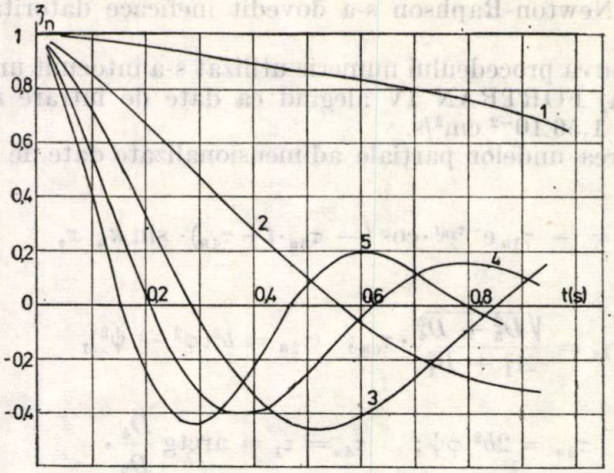


Fig. 3

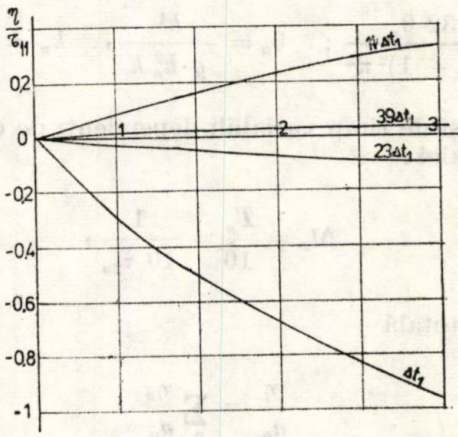


Fig. 4

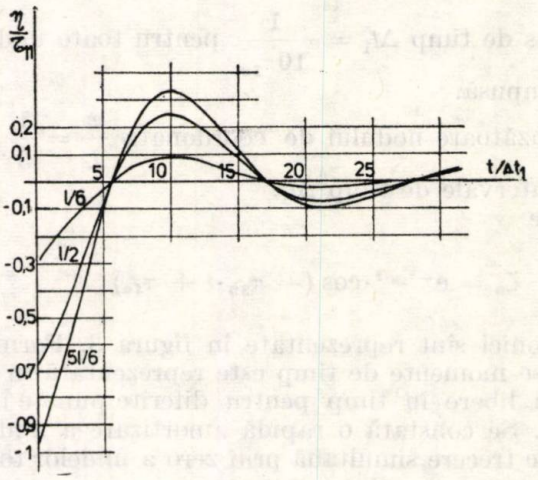


Fig. 5

lungimea bazinului. Datorită acestui fapt analiza experimentală a undelor se poate efectua în punctele care corespund centrelor undelor staționare parțiale.

Tabelul nr. 1

−0,511	−0,442	−0,340	−0,246	−0,151
−0,057	0,025	0,091	0,136	0,162
0,172	0,166	0,148	0,122	0,091
0,058	−0,027	0,000	−0,023	−0,040
−0,050	−0,055	−0,055	−0,050	−0,042
−0,033	−0,022	−0,012	−0,003	−0,005
0,011	0,015	0,017	0,018	0,017
0,014	0,012	0,008	0,005	0,002
−0,001	−0,003	−0,005	−0,005	−0,006
−0,006	−0,005	−0,004	−0,003	−0,002

Primită la redacție la 9 februarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. A. Diacon, I. Seteanu, R. Popa, *Load charges regulation effect on surge routing along the intake canals of hydroelectric plants*, Proceedings, IAHR Symposium — Fluid Motion Stability in Hydraulic Systems with Automatic Regulators, Bucharest, 1976.
2. J. Shiau, R. Rumer, *Decay of mass oscilations in rectangular basins;* Proc. ASCE, Journal of the Hydraulics Division, HY1, 1974.
3. H. Lamb, *Hydrodynamics*; Dover Publ., New York, 1945.
4. K.J. Kowalik, M. R. Osborne, *Methods for unconstrained optimization problems*, Elsevier Publ. Co., New York, 1968.

MODELĂRI NUMERICE ALE MIȘCĂRII PETROLULUI ȘI GAZELOR ÎN MEDII POROASE, ÎN CONDIȚIILE TRANSFERULUI MASIC INTERFAZIC

de I. CREȚU

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În lucrare sînt prezentate aspectele de bază referitoare la modelările numerice ale mișcării fluidului bifazic petrol-gaze în medii poroase, cu ajutorul modelelor matematice volumice și a celor compoziționale.

După ce sînt expuse caracteristicile esențiale ale modelelor volumice și compoziționale, în cadrul a două scheme logice de ansamblu sînt discutate principalele aspecte ale unor modelări numerice relative la utilizarea unui model matematic volumic, respectiv compozițional. O atenție mai deosebită este acordată stabilirii datelor de intrare și utilizării criteriilor de alegere a valorilor treptei de timp.

Pentru modelarea numerică a mișcării bifazice cu ajutorul unui model compozițional este descris, prin intermediul unei scheme logice de ansamblu, un algoritm al comportării de fază.

Mișcarea bifazică a petrolului și gazelor în medii poroase este un fenomen complex, asociat, de regulă, cu transfer interfazic de masă guvernat de legile echilibrului termodinamic al sistemului de hidrocarburi vapori-lichid.

Stabilirea cîmpurilor presiunilor și saturațiilor de fază, precum și a evoluției lor în timp reprezintă principalul obiectiv practic al studiului mișcării multifazice în medii poroase. Acest obiectiv poate fi realizat prin soluționarea ecuațiilor fundamentale ale mișcării, constituite din ecuațiile de continuitate, ecuația lui Darcy și ecuația de stare. Întrucît soluționarea analitică a acestor ecuații nu este posibilă, se pot utiliza metode numerice de rezolvare a lor.

Formularea ecuațiilor fundamentale și rezolvarea lor prin metode numerice constituie modelarea numerică a mișcării fluidelor respective în medii poroase. În acest mod, mișcării i se asociază un model matematic, căreia îi corespunde un model numeric.

Dacă mișcarea fluidului bifazic este lipsită de gradienți spațiali ai compoziției sistemului de hidrocarburi, pentru modelarea matematică a mișcării se poate utiliza un model volumic. În cazul contrar, devine necesară folosirea unui model compozițional.

ST. CERC. MEC., APL., TOM 38, NR. 5, 1979, P. 629 — 635

1. MODELUL VOLUMIC

Modelul volumic are la bază presupunerea că, în absența gradienților spațiali ai compoziției, sistemul bifazic de hidrocarburi este constituit din doi pseudocomponenți, petrolul „mort" (lichidul în condiții de suprafață) și gazele (vaporii). În aceste condiții, ecuațiile de continuitate se obțin printr-un bilanț volumic în condiții standard, relativ la cei doi pseudocomponenți și eventual apă. Convertirea volumului fazei fluide din condiții de zăcământ, în condiții de suprafață se realizează cu ajutorul factorului de volum. Din acest motiv, modelul volumic se mai numește și modelul factorului de volum.

Funcția de transfer interfazic de masă constă din dependența rației de soluție cu presiunea (în cazul petrolului „negru") sau din cea a procentului de volum condensat relativ la presiune (în cazurile petrolului volatil și al gazelor cu condensat). Această funcție se obține în cadrul analizelor PVT, iar folosirea ei implică presupunerea că legea de variație a compoziției fluidului de zăcământ cu presiunea este aceeași în zăcământ ca în aparatul PVT, adică mișcarea fluidului bifazic este lipsită de gradienți spațiali ai compoziției acestuia.

În cadrul modelului volumic, proprietățile fizice ale fazelor fluide depind numai de presiune.

Ecuațiile de continuitate pentru cele două faze pot fi exprimate astfel

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_{ix}}{b_i}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_{iy}}{b_i}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_{iz}}{b_i}\right)-q_i=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ms_i}{b_i}\right)\quad(i=1,2),\qquad(1)$$

unde indicele i are valoarea 1 pentru petrol și 2 pentru gaze; v este viteza; m — porozitatea; b — factorul de volum; s — saturația; x, y, z — coordonatele carteziene; q — debitul injectat sau produs pe unitatea de volum.

Prin multiplicarea relațiilor (1) cu volumul elementar invariabil, $V_b = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, ecuațiile de continuitate pot fi scrise sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^*_{ix}}{b_i}\right)\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Q^*_{iy}}{b_i}\right)\mathrm{d}y+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Q^*_{iz}}{b_i}\right)\mathrm{d}z-Q_i=-V_b\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ms_i}{b_i}\right)\quad(i=1,2),\qquad(2)$$

în care

$$Q^*_{ix}=\sum_{j=1}^{2}Q_{jx}S_{ij},\qquad(3)$$

iar S este rația de soluție și are valorile $S_{11}=1$, $S_{12}=0$, $S_{21}=S_p$ și $S_{22}=1$.

Conform legii lui Darcy se poate scrie

$$Q_{ix}=-A_x\frac{kk_{ri}}{\mu_i}\left(\frac{\partial p_i}{\partial x}+g\rho_i\frac{\partial z}{\partial x}\right)\quad(i=1,2),\qquad(4)$$

unde $A_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$; k — permeabilitatea absolută; k_r — permeabilitatea relativă; μ — viscozitatea dinamică; p_i — presiunea de fază; g — accelerația gravitației; ρ — masa specifică.

Sistemul de ecuaţii (2) şi (4), completat cu ecuaţiile saturaţiilor şi presiunii capilare

$$\sum_{i=1}^{3} s_i = 1, \tag{5}$$

$$p_{21} = p_1 - p_2, \tag{6}$$

unde s_3 este saturaţia în apă interstiţială, iar p_{21} — presiunea capilară, devine un sistem de ecuaţii determinat, avînd ca necunoscute fluxurile vitezei pe cele trei direcţii carteziene, presiunile şi saturaţiile de fază. Ecuaţia de stare este reprezentată de relaţiile factorului de volum şi raţiei de soluţie cu presiunea, obţinute experimental în cadrul analizelor PVT.

2. MODELUL COMPOZIŢIONAL

Modelul compoziţional este utilizabil în cazul existenţei gradienţilor spaţiali ai concentraţiei fluidului bifazic aflat în mişcare în medii poroase. Proprietăţile fizice ale sistemului bifazic de hidrocarburi, ca şi transferul de masă între cele două faze depind atît de presiune, cît şi de compoziţia fazelor. Fluidul bifazic este tratat ca un sistem constituit din componenţii elementari, iar ecuaţiile de continuitate se obţin dintr-un bilanţ masic relativ la fiecare component conţinut în faza petrol sau în faza gaze.

Modelul compoziţional poate fi folosit pentru rezolvarea problemelor asociate exploatării zăcămintelor de petrol volatil (în regim de gaze dizolvate), înmagazinării subterane a gazelor, injecţiei ciclice de gaze în zăcămînt, conducerii unor procese de dezlocuire miscibilă, exploatării zăcămintelor de gaze cu condensat etc.

Ecuaţiile de continuitate pentru componenţii elementari ai sistemului bifazic de hidrocarburi pot fi scrise sub fomra

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_{ij} Q_{ijx})\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_{ij} Q_{ijy})\,dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_{ij} Q_{ijz})\,dz -$$

$$- Q_{mij} + rQ_{mtj} = - V_b \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_{ij} s_{ij}) \quad (i = 1, 2)\ (j=1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

unde indicele j se referă la componenţii elementari; indicele i corespunde fazelor petrol şi gaze; Q_{mij} este debitul masic injectat sau produs; Q_{mti} — debitul masic transferat între faze, iar r are valoarea $+1$ pentru $i = 1$ şi -1 pentru $i = 2$.

Prin însumarea după j a ecuaţiilor (7), cele $2n$ ecuaţii de continuitate se reduc la două ecuaţii, corespunzătoare fazelor petrol şi gaze, şi anume

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i Q_{ix})\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i Q_{iy})\,dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_i Q_{iz})\,dz - Q_{mi} + rQ_{mt} =$$

$$= - V_b \frac{\partial}{\partial t}(m \rho_i S_i) \quad (i = 1, 2), \tag{8}$$

în care debitul transferului interfazic de masă are expresia

$$Q_{mi} = \sum_{j=1}^{n} Q_{mij}, \tag{9}$$

și poate fi determinat pe baza echilibrului termodinamic lichid-vapori. Debitele volumice Q_{ix} sînt date de relațiile (4).

3. MODELUL CU DIFERENȚE FINITE

În cadrul modelării numerice, ecuațiile fundamentale ale mișcării corespunzătoare modelului volumic sau compozițional sînt aproximate în fiecare nod al unei rețele rectangulare, care acoperă domeniul mișcării, prin ecuații cu diferențe finite, rezultate prin aproximarea derivatelor parțiale (din ecuațiile mișcării) cu diferențe finite. Se obține astfel modelul cu diferențe finite. Derivatele parțiale relative la variabilele spațiale se aproximează prin diferențe centrale, iar cea referitoare la variabila temporală se exprimă prin diferențe progresive. Ecuațiile cu diferențe pot fi scrise și soluționate prin metode explicite, implicite sau iterative, fiind de preferat metodele implicite și cele iterative.

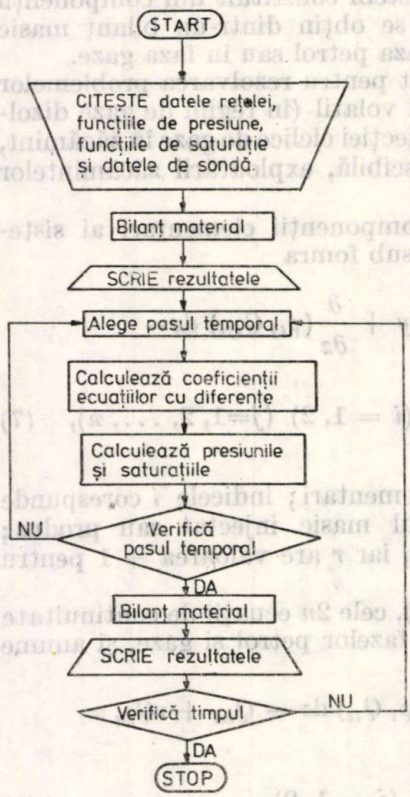


Fig. 1

Pentru rezolvarea ecuațiilor cu diferențe se utilizează un calculator electronic numeric. În figura 1 este prezentată o schemă logică de ansamblu corespunzătoare unui model volumic.

Datele de intrare sînt constituite din elementele rețelei (permeabilitatea k; porozitatea m; grosimea stratului h; elevația z; dimensiunile blocului de rețea Δx, Δy, Δz; compresibilitatea rocii β_r, saturațiile inițiale s_{1in}, s_{2in}, s_3; presiunea inițială p_{in}), funcțiile de presiune (factorii de volum b_1, b_2; viscozitățile μ_1, μ_2; rația de soluție gaz-lichid S_p; densitățile ρ_1, ρ_2), funcțiile de saturație (permeabilitățile relative k_{r1}, k_{r2}; presiunea capilară p_{21}), datele de sondă (intervalul productiv h; debitele de producție sau injecție Q_1, Q_2; presiunea observată p). După introducerea datelor se efectuează un bilanț material, care pune în evidență fazele fluide existente inițial.

Apoi, se alege pasul variabilei temporale și se calculează coeficienții ecuațiilor cu diferențe finite. Întrucît acești coeficienți sînt funcții de presiune

și saturație, pentru a putea fi menținuți constanți în cadrul treptei temporale, valorile lor se calculează implicit, printr-o procedură de extrapolare sau iterativ.

La sfîrșitul treptei temporale trebuie să se verifice dacă pasul de timp ales nu a fost prea mare, astfel încît criteriile privind schimbările maxime permise să nu fie îndeplinite. Dacă aceste criterii nu sînt satisfăcute, se reduce pasul variabilei temporale și se repetă calculele.

Criteriile de timp pot fi criterii de schimbarea saturației, presiunii, saturației și presiunii, coeficienților ecuațiilor cu diferențe finite, debitelor sau de neînchideri de bilanț material.

Criteriile de verificare a treptei de timp se aplică în mod diferențiat, în funcție de caracteristicile mișcării. Astfel, dacă schimbările de presiune sînt moderate, se poate folosi criteriul schimbării saturației. În cazul mișcării unei singure faze se utilizează criteriul presiunii. Dacă mișcarea este bifazică și schimbările de presiune sînt importante, se aplică criteriul schimbării saturației și presiunii. O bună verificare a treptei de timp o oferă schimbările coeficienților ecuațiilor cu diferențe între începutul și sfîrșitul treptei temporale. Debitele de injecție sau producție pot, de asemenea, controla treapta de timp. De exemplu, dacă un pas temporal egal cu 100 zile satisface cerințele coeficienților ecuațiilor, dar debitele sondelor prezintă variații lunare mari, valoarea treptei de timp trebuie modificată ținînd seama de schimbările de debit.

După fiecare treaptă de timp trebuie efectuat un bilanț material. Dacă deficitul sau excesul de volum (masă) de fluid depășește anumite valori, rezultă că există erori necontrolate care se pot datora unei valori prea mari a treptei de timp. O schemă logică de detaliu depinde de formularea ecuațiilor cu diferențe finite, de metoda de soluționare a acestora și chiar de tipul calculatorului electronic care se va folosi. Pentru soluționarea ecuațiilor cu diferențe există două metode, metoda presiune implicită — saturație explicită (IMPES) și metoda soluționării simultane, din care ultima metodă prezintă mai multe variante de aplicare.

În figura 2 este prezentată o schemă logică de ansamblu pentru un model compozițional. În principiu, această schemă logică se aseamănă cu aceea prezentată în figura 1. Deosebirea principală o

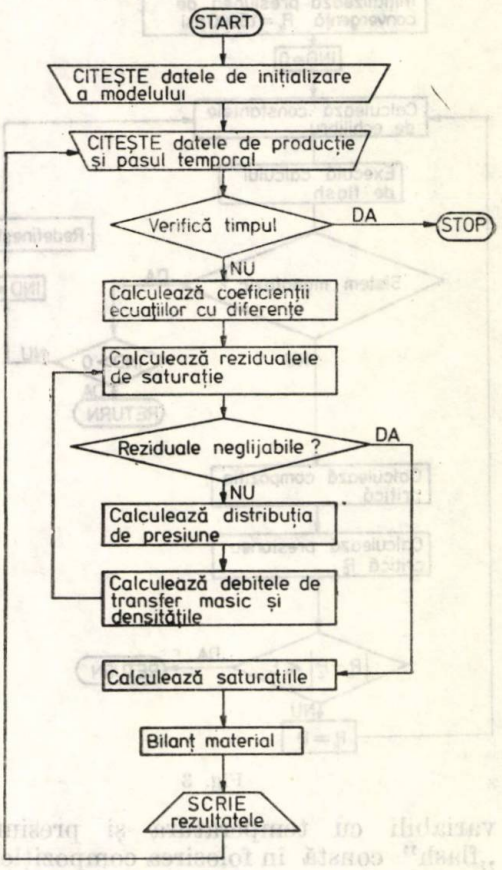


Fig. 2

constituie prezența calculelor pentru debitul de transfer interfazic de masă, la care ne vom referi ulterior. Din datele de inițializare a modelului vor lipsi factorii de volum și rația de soluție (care sînt funcții specifice unui model volumic), iar debitele sondelor se introduc odată cu pasul temporal presupus prestabilit. Schema logică corespunde utilizării metodei IMPES în varianta Peaceman-Rachford [1], în cadrul căreia rezidualele de saturație în nodurile rețelei scrise sub forma

$$R = 1 - (S_1 + S_2 + S_3)_{n+1}, \tag{10}$$

unde $n+1$ indică noua treaptă de timp, caracterizează convergența soluției ecuației presiunii. Valorile parametrului de convergență asigură, de regulă, o bună convergență a presiunii. Dacă la o treaptă de timp rezultă valori anormale ale presiunii sau debitului de transfer masic interfazic, ori bilanțul material este nesatisfăcător, se reiau calculele cu o valoare redusă a pasului temporal. Această operație intră în cadrul prestabilirii valorilor pasului de timp. Transferul masic dintre fazele lichid și vapori poate fi determinat [2, 3] ca diferența dintre masa molară a lichidului, calculată pentru blocul respectiv de rețea din ecuațiile mișcării fără transfer masic interfazic și aceea rezultată din calculele echilibrului de fază, efectuate în cadrul unui algoritm al comportării de fază. Debitul mediu de transfer masic, interfazic, la treapta respectivă de timp, rezultă prin împărțirea acestei diferențe la valoarea pasului temporal.

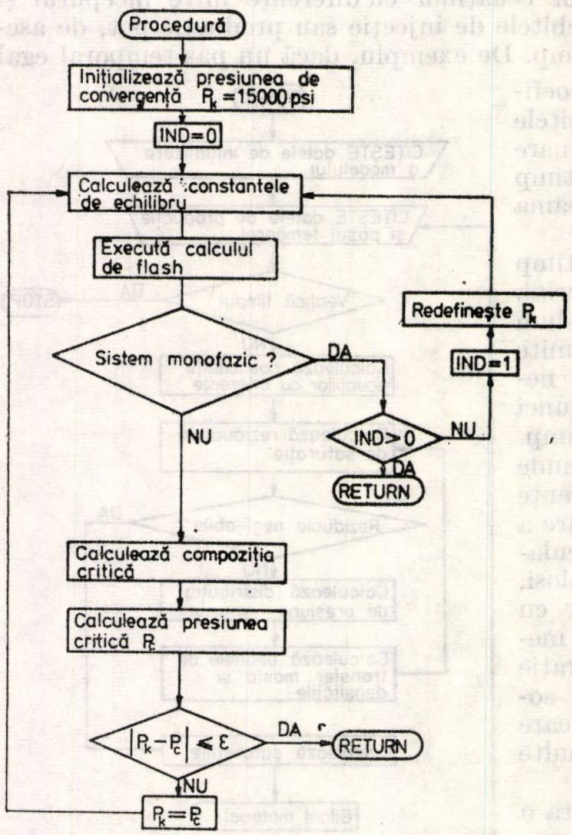


Fig. 3

În figura 3 este prezentată o schemă logică de ansamblu pentru algoritmul comportării de fază. Această procedură implică aproximarea prealabilă a curbelor constantelor de echilibru ale componenților elementari ai sistemelor de hidrocarburi fluide prin polinoame relative la presiune, avînd coeficienții variabili cu temperatura și presiunea de convergență. Calculul de „flash" constă în folosirea compoziției totale a sistemului și a valorilor constantelor de echilibru (calculate la presiunea de convergență pre-

supusă și la presiunea și temperatura sistemului), pentru determinarea fracțiilor de lichid și vapori și a compozițiilor acestor două faze dacă sistemul este găsit în stare bifazică. Compozițiile celor două faze definesc linia de legătură, adică acea linie ale cărei puncte (corespunzînd compozițiilor totale a unor sisteme de hidrocarburi fluide) au aceleași fracții de lichid și vapori. Determinarea presiunii de convergență ca presiunea critică la temperatura sistemului are la bază ipoteza liniarității locului geometric al compoziței critice [3]. Pentru stabilirea ecuației compozițiilor critice la temperatura sistemului este necesară aproximarea prealabilă prin polinoame a curbelor temperaturii critice relative la compoziție pentru amestecurile binare.

Modelele numerice axate pe modele compoziționale sînt mult mai complicate decît cele relative la modele volumice. Programele corespunzătoare modelelor compoziționale necesită valori mari ale timpului de rulare și zone apreciabile de memorie. Astfel, programul corespunzător modelului compozițional schițat mai sus, a trebuit să fie segmentat pentru a putea fi rulat pe un calculator FELIX C—256.

În funcție de specificul mișcării fluidului bifazic petrol-gaze este de preferat, ori de cîte ori este posibil, folosirea modelului volumic. Domeniul, specificul și scopul studiului mișcării determină tipul rețelei. În scopul evitării complexității inutile a modelului numeric se preferă, în ordine, rețele unidimensionale, bidimensionale și în cazuri de excepție rețele tridimensionale. În locul modelului tridimensional se poate încerca utilizarea unui model bidimensional asociat cu o a treia pseudodimensiune.

Pentru verificarea modelului numeric este necesară existența unui set de valori experimentale ale mărimilor pe care le furnizează modelul. Reproducerea acestor valori de către calculator constituie o garanție a veridicității modelului. Deoarece în cazul modelării numerice a mișcării fluidelor multifazice într-un zăcămînt de hidrocarburi unele date de intrare sînt aproximative, pentru reproducerea comportării avute a zăcămîntului se pot modifica anumite date de intrare, cum ar fi proprietățile fizice ale stratului, pînă cînd se realizează o bună concordanță între valorile mărimilor înregistrate (presiuni la sonde, producție cumulativă etc.) și cele obținute în cadrul modelului numeric.

Primită la redacție la 9 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. D. W., Peaceman, H.H.Jr., Rachford, *The numerical solution of parabolic and eliptical difference equations*, Journ. Soc. Ind. Appl. Math., **3** (1955).
2. I. Crețu, E. Soare, Al. Osnea, *Model compozițional pentru curgerea bifazică în medii poroase*. Temă contractată cu I.C.P.P.G., Cîmpina, 1975, 1976.
3. R. MacDonald, *Reservoir simulation with interphase mass transfer*, Ph. D. Dissertation, University of Texas at Austin, 1971.
4. A. B. Ramesh, *Two-dimensional simulation of carbonated water flooding in a heterogeneous reservoir*, Ph. D. Dissertation, University of Texas at Austin, 1971.

supusă și la presiunea și temperatura sistemului), pentru determinarea fracțiilor de lichid și vapori și a compozițiilor acestor două faze dacă sistemul este găsit în stare bifazică. Compozițiile celor două faze definesc linia de legătură, adică acea linie ale cărei puncte (corespunzînd compozițiilor totale a unor sisteme de hidrocarburi fluide) au aceleași fracții de lichid și vapori. Determinarea presiunii de convergență ca presiunea critică la temperatura sistemului are la bază ipoteza liniarității locului geometric al compoziției critice [3]. Pentru stabilirea ecuației compozițiilor critice la temperatura sistemului este necesară aproximarea prealabilă prin polinoame a curbelor temperaturii critice relative la compoziție pentru amestecurile binare.

Modelele numerice axate pe modele compoziționale sînt mult mai complicate decît cele relative la modele volumice. Programele corespunzătoare modelelor compoziționale necesită valori mari ale timpului de rulare și zone apreciabile de memorie. Astfel, programul corespunzător modelului compozițional schițat mai sus, a trebuit să fie segmentat pentru a putea fi rulat pe un calculator FELIX C – 256.

În funcție de specificul mișcării fluidului bifazic petrol-gaze este de preferat, ori de cîte ori este posibil, folosirea modelului volumic. Domeniul, specificul și scopul studiului mișcării determină tipul rețelei. În scopul evitării complexității inutile a modelului numeric se preferă, în ordine, rețele unidimensionale, bidimensionale și în cazuri de excepție rețele tridimensionale. În locul modelului tridimensional se poate încerca utilizarea unui model bidimensional asociat cu o a treia pseudodimensiune.

Pentru verificarea modelului numeric este necesară existența unui set de valori experimentale ale mărimilor pe care le furnizează modelul. Reproducerea acestor valori de către calculator constituie o garanție a veridicității modelului. Deoarece în cazul modelării numerice a mișcării fluidelor multifazice într-un zăcămînt de hidrocarburi unele date de intrare sînt aproximative, pentru reproducerea comportării avute a zăcămîntului se pot modifica anumite date de intrare, cum ar fi proprietățile fizice ale stratului, pînă cînd se realizează o bună concordanță între valorile mărimilor înregistrate (presiuni la sonde, producție cumulativă etc.) și cele obținute în cadrul modelului numeric.

Primită la redacție la 9 martie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. D. W., Peaceman, H.H.Jr., Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptical difference equations*, Journ. Soc. Ind. Appl. Math., 3 (1955).
2. I. Crețu, E. Soare, Al. Osnea, *Model compozițional pentru curgerea bifazică în medii poroase*, Temă contractată cu I.C.P.P.G., Cîmpina, 1975, 1976.
3. R. MacDonald, *Reservoir simulation with interphase mass transfer*, Ph. D. Dissertation, University of Texas at Austin, 1971.
4. A. B. Ramesh, *Two-dimensional simulation of carbonated water flooding in a heterogeneous reservoir*, Ph. D. Dissertation, University of Texas at Austin, 1971.

CURGEREA LAMINARĂ A FLUIDELOR ÎN SPAȚII INELARE

de Al. D. STAN

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În tehnică se întîlnesc frecvent situații în care un fluid curge printr-un spațiu inelar. Acesta este, în majoritatea cazurilor, excentric sau] cu excentricitate variabilă. Pentru spațiul inelar fără excentricitate, precum și pentru cel cu excentricitate în cazul unei curgeri laminare a unui fluid newtonian se indică formula de calcul a pierderii de presiune, elementul cel mai important în aplicațiile practice.

Relațiile obținute acoperă toate situațiile întîlnite în tehnica de șantier și concordă foarte bine cu cele din literatura de specialitate.

1. INTRODUCERE

În tehnică sînt frecvente situațiile în care apare o curgere laminară printr-un spațiu inelar. De obicei, spațiul inelar este excentric, și în multe cazuri din tehnica petrolieră (forajul sondelor, extracția gazelor și petrolului etc.) excentricitatea este variabilă. Pentru spațiul inelar fără excentricitate există în literatură [1, 2, 5] soluții ale micșării unui fluid newtonian. Un element inportant în tehnica de șantier este pierderea de presiune ce se produce într-un spațiu inelar, mai ales dacă acesta este excentric.

Se poate obține relația de calcul pentru pierderea de presiune în spațiul inelar fără excentricitate luînd ca punct de plecare integrarea ecuației de mișcare în coordonate cilindrice care se reduce la forma

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rv) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{1}$$

unde v este componenta vitezei proiectată pe axa Oz, p este presiunea, iar r și z se referă la sistemul de axe ales ca în figura 1, μ fiind viscozitatea dinamică a fluidului.

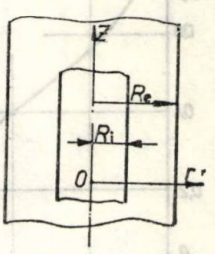


Fig. 1

Soluția ecuației (1) satisface condițiile la limită

$$v = 0 \quad \text{la} \quad r = R_i \quad \text{și} \quad r = R_e \tag{2}$$

și

$$v = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\left(r^2 - R_e^2 + \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln\dfrac{R_e}{R_i}}\ln\frac{R_e}{r}\right). \tag{3}$$

Viteza medie v_{med} se obține din relația

$$\pi(R_e^2 - R_i^2)\, v_{med} = 2\pi \int_{R_i}^{R_e} vr\, dr \tag{4}$$

și are expresia

$$v_{med} = \frac{\Delta p}{8\mu l}\left(R_e^2 + R_i^2 - \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln \frac{R_e}{R_i}} \right), \tag{5}$$

unde s-a înlocuit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\Delta p}{l}. \tag{6}$$

Pierderea de presiune se poate scrie sub forma obișnuită

$$\Delta p = \rho \frac{v_{med}^2}{2} \frac{l}{2R_h} \lambda_i, \tag{7}$$

R_h fiind raza hidraulică definită prin formula

$$R_h = \frac{2 \cdot \text{aria de curgere a fluidului}}{\text{perimetrul udat}}, \tag{8}$$

care ne dă, pentru situația de față,

$$R_h = R_e - R_i. \tag{9}$$

Prin egalarea expresiei (7) a pierderii de presiune Δp cu aceea care rezultă din (5) se obține coeficientul de rezistență în spațiul inelar fără excentricitate

$$\lambda_i = \frac{64}{\mathcal{R}e\, f(k)}, \tag{10}$$

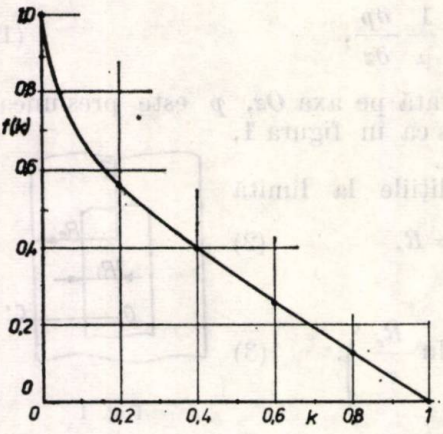


Fig. 2

unde $\mathcal{R}e$ este numărul lui Reynolds definit prin viteza medie și diametrul cilindrului exterior ($2R_e$), iar $f(k)$ are expresia

$$f(k) = \frac{1 + k^2}{1 - k} + \frac{1 + k}{\ln k}, \tag{11}$$

k fiind definit prin relația

$$R_i = k\, R_e. \tag{12}$$

În figura 2 este reprezentată $f(k)$ în funcție de parametrul k. Se observă că pentru $k = 0$, $f(k) = 1$. Ceea ce arată că la această valoare

a lui k coeficientul de rezistență în spațiul inelar coincide cu acela calculat pentru un tub de secțiune circulară [3, 6]. La valorile apropiate de unitate ale lui k, coeficientul de rezistență în spațiul inelar are valori foarte mari.

În tabelul 1 se redau valorile lui $\mathcal{R}e\ \lambda_i/64$ în funcție de parametrul k.

Tabelul 1

k	0	0,20	0,40	0,60	0,80	0,90
$\mathcal{R}e\ \lambda_i/64$	1	1,8037	2,4665	3,7339	7,4949	15,0170

2. COEFICIENTUL DE REZISTENȚĂ ÎN SPAȚIUL INELAR EXCENTRIC. VALOAREA APROXIMATIVĂ

În tehnică sînt frecvente situațiile în care spațiul inelar este excentric (fig. 3). În lucrarea [5] s-a definit excentricitatea relativă prin relația

$$e^* = \frac{e}{R_e - R_i}. \tag{13}$$

În lucrarea noastră, pentru o mai mare simplitate a relațiilor obținute, se introduce o excentricitate relativă e_1 prin formula

$$e_1 = \frac{e}{R_e}. \tag{14}$$

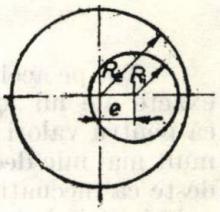


Fig. 3

Între e^* și e_1 există relația evidentă

$$e_1 = (1 - k)\, e^*. \tag{15}$$

Pentru un spațiu inelar cu o excentricitate constantă în lungul celor doi cilindrii se pot obține limitele între care variază parametrul $\lambda_e/64$. În acest scop este evident că pierderea de presiune Δp_{ex} în spațiul excentric satisface inecuațiile

$$\Delta p_2 \leqslant \Delta p_{ex} \leqslant \Delta p_1, \tag{16}$$

unde prin Δp_1 s-a notat pierderea de presiune în spațiul inelar fără excentricitate format de cilindrii care au razele R_e și $R_{i1} = R_i - e$; Δp_2 este pierderea de presiune în spațiul inelar tot fără excentricitate, cu razele R_e și, respectiv, $R_{i2} = R_i + e$.

Dacă se scriu cele două mărimi Δp_1 și Δp_2 sub forma relației (7) și se înlocuiesc în ambele cazuri razele hidraulice și coeficienții de rezistență calculați cu relațiile (8) și (10), rezultă că $\lambda_e/64$ satisface inecuațiile

$$\frac{1}{f(k_2)} \frac{(1-k^2)(1+k)}{(1-k_2^2)(1+k_2)} \leqslant \frac{\lambda_e}{64} \leqslant \frac{1}{f(k_1)} \frac{(1-k^2)(1+k)}{(1-k_1^2)(1+k_1)}, \tag{17}$$

unde $k_1 = \frac{R_{i1}}{R_e}$ și $k_2 = \frac{R_{i2}}{R_e}$,

$f(k_1)$ și $f(k_2)$ sînt valorile lui $f(k)$, definită prin relația (11), pentru $k = k_1$ și, respectiv, $k = k_2$, iar λ_e este coeficientul de rezistență pentru spațiul inelar excentric.

În figura 4 se reprezintă prin curba M expresia care majorează pe $\lambda_e/64$, iar prin m expresia care-l minorează.

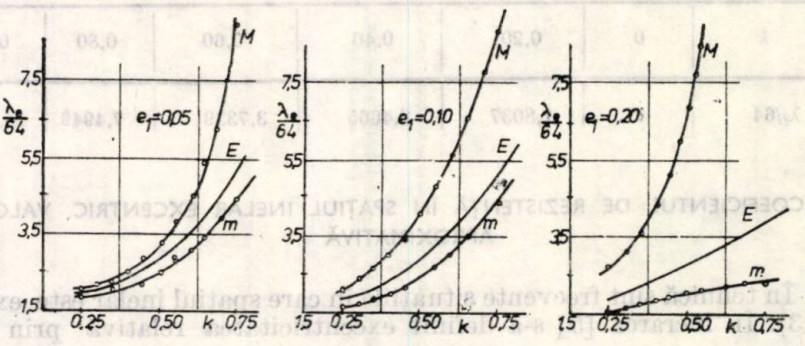


Fig. 4

Tot pe aceleași grafice sînt reprezentate curbele E care sînt valorile exacte ale lui $\lambda_e/64$ calculate în paragraful următor. Se remarcă faptul că pentru valori mici ale lui k și e_1 intervalul dintre curbele M și m este mult mai mic decît la valori mari ale acestor parametri. Acest lucru dovedește că inecuațiile (17) pot fi utilizate pentru a calcula raportul $\lambda_e/64$ la valori mici ale lui k și e_1 fără a introduce erori însemnate.

3. COEFICIENTUL DE REZISTENȚĂ ÎN SPAȚIUL INELAR CU EXCENTRICITATE CONSTANTĂ

Pentru situația cînd cilindrii sînt excentrici, ecuația de mișcare se reduce tot la forma (1) și satisface condițiile la limită

$$v = 0 \quad \text{la} \quad r = R_e \quad \text{și} \quad r = R_1, \tag{18}$$

unde R_1 reprezintă distanța de la centrul cercului de rază R_e pînă la cercul de rază R_i (fig. 5). Distanța R_1 se poate scrie în funcție de unghiurile θ și α

$$R_1 \cos \theta = R_i \cos \alpha + e. \tag{19}$$

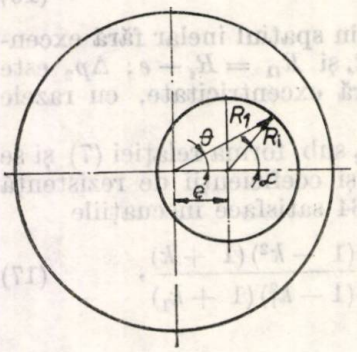


Fig. 5

Expresia vitezei v este asemănătoare cu cea obținută pentru spațiul inelar fără excentricitate (3), cu deosebirea că în locul lui R_i se introduce R_1. Între viteza medie v_{med} și viteza din spațiul inelar excentric se

poate scrie relația

$$\pi(R_e^2 - R_i^2)\, v_{\text{med}} = 2\int_0^{\pi}\int_{R_1}^{R_e} vr\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta,$$

iar prin integrarea în raport cu r și introducerea notației

$$E_1 = R_1/R_e$$

se găsește

$$v_{\text{med}} = \frac{\Delta p_{ex}}{8\pi\mu l} \cdot \frac{R_e^2}{1 - k^2} \int_0^{\pi} (1 - E_1^2)\left(1 + E_1^2 + \frac{1 - E_1^2}{\ln E_1}\right) \mathrm{d}\theta, \tag{20}$$

unde ca și mai înainte s-a utilizat relația (6) și s-a notat cu Δp_{ex} pierderea de presiune în spațiul inelar cu excentricitate constantă.

Scriind pierderea de presiune în spațiul inelar excentric sub forma relației (7), avînd în vedere că raza hidraulică este, și în acest caz, tot $R_e - R_i$, rezultă că expresia coeficientului de rezistență în spațiul inelar excentric are forma

$$\lambda_e = \frac{64}{\mathcal{R}e} S, \tag{21}$$

unde s-a folosit notația

$$S = \frac{\pi(1 - k^2)(1 - k)}{\int_0^{\pi} (1 - E_1^2)\left(1 + E_1^2 + \dfrac{1 - E_1^2}{\ln E_1}\right) \mathrm{d}\theta}. \tag{22}$$

Calculul lui S s-a efectuat pentru diferite valori ale lui k (0,25 ; 0,35 ; 0,45 ; 0,55 ; 0,65 ; 0,75) și diverse excentricități relative e_1 (0,05 ; 0,10 ; 0,15 ; 0,20). Integrala care intervine în S s-a efectuat utilizînd regula 1/3 a lui Simpson [4] la care se apreciază că se introduce o eroare de ordinul lui h^5, h fiind lungimea unui subinterval care a fost luat egal cu $\pi/180$ deoarece intervalul $0 - \pi$ a fost divizat în 180 părți. În situația de față eroarea are ordinul de mărime $\left(\frac{\pi}{180}\right)^5 = 1{,}6195 \cdot 10^{-9}$ și integrala a fost calculată cu formula

$$I = \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{90} [g_{2j-1}(\theta) + 4g_{2j}(\theta) + g_{2j}(\theta)], \tag{23}$$

j fiind indicele de sumare, iar cu $g(\theta)$ s-a notat expresia

$$g(\theta) = (1 - E_1^2)\left(1 + E_1 + \frac{1 - E_1^2}{\ln E_1}\right). \tag{24}$$

În funcție de unghiul θ, E_1 s-a obținut scriind teorema cosinusului

$$R_1^2 = R_i^2 + e^2 - 2R_i \cdot e \cos\theta, \tag{25}$$

de unde rezultă

$$E_1 = \sqrt{k^2 + e_1^2 - 2ke_1 \cos\theta}\,. \tag{26}$$

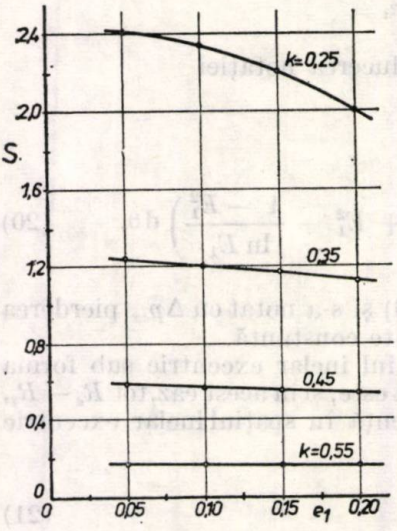


Fig. 6

În figura 6 se redau valorile lui S în funcție de k și e_1 de unde se observă că S scade pe măsură ce k și e_1 cresc și în special atunci cînd crește k. Raportul dintre Δp_{ex} și Δp are valoarea

$$\frac{\Delta p_{ex}}{\Delta p} = f(k)S. \tag{27}$$

În tabelul 2 se redau cîteva valori ale produsului $f(k)S$ în funcție de k și e_1.

Rezultatele prezentate în tabelul 2 arată că pe măsură ce crește k, pierderea de presiune în spațiul inelar excentric este mai mică decît în spațiul inelar fără excentricitate. Pentru valori constante ale lui k pierderea de presiune scade atunci cînd excentricitatea relativă e_1 crește. Acest fapt poate fi explicat, așa cum se va vedea mai departe, prin aceea că la mărirea lui e_1 eforturile unitare de frecare medii pe cilindrul interior și pe cel exterior scad.

Tabelul 2

e_1 \ k	0,35	0,45	0,55	0,65
0,05	0,7047	0,3538	0,1670	0,0706
0,10	0,6940	0,3503	0,1658	0,0704
0,15	0,6768	0,3452	0,1641	0,0697
0,20	0,6536	0,3377	0,1618	0,0690

4. COMPARAREA RELAȚIILOR OBȚINUTE CU CELE DIN LITERATURĂ

Efortul de forfecare pe cilindrul exterior este τ_e și se calculează cu relația [2,5]:

$$\tau_e = (\tau_{zr} + \tau_{z\theta})|_{r=R_e}\,, \tag{28}$$

iar eforturile τ_{zr} și $\tau_{z\theta}$ au expresiile

$$\tau_{zr} = \mu \frac{\partial v}{\partial r}\,, \quad \tau_{z\theta} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}\,. \tag{29}$$

Prin înlocuirea expresiei vitezei rezultă

$$\tau_{zr} = -\frac{\Delta p_{ex}}{l} R_e \left(1 + \frac{1 - E_1^2}{\ln E_1}\right), \quad \tau_{z\theta} = 0 \tag{30}$$

și prin introducerea lui Δp_{ex}

$$-\frac{\tau_e}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}} = \frac{1}{4(1-k)} \left(1 + \frac{1 - E_1^2}{\ln E_1}\right) \frac{64}{\mathcal{R}e} S. \tag{31}$$

În figura 7 se prezintă variația parametrului $-\frac{\tau_e}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}}$ în raport cu unghiul θ pentru $k = 0{,}25$; $0{,}45$ și $e_1 = 0{,}05$; $0{,}10$; $0{,}20$.

Se observă că valoarea absolută a lui τ_e scade pe măsură ce unghiul θ crește; aceasta se datorește faptului pe măsură ce se mărește θ distanța dintre pereții cilindrilor crește, ceea ce face ca gradientul vitezei în raport cu raza să se micșoreze.

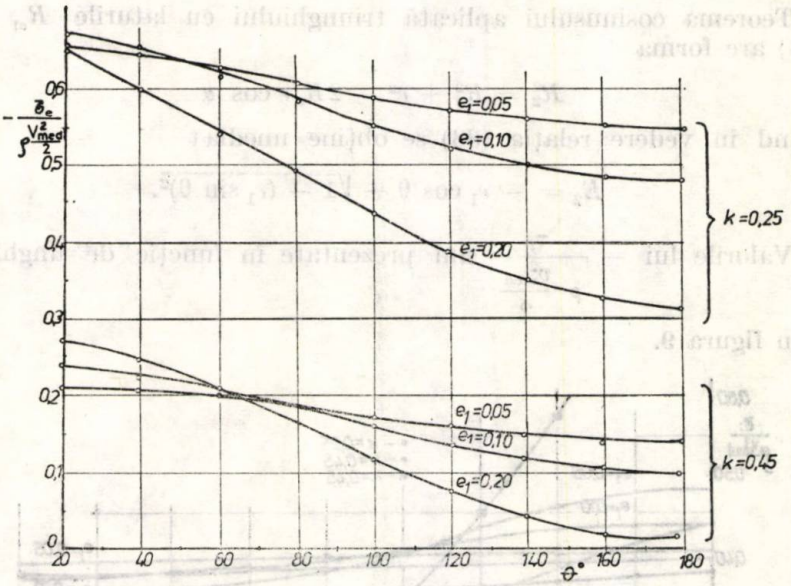


Fig. 7

Pentru a calcula efortul pe cilindrul interior τ_i s-a ales sistemul de coordonate cu originea în centrul cercului de rază R_i (fig. 8). Față de acest sistem de referință se integrează tot ecuația diferențială (1) cu condițiile la limită

$$v = 0 \text{ la } r = R_2 \text{ și } r = R_i, \tag{32}$$

unde R_2 se obține din relația

$$R_e \cos \alpha = R_2 \cos \theta + e. \tag{33}$$

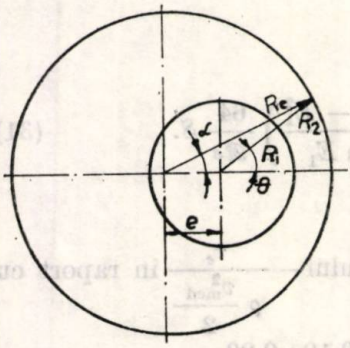


Fig. 8

Și în această situație expresia vitezei coincide cu cea obținută mai înainte (3) cu deosebirea că în locul lui R_e se introduce R_2.

Printr-un calcul asemănător ca cel efectuat pentru τ_e se obține efortul τ_i; expresia acestuia, raportată la $\rho \frac{v_{med}^2}{2}$, este

$$-\frac{\tau_i}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}} = \frac{k}{4(1-k)}\left(1 + \frac{1 - E_2 k^2}{\ln \frac{E_2}{k}}\right)\frac{64}{\mathcal{R}e} S, \tag{34}$$

unde s-a notat cu ρ densitatea fluidului și

$$E_2 = \frac{R_2}{R_e}. \tag{35}$$

Teorema cosinusului aplicată triunghiului cu laturile R_e, R_2 și e (fig. 8) are forma

$$R_2^2 = R_e^2 + e^2 - 2R_e e \cos \alpha \tag{36}$$

și avînd în vedere relația (33) se obține imediat

$$E_2 = -e_1 \cos \theta + \sqrt{1 - (e_1 \sin \theta)^2}. \tag{37}$$

Valorile lui $-\frac{\tau_i}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}}$ sînt prezentate în funcție de unghiul θ, k și e_1 în figura 9.

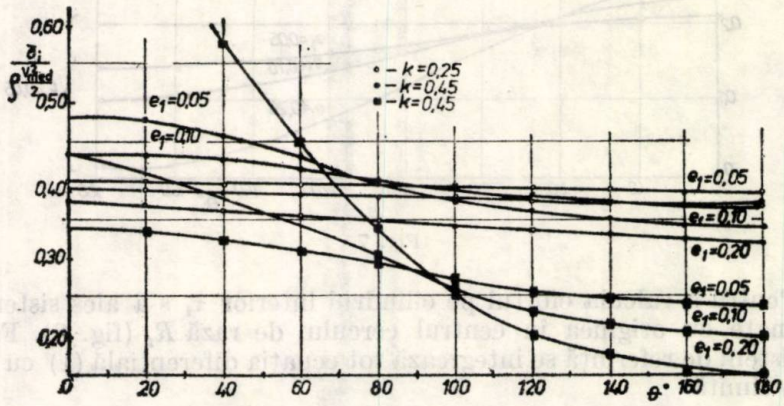


Fig. 9

În figura 10 se reprezintă valorile lui $\frac{\overline{\tau}_e}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}}$ și $\frac{\overline{\tau}_i}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}}$ în funcție de k și e_1. Prin $\overline{\tau}_e$ și $\overline{\tau}_i$ au fost notate valorile medii ale lui τ_e și, respectiv, τ_i. Valoarea medie $\overline{\tau}_e$ s-a calculat cu relația

$$\overline{\tau}_e = \frac{1}{180} \sum_{i=1}^{180} (\tau_e)_i \tag{38}$$

și pentru $\overline{\tau}_i$ s-a folosit o relație asemănătoare.

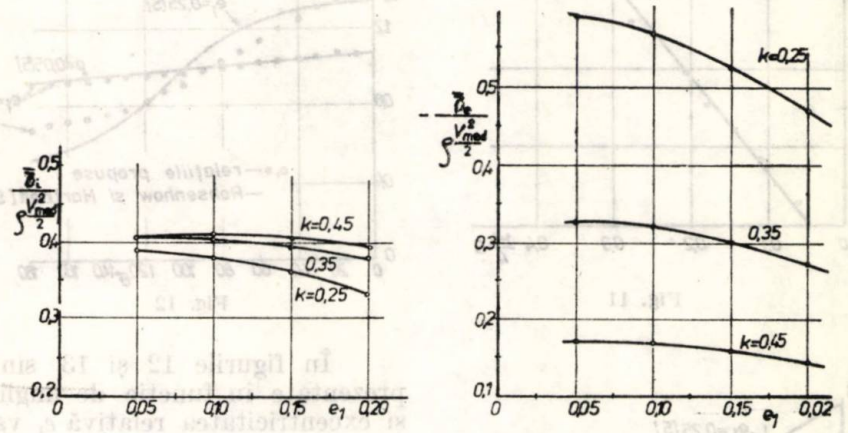


Fig. 10

Calculele au fost efectuate pe un calculator FELIX C-256. Tot pe același calculator au fost calculate și mărimile $(\overline{\tau}_e + k\overline{\tau}_i)/\rho \frac{v_{med}^2}{2}$ și $\left(\frac{1+k}{4} S\right)$, acesta din urmă fiind un parametru care se obține prin egalarea forței de frecare dintre fluid și pereții cilindrilor pe un element de lungime l

$$2\pi(R_e \overline{\tau}_e + R_i \overline{\tau}_i)\, l,$$

cu forța de presiune ce acționează pe secțiunea de curgere a fluidului,

$$\pi(R_e^2 - R_i^2)\, \Delta p_{ex}.$$

După introducerea expresiei Δp_{ex} în egalitatea menționată și efectuarea calculelor, rezultă

$$\frac{\overline{\tau}_e + k\overline{\tau}_i}{\rho \frac{v_{med}^2}{2}} = \frac{1+k}{4} \frac{64}{\mathcal{R}e} S. \tag{39}$$

Prin reprezentarea grafică a raportului $(\overline{\tau}_e + k\overline{\tau}_i)/\rho \frac{v_{med}^2}{2}$ în funcție de parametrul $(1 + k)S/4$ se obține practic o dreaptă (fig. 11), ceea ce dovedește că atît la calculul lui S al lui τ_e și τ_i, deci și la $\overline{\tau}_e$ și $\overline{\tau}_i$, nu s-au introdus erori prea mari.

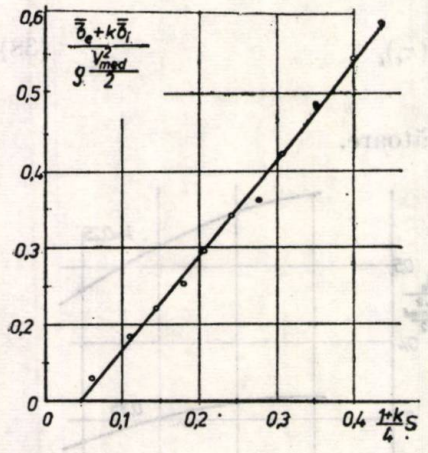


Fig. 11

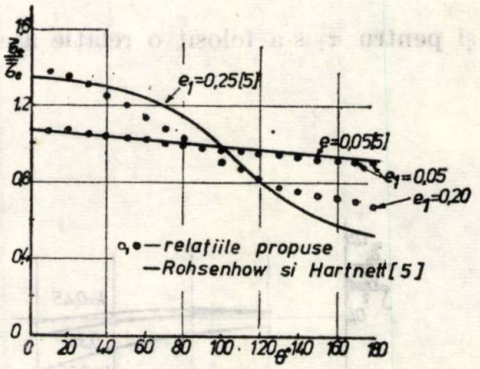


Fig. 12

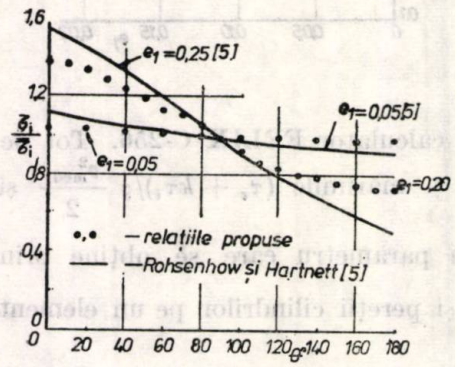


Fig. 13

În figurile 12 și 13 sînt reprezentate în funcție de unghiul θ și excentricitatea relativă e_1 valorile $\tau_e/\overline{\tau}_e$ și $\tau_i/\overline{\tau}_i$ rezultate în urma calculelor noastre precum și cele din literatură [5].

Pentru excentricitatea relativă $e_1 = 0{,}05$ concordanța dintre $\tau_e/\overline{\tau}_e$ din relațiile obținute cu cele din literatură este foarte bună. Aceeași concordanță se observă și la raportul $\tau_i/\overline{\tau}_i$ (fig. 13). Valorile oarecum distincte între celelalte două seturi de valori se datoresc faptului că excentricitățile e_1 au fost diferite 0,25 în [5] și 0,20 în lucrarea noastră.

5. EFECTUL EXCENTRICITĂȚII VARIABILE ASUPRA PIERDERII DE PRESIUNE

Există situații practice în care excentricitatea este variabilă; o asemenea situație ar putea fi întîlnită la curgerea fluidului prin spațiul inelar la o sondă deviată, la care deviația apare de o parte și de alta a axului vertical ce trece prin punctul unde a fost amplasată locația de forare. Pentru un element de lungime dz se poate scrie egalitatea

$$\pi(R_e^2 - R_i^2)\, dp_{ext} = 2\pi\,(\tau_e R_e + \tau_i R_i)\, dz, \qquad (40)$$

în care prin dp_{exv} s-a notat pierderea de presiune elementară în spațiul inelar cu excentricitate variabilă. Dacă se înlocuiesc expresiile lui τ_e, relația (31) și τ_i, relația (34), în ecuația (40) se găsește

$$dp_{exv} = -\rho \frac{v_{med}^2}{2} \frac{64}{\mathcal{R}e} \frac{FS}{2R_e(1-k)(1-k^2)} dz, \tag{41}$$

unde s-a introdus notația

$$F = 1 + \frac{1-E_1^2}{\ln E_1} + k\left(1 + \frac{1-E_2^2k^2}{\ln \frac{E_2}{k}}\right).$$

Prin integrarea ecuației diferențiale (41) între limitele 0 și z rezultă

$$\Delta p_{exv} = \rho \frac{v_{med}^2}{2} \frac{64}{\mathcal{R}e} \frac{1}{2R_e(1-k)(1-k^2)} \int_0^z FS\, dz, \tag{42}$$

unde cu Δp_{exv} s-a notat pierderea de presiune care se produce pe lungimea z în cazul unei excentricități variabile.

Raportul dintre Δp_{exv} și Δp_{ex} are valoarea

$$\frac{\Delta p_{exv}}{\Delta p_{ex}} = \frac{\int_0^z FS\, dz}{lS}. \tag{43}$$

Calculul raportului $\Delta p_{exv}/\Delta p_{ex}$ s-a efectuat pe calculator după ce s-a introdus în relația (43) valorea medie a lui F.

Aceasta a fost calculată ca medie aritmetică, pentru fiecare pereche de valori k și e_1, în raport cu unghiul θ, din relația

$$F_{med} = \frac{1}{180} \sum_{i=1}^{180} (F)_i. \tag{44}$$

S-a calculat apoi pentru lungimea $l=1$ m numărătorul fracției din (43), considerînd că pe această distanță excentricitatea relativă e_1 crește de la valoarea zero la valoarea finală pentru care se calculează raportul $\Delta p_{exv}/\Delta p_{ex}$. Din acest motiv lungimea l ca și excentricitatea e_1 au fost împărțite în 25 părți. Pentru fiecare interval de lungime, $\Delta l = 0{,}04$ m, excentricitatea a crescut cu valoarea $e_1/25$.

În acest fel numărătorul fracției (43) s-a calculat cu ajutorul relației

$$\int_0^z FS\, dz = \Delta l\, F_{med} \sum_{i=1}^{25} (S)_i, \tag{45}$$

în care parametrul S a fost determinat pe cele 25 tronsoane în funcție de k și

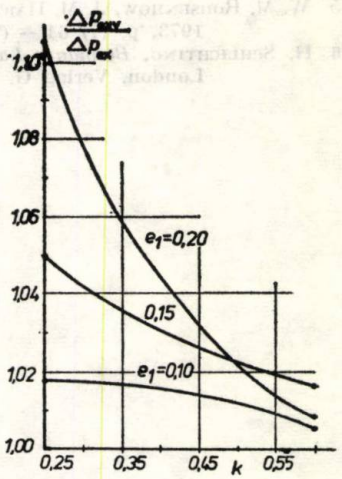


Fig. 14

excentricitatea relativă a fiecărui tronson. Celălalt parametru S, de la numitorul fracției din (43), s-a determinat în funcție de k și excentricitatea finală e_1 pentru care s-a calculat $\Delta p_{exv}/\Delta p_{ex}$.

Se observă (fig. 14) că raportul $\Delta p_{exv}/\Delta p_{ex}$ este mai mare decît unitatea, ceea ce dovedește că pierderea de presiune este mai mare într-un spațiu inelar cu excentricitate variabilă, cuprinsă între 0 și e_1, decît într-un spațiu inelar cu excentricitatea relativă constantă e_1. Este de presupus că pentru un spațiu inelar cu excentricitate variabilă, pierderea de presiune este mai mică decît la un spațiu inelar fără excentricitate.

6. CONCLUZII

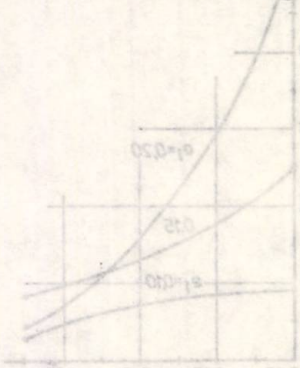
Pierderea de presiune într-un spațiu inelar excentric este mai mică față de cea în spațiul inelar fără excentricitate.

În ipoteza unei excentricități variabile, valoarea acesteia fiind cuprinsă între 0 și e_1, pierderea de presiune este mai mare decît dacă ar exista o excentricitate constantă e_1. Datorită acestor două rezultate obținute în lucrare, se poate admite că într-un spațiu inelar cu excentricitate variabilă, pierderea de presiune este mai mică decît aceea din spațiul inelar fără excentricitate. Rezultatele obținute au o mare aplicabilitate în tehnica de șantier.

Primită la redacție la 14 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. G. Iordache, N. Macovei, *Forarea sondelor. Culegere de probleme*, Edit. tehnică, București, 1977, p. 110—111.
2. L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, Editions Mir, Moscou, 1971, p. 72—74.
3. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, Edit. Academiei, București, 1967, p. 64—67.
4. C. Popa, *Programarea în fortran și metode numerice cu aplicații în foraj-extracție*, Institutul de petrol și gaze, Ploiești, 1978, p. 262—266.
5. W. M. Rohsenhow, J. M. Hartnett, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw Hill Book Comp., 1973, p. (7) 64 — (7) 72.
6. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw Hill Book Comp. New York, Toronto, London, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1960, p. 53—54.



STUDIUL MANEVRELOR OPTIME ALE VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN APROPIEREA PUNCTELOR DE LIBRAȚIE DIN SISTEMUL PĂMÎNT-LUNĂ

de MIHAI POPESCU

Institutul de mecanica fluidelor și construcții aerospațiale

În lucrare se studiază problema manevrelor optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor coliniare de librație din sistemul Pămînt-Lună.
După un studiu asupra naturii extremumului care demonstrează că funcționala consumului de combustibil este într-adevăr minimă de-a lungul extremalei, se determină apoi soluțiile riguroase ale sistemului de ecuații diferențiale ale extremalelor care generalizează pentru cazul $\omega \neq 0$ soluțiile din [1].

1. NOTAȚII

Gxy	— sistem rotitor de axe de coordonate cu originea în baricentrul G al sistemului Pămînt-Lună (fig. 1),
x,y	— coordonate ale vehiculului în sistemul de axe Gxy,
$L\xi\eta$	— sistem rotitor de axe de coordonate cu originea în punctul de librație (fig. 1),
ξ,η	— coordonate ale vehiculului în sistemul de axe $L\xi\eta$,
$\bar{x},\bar{y}$	— coordonate ale punctului de librație în sistemul Gxy,
r	— distanța de la Pămînt la punctul de librație,
ρ	— distanța de la Lună la punctul de librație,
S_1	— distanța dintre baricentru și Pămînt,
S_2	— distanța dintre baricentru și Lună,
D	— distanța dintre Pămînt și Lună,
t	— timpul,
τ	— durata combustiei (manevrei),
ω	— viteza unghiulară de rotație în jurul baricentrului,
μ	— parametrul gravitațional al Pămîntului,
m	— masa vehiculului,
m_1	— masa Pămîntului,
m_2	— masa Lunii,
V_ξ, V_η	— componente ale vitezei vehiculului în direcția axelor sistemului $L\,\xi\eta$,
a_ξ, a_η	— componente ale accelerației datorită tracțiunii în direcția axelor sistemului $L\xi\eta$,
g	— accelerația gravitației.

2. INTRODUCERE

În lucrarea [1] s-a arătat că metoda impulsurilor, dezvoltată în lucrările [2]—[7], este rațională în transferul din punctele de librație către

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 5, 1979, P. 649 — 660

orbite ale Pămîntului sau Lunii, dar în situaţia inversă (transfer de pe orbite ale Pămîntului sau Lunii în punctele de libraţie) prezintă dificultăţi.

Este binecunoscut faptul că în transferul de pe orbite ale Pămîntului în punctele de libraţie ale sistemului Pămînt-Lună, vitezele iniţiale sînt foarte apropiate ca valoare şi erori mici asupra acestora pot duce la abateri mari ale vehiculului faţă de ţintă.

Utilizarea impulsurilor poate aduce în mod cert vehiculul pe orbite în jurul punctelor de libraţie sau în apropierea lor.

La întrebarea prin ce mijloace poate ajunge cu precizie vehiculul din aceste situaţii în punctele de libraţie, lucrarea [1] a dat, după cît se pare, un răspuns şi anume, utilizarea acţiunii continue a propulsiei cu tracţiuni mici.

Acest nou concept introdus de Al. Marinescu [1] prevede în plus şi posibilitatea transferului vehiculului din punctele de libraţie în apropiere sau pe orbite în jurul lor.

Formulînd problema variaţională a manevrelor optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor de libraţie din sistemul Pămînt-Lună ca o problemă de extremum condiţionat cu extremităţi fixe, în lucrarea [1], spre a ilustra metoda, s-au calculat soluţiile aproximative ale ecuaţiilor diferenţiale ale extremalelor pentru punctele coliniare de libraţie.

Aproximaţia introdusă în [1] în scopul unor simplificări esenţiale ale calculelor a fost considerîndu-se $\omega = 0$.

În lucrarea de faţă, urmărind îndeaproape lucrarea [1], se face un studiu complet, analizîndu-se mai întîi natura extremumului, după care apoi se determină soluţiile exacte ale ecuaţiilor diferenţiale ale extremalelor ($\omega \neq 0$) care caracterizează manevrele optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor coliniare de libraţie din sistemul Pămînt-Lună.

3. PROBLEMA VARIAŢIONALĂ. NATURA EXTREMUMULUI

Ecuaţiile de mişcare ale vehiculului sub acţiunea instalaţiei de propulsie de mică tracţiune în sistemul $L\xi\eta$ (fig. 1) au fost stabilite în [1] arătîndu-se pe baza lor că în cazul general problema variaţională a manevrelor optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor de libraţie din sistemul Pămînt-Lună revine la a găsi minimul funcţionalei

$$J = \int_0^\tau (a_\xi^2 + a_\eta^2)\, dt, \tag{1}$$

cu condiţiile

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{d\xi}{dt} - V_\xi = 0,\\
\Phi_2 &= \frac{dV_\xi}{dt} - 2\omega V_\eta - K_1\xi - K_3\eta - a_\xi = 0,\\
\Phi_3 &= \frac{d\eta}{dt} - V_\eta = 0,\\
\Phi_4 &= \frac{dV_\eta}{dt} + 2\omega V_\xi - K_2\eta - K_3\xi - a_\eta = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Trebuie subliniat că în condițiile (2) sistemul de unități adoptat este $D=1$ și unitatea de timp aleasă astfel încît $\mu = 1$, unde, pentru punctele echidistante de librație,

$$K_1 = \frac{3}{4}(1 + m^*),$$

$$K_2 = \frac{9}{4}(1 + m^*),$$

$$K_3 = \mp \frac{3}{4}\sqrt{3}\,(1 - m^*),$$

iar pentru punctele coliniare de librație

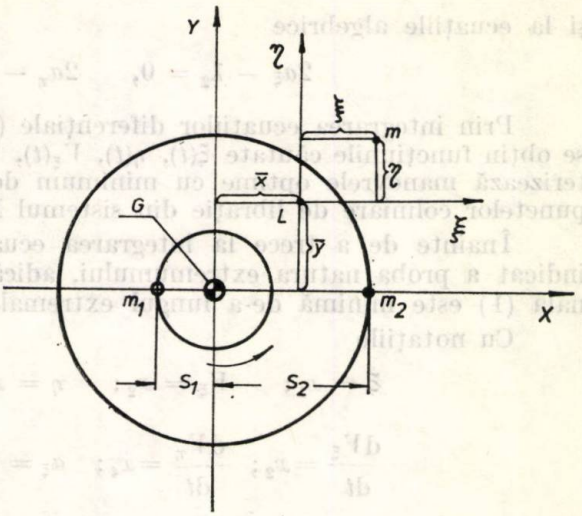


Fig. 1

$$K_1 = 1 + m^* + \frac{2}{r^3} + \frac{2m^*}{\rho^3},$$

$$K_2 = 1 + m^* - \frac{1}{r^3} - \frac{m^*}{\rho^3},$$

$$K_3 = 0 \qquad \left(m^* = \frac{m_2}{m_1}\right).$$

Pentru cazul punctelor coliniare de librație de care ne ocupăm, considerînd $K_3 = 0$, introducînd multiplicatorii lui Lagrange, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, și reducînd problema de extremum condiționat la o problemă de extremum necondiționat, sîntem conduși în urma calculelor la următoarele ecuații diferențiale ale extremalelor :

$$\frac{d\xi}{dt} = V_\xi; \qquad \frac{dV_\xi}{dt} = 2\omega V_\eta + K_1\xi + a_\xi,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_\eta; \qquad \frac{dV_\eta}{dt} = -2\omega V_\xi + K_2\eta + a_\eta, \tag{3}$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -K_1\lambda_2; \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = 2\omega\lambda_4 - \lambda_1,$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -K_2\lambda_4; \qquad \frac{d\lambda_4}{dt} = -\lambda_3 - 2\omega\lambda_2 \tag{4}$$

şi la ecuaţiile algebrice

$$2a_\xi - \lambda_2 = 0, \qquad 2a_\eta - \lambda_4 = 0. \tag{5}$$

Prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale (3), (4), ţinînd seama de (5), se obţin funcţiunile căutate $\xi(t)$, $\eta(t)$, $V_\xi(t)$, $V_\eta(t)$, $a_\xi(t)$, $a_\eta(t)$, care caracterizează manevrele optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor coliniare de libraţie din sistemul Pămînt-Lună.

Înainte de a trece la integrarea ecuaţiilor (3), (4) este cu totul indicat a proba natura extremumului, adică dacă, într-adevăr, funcţionala (1) este minimă de-a lungul extremalei.

Cu notaţiile

$$\xi = x_1; \quad V_\xi = x_2; \quad \eta = x_3; \quad V_\eta = x_4,$$

$$\frac{dV_\xi}{dt} = \dot{x}_2; \quad \frac{dV_\eta}{dt} = \dot{x}_4; \quad a_\xi = u_1; \quad a_\eta = u_2,$$

funcţionala (1) se va scrie

$$J = \int_0^\tau (u_1^2 + u_2^2)\, dt, \tag{1'}$$

iar ecuaţiile (3)

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = 2\omega x_4 + K_1 x_1 + u_1, \\ &\dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -2\omega x_2 + K_2 x_3 + u_2. \end{aligned} \tag{3'}$$

Ţinînd seama de (3'), expresia (1') a funcţionalei devine

$$J = \int_0^\tau F(x_i, \dot{x}_i, t)\, dt = \int_0^\tau [(\dot{x}_2 - 2\omega\dot{x}_3 - K_1 x_1)^2 + (\dot{x}_4 + 2\omega\dot{x}_1 - K_2 x_3)^2]\, dt. \tag{6}$$

Fie (γ) o extremală a problemei de optimum considerată.

O condiţie necesară pentru ca (γ) să realizeze un minimum al lui J constă în aceea că variaţia de ordinul doi a funcţionalei să fie nenegativă, astfel încît condiţia lui Legendre poate fi exprimată sub forma următoarei teoreme:

Teoremă. *O condiţie necesară pentru ca variaţia a doua a funcţionalei să fie nenegativă, este ca forma*

$$A = \sum_{i,j} F_{\dot{x}_i \dot{x}_j} \eta_i \eta_j \tag{7}$$

să fie nenegativă în orice punct al extremalei sau, ceea ce revine la acelaşi lucru, să fie îndeplinite inegalităţile

$$\Delta_1 = F_{\dot{x}_1 \dot{x}_1} \geqslant 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_2} \\ F_{\dot{x}_2\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_2} \end{vmatrix} \geqslant 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_3} \\ F_{\dot{x}_2\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_3} \\ F_{\dot{x}_3\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_3\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_3\dot{x}_3} \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{8}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} F_{\dot{x}_1\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_3} & F_{\dot{x}_1\dot{x}_4} \\ F_{\dot{x}_2\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_3} & F_{\dot{x}_2\dot{x}_4} \\ F_{\dot{x}_3\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_3\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_3\dot{x}_3} & F_{\dot{x}_3\dot{x}_4} \\ F_{\dot{x}_4\dot{x}_1} & F_{\dot{x}_4\dot{x}_2} & F_{\dot{x}_4\dot{x}_3} & F_{\dot{x}_4\dot{x}_4} \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Efectuînd calculele, se obține

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 8\omega^2; & \Delta_2 &= 16\omega^2, \\ \Delta_3 &= 0 \quad ; & \Delta_4 &= 512\omega^4 + 128\omega^3, \end{aligned} \tag{9}$$

de unde se vede că condiția lui Legendre este îndeplinită, mărimile (9) fiind toate pozitive sau nule.

4. DETERMINAREA SOLUȚIILOR EXACTE ALE PROBLEMEI

Pentru integrarea sistemului (3) este necesară determinarea funcțiilor a_ξ, a_η ce definesc componentele accelerației datorită tracțiunii, fapt care implică integrarea sistemului (4) la care satisfac multiplicatorii λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 și utilizarea ecuațiilor algebrice (5).

Trecînd în membrul întîi termenii din membrul doi se observă că sistemul (4) este un sistem omogen de ecuații diferențiale cu coeficienți constanți pentru care vom căuta soluții particulare de forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{pmatrix} e^{rt}. \tag{10}$$

Înlocuind în (4), din condiția ca sistemul liniar și omogen în raport cu necunoscutele $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ să nu aibă soluții banale, se ajunge la ecuația caracteristică

$$r^4 + (4\omega^2 - K_2)r^2 - K_1 r^2 + K_1 K_2 = 0, \tag{11}$$

ale cărei soluții sînt

$$r_1 = a, \quad r_2 = b, \quad r_3 = ib, \quad r_4 = -ib,$$

unde

$$a = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2)^2 - 4K_1K_2}}{2}\right]^{1/2},$$
$$b = \left[\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 - \sqrt{(K_1 + K_2 - 4\omega^2) - 4K_1K_2}}{2}\right]^{1/2}. \tag{12}$$

Urmînd procedeul cunoscut de integrare, cu ajutorul vectorilor proprii se determină un sistem fundamental de soluții cu care soluția generală pe care o scriem sub forma matriceală este

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\\ -a^2 + K_2\\ -2\omega K_2\\ 2\omega a\end{pmatrix} e^{at} + C_2\begin{pmatrix}-a(4\omega^2 - K_2 + a^2)\\ a^2 + K_2\\ -2\omega K_2\\ -2\omega a\end{pmatrix} +$$
$$+ C_3\begin{pmatrix}-b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt\\ (b^2 + K_2)\cos bt\\ -2\omega K_2 \cos bt\\ -2\omega b \sin bt\end{pmatrix} + C_4\begin{pmatrix}b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt\\ (b^2 + K_2)\sin bt\\ -2\omega K_2 \sin bt\\ 2\omega b \cos bt\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Ținînd seama de (12) și de (5), rezultă expresiile căutate ale componentelor accelerației datorită tracțiunii

$$a_\xi = \frac{\lambda_2(t)}{2} = \frac{1}{2}[C_1(-a^2 + K_2)e^{at} + C_2(-a^2 + K_2)e^{-at} +$$
$$+ C_3(b^2 + K_2)\cos bt + C_4(b^2 + K_2)\sin bt], \tag{14}$$
$$a_\eta = \frac{\lambda_4(t)}{2} = \frac{1}{2}[C_1 2\omega a e^{at} + C_2 2\omega a e^{-at} - C_3 2\omega b \sin bt + C_4 2\omega b \cos bt].$$

Pentru integrarea sistemului (3) se consideră mai întîi sistemul omogen

$$\frac{d\xi}{dt} - V_\xi = 0; \qquad \frac{dV_\xi}{dt} - 2\omega V_\eta + K_1\xi = 0,$$
$$\frac{d\eta}{dt} - V_\eta = 0; \qquad \frac{dV_\eta}{dt} + 2\omega V_\xi - K_2\eta = 0, \tag{15}$$

a cărui ecuație caracteristică este identică cu (11). În acest caz, soluția generală a sistemului omogen (15) se determină pe aceeași cale ca și în cazul sistemului (4), pe care o scriem sub forma matriceală

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{V}_\xi \\ \bar{\eta} \\ \bar{V}_\eta \end{pmatrix} = C_5 \begin{pmatrix} a(4\omega^2 - K_2 + a^2) \\ K_2(a^2 - K_2) \\ -2\omega K_1 \\ -2\omega K_1 a \end{pmatrix} e^{at} + C_6 \begin{pmatrix} -a^3 - (4\omega^2 - K_2)a \\ K_1(a^2 - K_2) \\ 2\omega K_1 \\ 2\omega K_1 a \end{pmatrix} +$$

$$+ C_7 \begin{pmatrix} -b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\sin bt \\ -K_1(b^2 - K_2)\cos bt \\ -2\omega K_1 \cos bt \\ 2\omega K_1 \sin bt \end{pmatrix} + C_8 \begin{pmatrix} b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\cos bt \\ -K_1(b^2 + K_2)\sin bt \\ -2\omega K_1 \sin bt \\ -2\omega K_1 \cos bt \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Ținînd seama de expresiile (14) ale funcțiilor a_ξ, a_η, soluțiile particulare ale sistemului neomogen (3) le căutăm sub forma

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^0 &= A_1 e^{at} + B_1 e^{-at} + D_1 \sin bt + E_1 \cos bt, \\ \bar{V}_\xi^0 &= A_2 e^{at} + B_2 e^{-at} + D_2 \sin bt + E_2 \cos bt, \\ \bar{\eta}_0 &= A_3 e^{at} + B_3 e^{-at} + D_3 \sin bt + E_3 \cos bt, \\ \bar{V}_\eta^0 &= A_4 e^{at} + B_4 e^{-at} + D_4 \sin bt + E_4 \cos bt. \end{aligned} \tag{17}$$

Impunînd condiția ca $\bar{\xi}^0$, $\bar{V}_\xi^0$, $\bar{\eta}^0$, $\bar{V}_\eta^0$ să verifice sistemul neomogen (3), ținînd seama de (17), se obține un sistem algebric cu cele 16 necunoscute A_i, B_i, D_i, E_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Rezolvînd acest sistem și ținînd seama că soluția generală a sistemului neomogen se scie

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \bar{\xi}(t) + \bar{\xi}^0(t); & V_\xi(t) &= \bar{V}_\xi(t) + \bar{V}_\xi^0(t), \\ \eta(t) &= \bar{\eta}(t) + \bar{\eta}^0(t); & V_\eta(t) &= \bar{V}_\eta(t) + \bar{V}_\eta^0(t), \end{aligned} \tag{18}$$

obținem în final soluția generală a sistemului neomogen (3):

$$\xi = \left\{ C_1 \frac{4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2}{2[4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)]} + C_5[a^3 + (4\omega^2 - K_2)a] \right\} e^{at} +$$

$$+ \left\{ C_2 \frac{4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2}{2[4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)]} + C_6[-a^3 - (4\omega^2 - K_2)a] \right\} e^{-at} +$$

$$+ \left\{ C_4 \frac{(b^2 + K_2)^2 - 4\omega^2 b^2}{2[(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2]} + C_7[-b(4\omega^2 - K_2 - b^2)] \right\} \sin bt +$$

$$+ \left\{ C_3 \frac{4\omega^2 b^2 + (b^2 + K_2)^2}{2[4\omega^2 b^2 - (b^2 + K_1)(b^2 + K_2)]} - C_8 b(4\omega^2 - K_2 - b^2) \right\} \cos bt,$$

$$V_\xi = \left\{ C_1 a \frac{4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2}{2[4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)} + C_5[K_1(a^2 - K_2)] \right\} e^{at} +$$

$$+ \left\{ -C_2 a \frac{4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2}{2[4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)]} + C_6 [K_1(a^2 - K_2)] \right\} e^{-at} +$$

$$+ \left\{ C_3 b \frac{4\omega^2 b^2 + (b^2 + K_2)^2}{2[(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2]} + C_8[-K_1(b^2 + K_2)] \right\} \sin bt +$$

$$+ \left\{ C_4 b \frac{(b^2 + K_2)^2 - 4\omega^2 b^2}{2[(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2]} - C_7 K_1 (b^2 + K_2) \right\} \cos bt,$$

$$\eta = \left\{ C_1 \omega a \frac{2a^2 - K_1 - K_2}{4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)} - C_5 2\omega K_1 \right\} e^{at} +$$

$$+ \left\{ C_2 \omega a \frac{K_2 - K_1}{4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)} - C_6 2\omega K_1 \right\} e^{-at} +$$

$$+ \left\{ C_3 \omega b \frac{2b^2 + K_1 + K_2}{(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2} - C_8 2\omega K_1 \right\} \sin bt +$$

$$+ \left\{ -C_4 \frac{2b^2 + K_1 + K_2}{(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2} - C_7 2\omega K_1 \right\} \cos bt, \qquad (19)$$

$$V_\eta = \left\{ C_1 \omega a^2 \frac{2a^2 - K_1 - K_2}{4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)} - C_5 2\omega a K_1 \right\} e^{at} +$$

$$+ \left\{ -C_2 \omega a^2 \frac{K_2 - K_1}{4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)} + C_6 2\omega a K_1 \right\} e^{-at} +$$

$$+ \left\{ C_4 b \frac{2b^2 + K_1 + K_2}{(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2} + C_7 2\omega b K_1 \right\} \sin bt +$$

$$+ \left\{ C_3 \omega b^2 \frac{2b^2 + K_1 + K_2}{(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2 b^2} - C_8 2\omega b K_1 \right\} \cos bt.$$

Funcțiile căutate $\xi(t)$, $\eta(t), \ldots a_\eta(t)$ care caracterizează manevrele optime în apropierea punctelor coliniare de librație conțin opt constante arbitrare $C_1, C_2, \ldots, C_8$. Pentru coborîrea de pe orbite în punctele de librație sau atingerea acestora din regiuni învecinate, problema devine similară cu aceea a întîlnirii orbitale [8].

Din condițiile inițiale ($t = 0$) :

$$\begin{aligned} \xi(0) &= \xi_0 ; & V_\xi(0) &= V_{\xi_0}, \\ \eta(0) &= \eta_0 ; & V_\eta(0) &= V_{\eta_0} \end{aligned} \qquad (20)$$

și din condițiile finale ($t = \tau$) :

$$\begin{aligned} \xi(\tau) &= 0 ; & V_\xi(\tau) &= 0, \\ \eta(\tau) &= 0 ; & V_\eta(\tau) &= 0 ; \end{aligned} \qquad (21)$$

cele opt constante pot fi complet determinate. În urma calculelor expresiile acestor constante devin

$$C_1 = \frac{4\omega^2a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)\{[b + e^{-a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)][V_{\xi_0}2\omega K_1 + V_{\eta_0}a(a^2 - 4\omega^2 - K_2)]}{b\omega\{K_1[4\omega^2a^2-(a^2-K_2)^2]+a^2(2a^2-K_1-K_2)(a^2+4\omega^2-K_2)\}[2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau-a\cos b\tau)-e^{-a\tau}(b\sin b\tau+a\cos b\tau)]} +$$

$$+\frac{[b + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau)][2\omega K_1\xi_0 + \eta_0 a(a^2 + 4\omega^2 - K_2)]}{b\omega[K_1[4\omega^2a^2-(a^2-K_2)^2]+a^2(2a^2-K_1-K_2)(a^2+4\omega^2-K_2)][2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau-a\cos b\tau)-e^{a\tau}(b\sin b\tau+a\cos b\tau)]}$$

$$C_2 = \frac{[4\omega^2a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)]\{[-b + e^{a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)][V_{\xi_0}2\omega K_1 - V_{\eta_0}a(a^2 + 4\omega^2 - K_2)] +}{b\omega\{K_1[4\omega^2a^2-(a^2-K_2)^2]-a^2(a^2+4\omega^2-K_2)(K_2-K_1)\}[2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau-a\cos b\tau)-e^{a\tau}(b\sin b\tau+a\cos b\tau)]}$$

$$\frac{+[a-e^{a\tau}(b\sin b\tau+a\cos b\tau)][b\xi_0 2\omega K_1 - b\eta_0 a(a^2+4\omega^2-K_2)]\}}{b\omega\{K_1[4\omega^2a^2 - (a^2 - K_2)^2] - a^2(a^2 + 4\omega^2 - K_2)(K_2 - K_1)\}[2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau-a\cos b\tau) -e^{a\tau}(b\sin b\tau+a\cos b\tau)]},$$

$$C_3 = \frac{[4\omega^2b^2 - (b^2 + K_1)(b^2 + K_2)]\{[e^{-a\tau}(b\cos b\tau + a\sin b\tau)(V_{\xi_0} - a\xi_0)+e^{a\tau}(a\sin b\tau - b\cos b\tau)(V_{\xi_0} + a\xi_0)]\cdot}{b\omega\{K_1[4\omega^2a^2-(a^2-K_2)^2]-a^2(a^2+4\omega^2-K_2)(K_2-K_1)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}$$

$$\frac{\cdot 2\omega K_1+[e^{-a\tau}(a\cos b\tau - b\sin b\tau)(a\eta_0 + V_{\eta_0})+ e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)(V_{\eta_0} - a\eta_0)]\, b(4\omega^2 - K_2 - b^2)\}}{b\omega\{K_1[4\omega^2a^2 - (a^2 - K_2)^2] - a^2(a^2 + 4\omega^2 - K_2)(K_2 - K_1)\}[2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]},$$

$$C_4 = \frac{[(b^2 + K_1)(b^2 + K_2) - 4\omega^2b^2]\{[e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau)(V_{\xi_0} - a\xi_0) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)(V_{\xi_0} + a\xi_0)]2\omega K_1 -}{b\{[(b^2+K_2)^2-4\omega^2b^2]\omega K_1 - b(2b^2+K_1+K_2)(4\omega^2-K_2-b^2)\}[2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)}$$

$$\frac{-b(4\omega^2-K_2-b^2)[e^{-a\tau}(b\cos b\tau+a\sin b\tau)(V_{\eta_0} - a\eta_0)+e^{a\tau}(a\sin b\tau - b\cos b\tau)(V_{\eta_0} + a\eta_0)]}{b\{[(b^2+K_2)^2 - 4\omega^2b^2]\omega K_1 - b(2b^2+K_1+K_2)(4\omega^2-K_2-b^2)\}[2a+e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]},$$

$$C_5 = \frac{2\omega a(2a^2 - K_1 - K_2)[4\omega^2 a^2 + (a^2 - K_1)(a^2 - K_2)]\{[V_{\xi_0}[b + e^{-a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)] +}{2b\omega\{K_1[4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2] + a^2(2a^2 - K_1 - K_2)(a^2 + 4\omega^2 - K_2)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}$$

$$\frac{+ b\xi_0[a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau)] - [4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2]\}V_{\eta_0}[b + e^{-a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)] + b\eta_0[a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau)}{2b\omega\{K_1[4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2] + a^2(2a^2 - K_1 - K_2)(a^2 + 4\omega^2 - K_2)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]},$$

$$C_6 = \frac{\{2\omega a(K_2 - K_1)V_{\xi_0} - [4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2]V_{\eta_0}\}[-b + e^{a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)] +}{b\{2\omega K_1[4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2] - \omega a^2(a^2 + 4\omega^2 - K_2)(K_2 - K_1)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}$$

$$\frac{+ \{2\omega a(K_2 - K_1)b\xi_0 - [4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2]b\eta_0\}[a - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}{b\{2\omega K_1[4\omega^2 a^2 - (a^2 - K_2)^2] - \omega a^2(a^2 + 4\omega^2 - K_2)(K_2 - K_1)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]},$$

$$C_7 = \frac{2(2b^2 + K_1 + K_2)\{V_{\xi_0}[e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)] + a\xi_0[e^{-a\tau}(a\cos b\tau - b\sin b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}{b[(b^2 + K_2)^2 - 4\omega^2 b^2 - 2b(2b^2 + K_1 + K_2)(4\omega^2 - K_2 - b^2)][2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}$$

$$\frac{+ [(b^2 + K_2)^2 - 4\omega^2 b^2]\{V_{\eta_0}[e^{-a\tau}(b\cos b\tau + a\sin b\tau) + e^{a\tau}(a\sin b\tau - b\cos b\tau)] - a\eta_0[e^{-a\tau}(b\cos b\tau + a\sin b\tau) + e^{a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)]\}}{b[(b^2 + K_2)^2 - 4\omega^2 b^2 - 2b(2b^2 + K_1 + K_2)(4\omega^2 - K_2 - b^2)][2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]},$$

$$C_8 = \frac{2\omega b(2b^2 + K_1 + K_2)\{V_{\xi_0}[e^{-a\tau}(b\cos b\tau + a\sin b\tau) + e^{a\tau}(a\sin b\tau - b\cos b\tau)] - a\xi_0[e^{-a\tau}(b\cos b\tau + a\sin b\tau) +}{\{2\omega K_1[4\omega^2 b^2 + (b^2 + K_2)^2] + \omega b^2(4\omega^2 - K_2 - b^2)(2b^2 + K_1 + K_2)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}$$

$$- \frac{+ e^{a\tau}(b\cos b\tau - a\sin b\tau)] + V_{\eta_0}[e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau) + a\eta_0[e^{-a\tau}(a\cos b\tau - b\sin b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}{\{2\omega K_1[4\omega^2 b^2 + (b^2 + K_2)^2] + \omega b^2(4\omega^2 - K_2 - b^2)(2b^2 + K_1 + K_2)\}[2a + e^{-a\tau}(b\sin b\tau - a\cos b\tau) - e^{a\tau}(b\sin b\tau + a\cos b\tau)]}.$$

5. APLICAȚIE NUMERICĂ

Cu ajutorul soluțiilor (19) de mai sus s-a efectuat o aplicație numerică privind manevra optimă de atingere a punctului de librație L_2 din sistemul Pămînt-Lună pentru care avem

$$m^* = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}01227\,; \qquad D = 3{,}84 \times 10^8 \text{ m},$$

$$\mu = 3{,}987 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2\,; \qquad r = 1{,}1682\ D,$$

$$\rho = 0{,}1682\ D.$$

Cu datele inițiale

$$\xi_0 = 0 \text{ m}\,; \qquad V_{\xi_0} = 30 \text{ m/s},$$

$$\eta_0 = 40 \times 10^6 \text{ m}\,; \qquad V_{\eta_0} = 0 \text{ m/s},$$

corespunzînd aproximativ situării vehiculului în apogeul unei orbite eliptice neperturbate în jurul punctului L_2 cu caracteristicile: semiaxa mare $a = 40 \times 10^6$ m, excentricitatea $\varepsilon = 0{,}9518$, perioada de revoluție $T = 1{,}329 \times 10^6$ s pentru o durată a combustiei $\tau = 5 \times 10^5$ s, s-au calculat componentele accelerației datorită tracțiunii a_ξ, a_η funcție de $\frac{t}{\tau}$ înscrie în graficul din figura 2 și traiectoria optimă $\eta = \eta(\xi)$ înscrisă în graficul din figura 3.

Precizăm că soluțiile (19) au fost calculate în unitățile $D = 1$ și timpul ales astfel ca $\mu = 1$ și rezultatele convertite apoi în unitățile m, s.

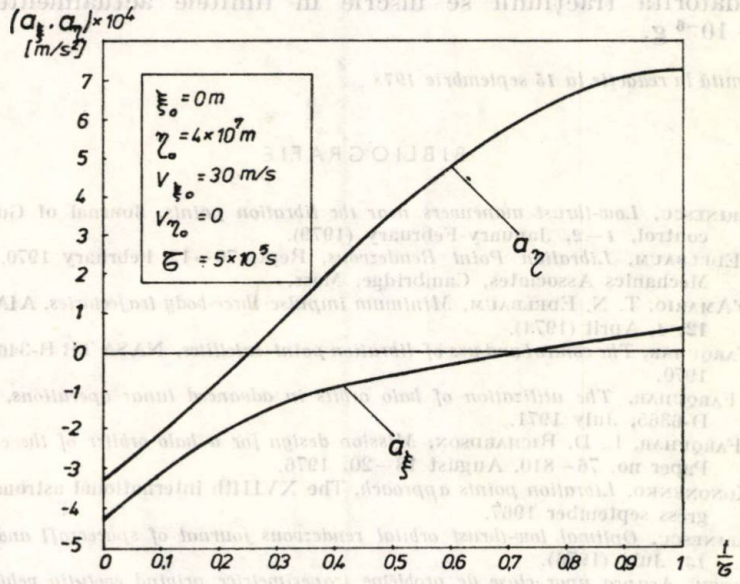


Fig. 2.

Studiul întreprins în prezenta lucrare arată pe baza soluţiilor exacte obţinute că în jurul punctelor de libraţie sînt posibile manevre ale vehiculelor spaţiale echipate cu instalaţii de propulsie de mică tracţiune putîndu-se stabili domeniile de utilizare ale acestora (pe baza limitelor admise pentru mărimile acceleraţiei datorită tracţiunii).

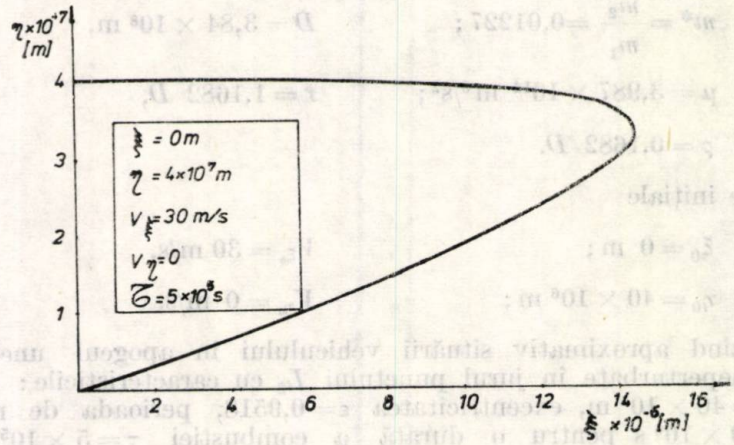


Fig. 3.

6. CONCLUZII

În exemplul efectuat se remarcă faptul că pentru durate ale combustiei $\tau \geqslant 10^5$ s compatibile cu ipoteza tracţiunilor mici, mărimea acceleraţiei datorită tracţiunii se înscrie în limitele actualmente admise 10^{-3} g — 10^{-6} g.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. Al. Marinescu, *Low-thrust maneuvers near the libration points*, Journal of Guidance and control, *1—2*, January-February (1979).
2. T. M. Edelbaum, *Libration Point Rendezvous*, Rept. 70—12 February 1970, Analytical Mechanics Associates, Cambridge, Mass.
3. L. A. D'Amario, T. N. Edelbaum, *Minimum impulse three-body trajectories*, AIAA Journal, **12**, *4*, April (1974).
4. R. W. Farquhar, *The control and use of libration point satellites*, NASA TR R-346 September 1970.
5. R. W. Farquhar, *The utilization of halo orbits in advanced lunar operations*, NASA TN D-6365, July 1971.
6. R. W. Farquhar, L. D. Richardson, *Mission design for a halo orbiter of the earth*, AIAA Paper no. 76—810, August 18—20, 1976.
7. A. F. Kononenko, *Libration points approach*, The XVIIIth international astronautical congress september 1967.
8. Al. Marinescu, *Optimal low-thrust orbital rendezvous journal of spacecraft and rockets*, **7**, *13*, July (1976).
9. M. Popescu, *Asupra unor clase de probleme izoperimetrice privind evoluţia vehiculelor spaţiale cu instalaţie de propulsie*, St. cerc. mat. (sub tipar).

ASUPRA UNEI PROBLEME PLANE DE CONTACT

de MIRCEA MUNTEANU

Universitatea Braşov

Lucrarea se ocupă de studiul contactului dintre o piesă cu contur exterior simetric oarecare, conţinînd o gaură în care intră un bolţ cu sau fără joc. Încărcarea se face prin intermediul bolţului, problema considerîndu-se plană. Se studiază două situaţii : unghi de contact mic, caz care se poate rezolva cu ajutorul rezultatelor problemei Boussinesq în plan ; şi unghi de contact mare, caz în care se ţine cont şi de influenţa conturului exterior al celor două piese în contact.

Se dă o metodă de rezolvare numerică, originală, plecînd de la ecuaţiile teoriei elasticităţii în coordonate polare, autorul elaborînd mai multe programe de calculator în FORTRAN. În încheiere sînt discutate cîteva rezultate numerice obţinute prin rularea programelor în cazul unor exemple, rezultate date sub formă de diagrame.

1. PUNEREA PROBLEMEI

Este binecunoscută importanţa pe care o are, în general, rezolvarea problemelor de contact. O astfel de problemă se consideră rezolvată cînd se cunosc forma şi dimensiunile petei de contact precum şi evoluţia acestora pe măsură ce forţa dintre două corpuri care interacţionează creşte. De asemenea, trebuie determinată şi repartiţia presiunilor pe pata de contact. Cel mai adesea dimensiunile zonei de contact sînt mult mai mici decît dimensiunile corpurilor şi ca urmare pot fi aplicate rezultatele problemei Boussinesq, adică corpurile în contact se consideră semiplanuri sau semispaţii.

Foarte frecvent în practică se întîlneşte următoarea situaţie : o piesă plană, de configuraţie oarecare, conţinînd o gaură (piesă numită în lucrare ochi) în care intră un bolţ cu sau fără joc. Solicitarea se face prin intermediul bolţului, în planul ochiului. Jocul J dintre bolţ şi ochi, dacă există, este mic de ordinul de mărime al deplasărilor şi prin urmare unghiul de contact poate căpăta valori mari, deci nu mai pot fi aplicate rezultatele problemei Boussinesq. În acest caz trebuie să se ţină cont de forma conturului exterior al ochiului, ceea ce duce la mari complicaţii de calcul, în general preferîndu-se metodele numerice şi rezolvarea problemei pe calculator.

În lucrare se fac presupunerile :

— ochiul este simetric şi încărcat după axa de simetrie,

— în ochi şi bolţ se dezvoltă o stare plană de tensiuni,

— materialele din care sînt executate bolţul şi ochiul respectă legea lui Hooke.

Inițial, pentru valoare nulă a forței, bolțul se află în contact cu ochiul doar în punctul C. Odată cu creșterea forței se dezvoltă o zonă de contact simetrică, de unghi la centru 2β, (fig. 1). Se consideră că singurul mod de interacțiune dintre bolț și ochi este presiunea de contact normală pe suprafață, neglijîndu-se astfel frecările.

Se vor studia separat două situații: unghi de contact β mic și unghi de contact β mare.

2. CAZUL UNGHIULUI DE CONTACT MIC

Se poate neglija influența conturului ochiului și a bolțului asupra distribuției de presiuni și deci problema se reduce la binecunoscuta situație a contactului de tip Hertz. În lucrare se va folosi soluția dată în [1]. După cum se știe, problemele de contact se reduc la rezolvarea unei ecuații de tipul Fredholm de speța întîi [1]:

$$\int_{-a}^{b} p(t)\cdot H(t, \xi)\mathrm{d}t = \eta(\xi) - \eta(b), \tag{1}$$

unde

a și b delimitează zona de contact de o parte și de alta a punctului de contact inițial A(fig. 2).

$H(t, \xi)$ este nucleul ecuației integrale, fiind suma a doi termeni corespunzînd fiecăruia dintre cele două corpuri: $H(t, \xi) = H_1(t, \xi) + H_2(t, \xi)$, iar

$\eta(\xi)$ ese separația celor două corpuri în dreptul abscisei ξ(fig. 2).

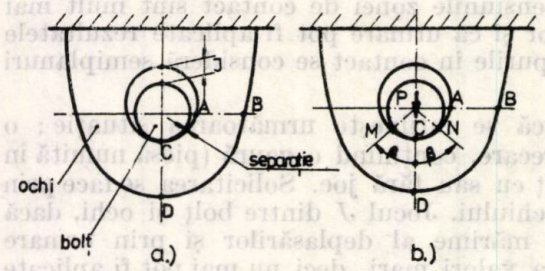


Fig. 1

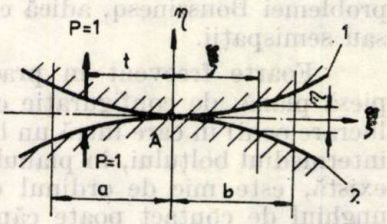


Fig. 2

Funcțiile H_1 și H_2 permit calculul deplasării relative (în expresia (1), față de extremitatea dreaptă a zonei de contact) pe verticală a unui punct de abscisă ξ din zona de contact sub acțiunea unei forțe unitare acționînd la abscisa t. Se deduce pe baza rezultatelor problemei lui Boussinesq în plan expresia [1]:

$$H(t, \xi) = k \ln \left| \frac{\xi - t}{b - t} \right|, \tag{2}$$

în care, pentru starea plană de tensiuni,

$$k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right),$$

E_1 și E_2 fiind modulele de elasticitate ale materialelor celor două corpuri în contact.

În lucrarea [1] soluția s-a dedus sub forma unei serii trigonometrice :

$$p(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \psi, \tag{3}$$

în care s-a făcut schimbarea de variabilă :

$$t = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \cos \psi,$$

astfel încît condițiile la limită sînt satisfăcute :

$$t = -b; \qquad \psi = \pi; \qquad p(\pi) = 0,$$

$$t = a; \qquad \psi = 0; \qquad p(0) = 0.$$

Dacă separația relativă se pune de asemenea sub forma unei serii trigonometrice :

$$\eta(\xi) - \eta(b) = \eta(\varphi) - \eta(0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos n\varphi, \tag{4}$$

în care se face schimbarea de variabilă :

$$\xi = \frac{a-b}{2} + \frac{a+b}{2} \cdot \cos \varphi,$$

atunci între coeficienții necunoscuți C_n și coeficienții B_n există relația [1] :

$$C_q = -\frac{4}{\pi(a+b)k} \sum_{p=0}^{\infty} (q + 2p + 1) B_{q+2p+1}, \tag{5}$$

problema fiind în acest fel rezolvată. Valoarea forței totale care acționează asupra corpurilor în contact este [1] :

$$P = \frac{2}{k} \sum_{i=1}^{\infty} i B_{2i}. \tag{6}$$

În cazul îmbinării studiate în lucrare, trebuie deci determinată separația sub forma (4). Se ține cont că $a = b$. Din figura 3 rezultă separația radială:

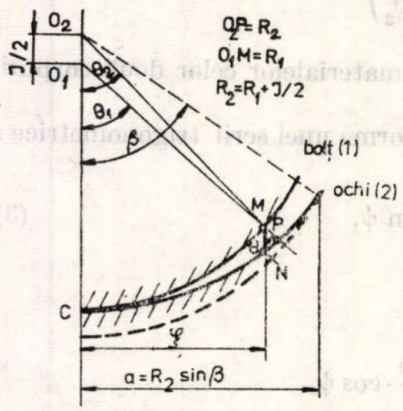


Fig. 3

$$MP = R_1 + J/2 - O_2M, \text{ iar}$$

$$O_2M = J/2 \cos\theta_2 + R_1 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Întrucît jocul s-a presupus mic, se poate considera $R_1 = R_2 = R$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ și deci

$$s(\theta) = MP = J/2\ (1 - \cos\theta), \tag{7}$$

iar separația pe verticală devine:

$$\eta(\theta) = J/2\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right). \tag{8}$$

Legătura dintre θ și abscisa ξ este

$$\sin\theta = \frac{\xi}{R} = \frac{a}{R}\cos\varphi = \sin\beta\cos\varphi. \tag{9}$$

Membrul drept al ecuației integrale (1) devine, succesiv,

$$\eta(\theta) - \eta(\beta) = J/2\left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{\cos\beta}\right) = J/2\left[(1-\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\cos\beta}\right] =$$

$$= J/2\left[1 + \frac{1}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{8}\sin^4\theta + \ldots \binom{1/2}{i}\sin^i\theta + \ldots - \frac{1}{\cos\beta}\right],$$

prin utilizarea seriei binomiale și notîndu-se

$$\binom{\nu}{i} = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-i+1)}{i!}.$$

Cu relațiile (9) expresia separației relative devine:

$$\eta(\varphi) - \eta(0) = J/2\left[\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\beta + \frac{9}{64}\sin^4\beta + \frac{25}{256}\sin^6\beta + \ldots - \frac{1}{\cos\beta}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\sin^2\beta + \frac{3}{16}\sin^4\beta + \frac{75}{512}\sin^6\beta + \ldots\right)\cos 2\varphi +$$

$$+ \left(\frac{3}{64}\sin^4\beta + \frac{15}{256}\sin^6\beta + \ldots\right)\cos 4\varphi +$$

$$\left. + \left(\frac{5}{512}\sin^6\beta + \ldots\right)\cos 6\varphi + \ldots\right]. \tag{10}$$

Corespunzător, conform relației (5) rezultă expresia presiunii:

$$p(\psi) = \frac{J}{4R\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}\left[\left(\sin\beta + \frac{9}{8}\sin^3\beta + \frac{75}{64}\sin^5\beta\right)\sin\psi + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{8}\sin^3\beta + \frac{75}{128}\sin^5\beta\right)\sin 3\psi + \frac{15}{128}\sin^5\beta \sin 5\psi. \right. \quad (11)$$

La deducerea expresiei (11) seria binomială s-a limitat la primii patru termeni. Forța totală dintre corpuri se deduce din (6):

$$P = \frac{\pi J}{8\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}\left(\sin^2\beta + \frac{9}{8}\sin^4\beta + \frac{155}{128}\sin^6\beta + \ldots\right). \quad (12)$$

Relațiile (11) și (12) se pot aplica cu suficientă precizie (sub 1%) pentru unghiuri β de pînă la 20°. Pentru unghiuri β mici, seria binomială se poate limita doar la primii doi termeni și se obține

$$p(\theta) = \frac{J}{4R\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}\sqrt{\beta^2-\theta^2}, \quad (13)$$

$$P = \frac{\pi J}{8\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)}\beta^2, \quad (14)$$

dacă se folosește schimbarea de variabilă: $\cos\psi = \frac{t}{a} = \frac{\sin\theta}{\sin\beta}$.

Prin urmare, pentru unghiuri de contact mici, presiunea se distribuie după o elipsă, iar forța totală variază parabolic cu unghiul β și liniar cu jocul J.

3. CAZUL UNGHIULUI DE CONTACT MARE

În cazul în care unghiul β este mare, adică în intervalul 15°—90° nu se mai poate neglija influența conturului exterior al pieselor în contact. De asemenea, nu se mai poate lua în calcul separația verticală ci trebuie utilizată separația radială. Întrucît problema este simetrică, la rezolvarea ei se va porni invers: se consideră unghiul de contact cunoscut și corespunzător rezultă forța distribuită $p(\theta)$, precum și forța totală P. În acest caz ecuația integrală (1) se scrie:

$$\int_{-\beta}^{\beta} p(\omega)\, H(\omega, \theta)\, d\omega = S(\theta), \quad (15)$$

în care nucleul are forma

$$H(\omega, \theta) = G_1(\omega, \theta) + G_2(\omega, \theta) - [G_1(\omega, 0) + G_2(\omega, 0)] \cos \theta. \quad (16)$$

Funcțiile $G_1(\omega,\theta)$ și $G_2(\omega,\theta)$ permit calculul unei deplasări radiale a unui punct situat la unghiul θ datorită unei forțe unitare radiale care acționează la unghiul ω, pentru ochi respectiv pentru bolț (fig. 4). Deci nucleul $H(\omega, \theta)$ reprezintă o deplasare radială relativă față de punctul C(fig. 4). În membrul drept al ecuației (15) se pune expresia (7), adică se consideră că suma deplasărilor radiale a două puncte așezate radial (de exemplu M și P din figura 3) este egală cu separația (7).

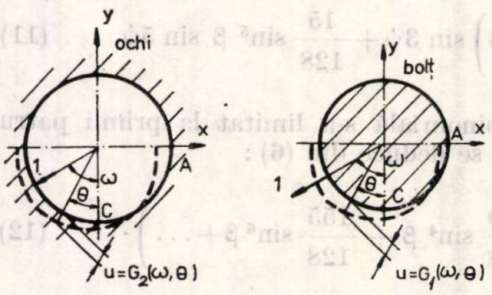


Fig. 4

Greutatea constă în determinarea nucleului H. Nucleul s-ar putea determina numeric plecîndu-se de la soluția generală în coordonate polare a ecuației biarmonice a teoriei elasticității plane:

$$\Delta^2 F(r, \theta) = 0, \text{ adică } \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 F(r, \theta) = 0, \quad (17)$$

unde $F(r, \theta)$ este funcția Airy din care tensiunile rezultă cu relațiile cunoscute. În lucrarea [2], p. 345, este dată soluția generală a ecuației (17) precum și expresiile complete ale tensiunilor și deplasărilor. Pentru cazul studiat funcția de tensiuni se alege de forma:

$$F(r,\theta) = f_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(r) \cos n\theta + g_n(r) \sin n\theta] + h(r, \theta), \quad (18)$$

unde

$$f_0(r) = B_0 r^2 + C_0 \ln r,$$

$$f_1(r) = 2B_1 r - 2C_1/r^3,$$

$$g_1(r) = 2B_1' r - 2C_1'/r^3,$$

$$f_n(r) = r^n(A_n + B_n \cdot r^2) + r^{-n}(C_n + D_n \cdot r^2), \qquad n > 1,$$

$$g_n(r) = r^n(A_n' + B_n' \cdot r^2) + r^{-n}(C_n' + D_n' \cdot r^2), \qquad n > 1,$$

$$h(r, \theta) = D_1 r\left(\ln r \cdot \cos \theta - \frac{2}{1-\mu}\theta \sin \theta\right), \qquad n > 1.$$

Deoarece soluția (18) satisface ecuațiile de echilibru, rămîn să fie satisfăcute condițiile pe contur de unde se află constantele de integrare A_n, B_n, C_n și D_n. Ca metodă de rezolvare se poate folosi următoarea: se limitează seria (18) la un număr finit de termeni, constantele de integrare determinîndu-se din condiția ca într-un număr oarecare finit de puncte

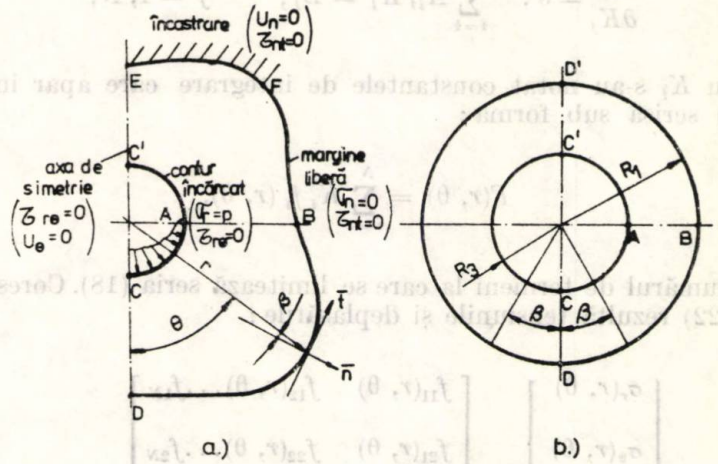


Fig. 5

de pe contur eroarea medie pătratică să fie minimă. Se ajunge în acest fel la un sistem liniar de ecuații. Expresiile ce trebuie minimizate sînt:

— pentru ochi (fig. 4):

$$E = \sum_{CAC'} [(\sigma_r - p)^2 + \tau_{r\theta}^2] + \sum_{DBF} (\sigma_n^2 + \tau_{nt}^2) + \sum_{EF} (kU_n^2 + \tau_{nt}^2), \quad (19)$$

— pentru bolț (fig. 5):

$$E = \sum_{DBD'} [(\sigma_r - p)^2 + \tau_{r\theta}^2] + \sum_{CAC'} [kU_r^2 + \tau_{r\theta}^2], \quad (20)$$

în care $\sum_{CAC'}$ semnifică o sumă efectuată asupra unui număr finit de puncte de pe conturul CAC', ș.a. Indicii r, θ se referă la un reper polar (cu polul în centrul găurii), iar indicii n, t se referă la un reper format de normala și, respectiv, tangenta la contur. Pentru constanta k s-a folosit raportul $k = E^2/R_1^2$. Cu p s-a notat încărcarea pe gaură. Dacă cu metoda expusă mai sus se determină nucleul ecuației integrale (15), atunci p are expresia dată de funcția lui Dirac:

$$p(\theta) = 0, \qquad \theta \neq \omega,$$

$$p(\theta) = \infty, \qquad \theta = \omega \text{ și}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(\theta)\, d\theta = 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cdot p(\theta - \omega)\, d\theta = f(\omega),$$

în care $f(\theta)$ este o funcție oarecare.

Prin derivarea expresiilor (19) și (20) în raport cu constantele de integrare necunoscute se ajunge la două sisteme liniare care se pot pune sub forma :

$$\frac{\partial E}{\partial K_j} = 0\,; \quad \sum_{i=1}^{N} A_{ij} K_i = B_j\,; \qquad j = 1, N, \tag{21}$$

în care cu K_i s-au notat constantele de integrare care apar în funcția Airy (18) scrisă sub forma :

$$F(r, \theta) = \sum_{i=1}^{N} K_i f_i (r, \theta), \tag{22}$$

N fiind numărul de termeni la care se limitează seria (18). Corespunzător funcției (22) rezultă tensiunile și deplasările :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r(r, \theta) \\ \sigma_\theta(r, \theta) \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) \\ u_r(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(r, \theta) & f_{12}(r, \theta) \ldots f_{1N} \\ f_{21}(r, \theta) & f_{22}(r, \theta) \ldots f_{2N} \\ f_{31}(r, \theta) & f_{32}(r, \theta) \ldots f_{3N} \\ f_{41}(r, \theta) & f_{42}(r, \theta) \ldots f_{4N} \\ f_{51}(r, \theta) & f_{52}(r, \theta) \ldots f_{5N} \end{bmatrix} \cdot \{K\},$$

K fiind vectorul necunoscutelor K_i. Coeficienții A_{ij} au expresiile :

— pentru ochi

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^{n_1} (f_{1j}^n f_{1i}^n + f_{3j}^n f_{3i}^n) + \sum_{n=1}^{n_2} (g_{1j}^n g_{1i}^n + g_{3j}^n g_{3i}^n) + \sum_{n=1}^{n_3} (k g_{4j}^n g_{4i}^n + g_{3j}^n g_{3i}^n), \tag{23}$$

în care n_1, n_2 și n_3 reprezintă numărul de puncte de pe porțiunile CAC', DBF și, respectiv, EF (fig. 4), iar

— pentru bolț

$$A_{ij} = \sum_{n=1}^{n_1} (f_{1j}^n f_{1i}^n + f_{3j}^n f_{3i}^n) + \sum_{n=1}^{n_2} (k f_{4i}^n f_{4j}^n + f_{3i}^n f_{3j}^n), \tag{24}$$

în care n_1 și n_2 reprezintă numărul de puncte de pe conturul exterior, respectiv conturul interior al bolțului (fig. 5). Termenii liberi au expresiile :

$$B_j = \sum_{n=1}^{n_1} f_{1j}^n \cdot p^n. \tag{25}$$

Indicele n care apare în expresiile (23), (24) și (25) indică valoarea funcției la care apare, în dreptul punctului n. Funcțiile g din expresiile (23), (24) și (25) au forma :

$$\begin{bmatrix} g_{1i}^n & g_{3i}^n \\ g_{3i}^n & g_{2i}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{1i}^n & f_{3i}^n \\ f_{3i}^n & f_{2i}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} g_{4i}^n \\ g_{5i}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{4i}^n \\ f_{5i}^n \end{bmatrix},$$

β fiind unghiul dintre normala la contur și raza vectoare (fig. 4).

După deducerea constantelor de integrare se poate determina expresia funcției $G(\omega, \theta)$, care va avea forma, similară cu (18) :

$$G(\omega, \theta) = f_0(\omega) \cos i\theta + \sum_{i=1}^{\infty} (f_i(\omega) \cos i\theta + g_i(\omega) \sin i\theta), \tag{26}$$

în care $f_i(\omega)$ și $g_i(\omega)$ sînt funcții cunoscute. Deoarece se studiază ochiuri simetrice și simetric încărcate se va considera că nucleul ecuației integrale (15) reprezintă o deplasare radială a unui punct situat la unghiul θ datorită unei perechi de forțe situate una la unghiul ω și cealaltă la unghiul $-\omega$, fiecare fiind egală cu 1/2 (fig. 6). Deci expresia (26) va deveni :

$$G_s(\omega, \theta) = \frac{1}{2} [G(\omega, \theta) + G(-\omega, \theta)] = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\omega) \cos i\theta. \tag{27}$$

Funcțiile $f_i(\omega)$ sînt funcții periodice și ca urmare se pot dezvolta în serie trigonometrică :

$$f_i(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \cos j\omega, \tag{28}$$

numai în cos deoarece $f_i(\omega) = f_i(-\omega)$. Ca urmare a teoremei lui Betti :

$$A_{ij} = A_{ji}. \tag{29}$$

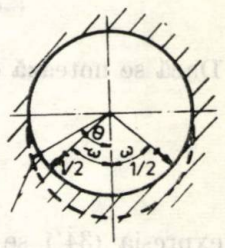


Fig. 6

Rezultă nucleul ecuației integrale (15) :

$$H(\omega, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \cos j\omega (\cos i\theta - \cos \theta). \tag{30}$$

Pentru rezolvarea ecuației (15) se caută o soluție de forma [3]:

$$p(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k\omega, \tag{31}$$

din care, prin înlocuirea în ecuația integrală, rezultă coeficienții necunoscuți C_k, problema fiind astfel rezolvată. Forța rezultantă se calculează cu:

$$P = \int_{-\beta}^{\beta} p(\omega) \cos \omega \, d\omega = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} C_k [\cos (k+1)\omega + \cos (k-1)\omega]. \tag{32}$$

De asemenea, separația se poate dezvolta în serie trigonometrică:

$$S(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cos i\theta, \tag{33}$$

coeficienții B_i fiind cunoscuți. Prin urmare se ajunge la relația

$$\int_{-\beta}^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos k\omega \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \cos j\omega \, (\cos i\theta - \cos\theta) \, d\omega = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cos i\theta, \tag{34}$$

ceea ce se mai scrie:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \cos i\theta \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \int_{-\beta}^{\beta} \cos j\omega \cos k\omega \, d\omega -$$

$$- \cos\theta \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} C_k \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} \int_{-\beta}^{\beta} \cos j\omega \cos k\omega \, d\omega = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \cos i\theta. \tag{34'}$$

Dacă se notează cu:

$$I_{kj}(\beta) = \int_{-\beta}^{\beta} \cos j\omega \cos k\omega \, d\omega, \tag{35}$$

expresia (34′) se scrie prin identificarea celor doi membri:

$$[T] \cdot [A] \cdot [I] \cdot \{C\} = \{B\}, \tag{36}$$

unde $[A]$ este o matrice infinită simetrică formată din coeficienții A_{ij}, $[I]$ este de asemenea o matrice infinită simetrică formată din integralele $I_{kj}(\beta)$,

$[T]$ este de forma :

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0\ldots \\ -1 & 0 & -1 & -1\ldots & -1\ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0\ldots & 0\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots & 1\ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$\{B\}$ este vectorul format din coeficienţii B_i din expresia (34), care are forma :

$$\{B\} = \frac{J}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

dacă se utilizează expresia separaţiei radiale (7), iar $\{C\}$ este vectorul coeficienţilor necunoscuţi C_k din expresia (31).

Integralele I_{kj} au valorile :

$$I_{kj}(\beta) = \frac{\sin\,(k+j)\beta}{k+j} + \frac{\sin(k-j)\beta}{k-j},$$

iar în cazul particular $k = j = 0 : I_{kj} = 2\beta$.

Relaţia matriceală (36) constituie un sistem de ecuaţii liniare avînd ca necunoscute elementele vectorului $\{C\}$. Matricea sistemului este însă singulară datorită multiplicării cu matricea $[T]$; prin premultiplicarea cu matricea $[T]$, toate ecuaţiile rămîn neschimbate exceptînd a doua ecuaţie care se obţine prin însumarea tuturor celorlalte ecuaţii. Deci ecuaţiile sistemului nu sînt liniar independente, de aceea se adaugă condiţia pe contur, adică

$$p(\beta) = p(-\beta) = 0, \quad \text{sau}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} C_i \cos i\beta = 0, \tag{37}$$

în acest fel rezultînd o soluţie unică. În general, pentru un vector $\{B\}$ oarecare, sistemul poate fi incompatibil, însă pentru expresia separaţiei radiale (7) sistemul este compatibil.

Un caz particular este constituit de absența jocului ($J = 0$), cînd unghiul de contact devine $\beta = \frac{\pi}{2}$, iar sistemul (36) la care se adaugă ecuația (37) este omogen. Integralele I_{kj} capătă valorile:

— k și j ambii pari sau ambii impari:

$$\begin{cases} I_{kj} = 0 & \text{dacă } k \neq j \quad , \\ I_{kj} = \dfrac{\pi}{2} & \text{dacă } k = j \neq 0, \\ I_{kj} = \pi & \text{dacă } k = j = 0, \end{cases} \tag{38}$$

— k impar și j par, adică $k = 2m + 1$ și $j = 2n$:

$$I_{kj} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{k+j} + \frac{1}{|k-j|}\right). \tag{39}$$

Se poate arăta că matricea $[I]$ este singulară în cazul $\beta = \frac{\pi}{2}$. Prin schimbări în ordinea liniilor și coloanelor matricea $[I]$ se poate pune sub forma

$$\begin{array}{l} \\ \frac{N}{2}\text{ linii} \\ \frac{N}{2}\text{ linii} \end{array} \begin{array}{c} \frac{N}{2}\text{ coloane}\ \frac{N}{2}\text{ coloane} \\ \left[\begin{array}{c:c} I_{11} & I_{12} \\ \hdashline I_{21} & I_{22} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} k = 2m,\ m = 0, N/2,\ N \to \infty \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} k = 2m+1,\ m = 0 \ldots N/2,\ N \to \infty, \end{array} \tag{40}$$

$$j = 2n,\ j = 2n + 1,\ n = 0, \ldots, N/2,\ N \to \infty$$

în care

$$I_{11} = \frac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

$$I_{22} = \frac{\pi}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}, \text{ iar}$$

$$I_{21} = I_{12}^T,$$

$$I_{21} = [I_{2m+1,\,2n}],\ i \text{ și } j = 0, \ldots, N,\ N \to \infty.$$

Dacă se adună ultimele $N/2$ linii rezultă linia:

$$L = \frac{\pi}{2}[\underbrace{1\,1\ldots1\ldots}_{N \text{ elemente}, N\to\infty}],$$

deoarece:

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m=0}^{N}\left[(-1)^{m+n}\left(\frac{1}{2m+2n+1}+\frac{1}{|2m-2n+1|}\right)\right]=\frac{\pi}{2},$$

oricare ar fi n, întrucît se ajunge la seria binecunoscută:

$$2\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+(-1)^m\frac{1}{2m+1}+\ldots\right], \tag{41}$$

care converge către $\frac{\pi}{2}$.

Dacă se împarte prima linie a matricei $[I]$ cu 2 și se adună apoi primele $N/2$ linii se ajunge tot la linia L deoarece

$$\lim_{N\to\infty}\left\{(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\sum_{m=1}^{N}\left[(-1)^{m+n}\left(\frac{1}{2m+2n+1}+\frac{1}{|2m-2n-1|}\right)\right]\right\}=\frac{\pi}{2},$$

oricare ar fi n, pentru că și în acest caz se ajunge la seria (41). De aici rezultă că cele N linii ale matricei $[I]$ nu sînt independente, deci matricea $[I]$ este singulară.

Dacă matricea $[A]$ se scrie

$$[A]=\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_i\\\vdots\end{bmatrix},$$

unde A_i sînt liniile matricei $[A]$, iar matricea $[I]$ se scrie

$$[I]=[I_1I_2\ldots I_j\ldots],$$

unde I_j sînt coloanele matricei $[I]$, atunci produsul $[A]\cdot[I]$ devine:

$$[A_1]=[A]\cdot[I]=\begin{bmatrix}(A_1I_1) & (A_1I_2)\ldots(A_1I_j)\ldots\\(A_2I_1) & (A_2I_2)\ldots(A_2I_j)\ldots\\\vdots & \vdots\\(A_iI_1) & (A_iI_2)\ldots(A_iI_j)\ldots\\\vdots & \vdots\end{bmatrix},$$

în care cu (A_iI_j) s-a notat produsul scalar al unui vector linie cu unul coloană. Prin preînmulțirea matricei $[A_1]$ cu $[T]$ se înlocuiește linia a doua cu suma celorlalte linii. Pentru ca matricea sistemului să nu fie singulară, în locul liniei a doua se va pune relația (37). Se poate arăta că în cazul $\beta = \frac{\pi}{2}$, matricea:

$$[A_2] = \begin{bmatrix} (A_1I_1) & (A_1I_2)\ldots(A_1I_N)\ldots \\ \cos\beta & \cos 2\beta \ldots \cos N\beta \ldots \\ (A_3I_1) & (A_3I_2)\ldots(A_3I_N)\ldots \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ (A_NI_1) & (A_NI_2)\ldots(A_NI_N)\ldots \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \end{bmatrix},$$

este singulară. Sistemul (36) la care se adaugă ecuația (37) se scrie cu noile notații:

$$[A_2]\{C\} = \{B_1\}, \tag{42}$$

$\{B_1\}$ obținîndu-se prin înlocuirea elementului al doilea al vectorului coloană $\{B\}$ cu zero. În cazul $\beta = \frac{\pi}{2}$ ecuația (37) devine:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i C_{2i} = 0. \tag{37'}$$

Rearanjînd matricele $[A]$ și $[I]$ ca în (40) și apoi construind matricea $[A_2]$, prin adunarea primelor $N/2$ coloane, punînd condiția ca N să fie divizibil cu 4 și trecînd apoi la limită $(N \to \infty)$, se obține coloana:

$$\frac{\pi}{2} \cdot \begin{Bmatrix} \Sigma A_1 \\ 0 \\ \Sigma A_3 \\ \vdots \\ \Sigma A_i \\ \vdots \end{Bmatrix}, \tag{43}$$

ținînd seama de cele obținute mai sus. Cu ΣA_i s-a notat suma elementelor liniei A_i. Dacă se adună ultimele $N/2$ coloane ale matricei $[A_2]$ se obține tot coloana (43). Unghiul de contact $\beta = \frac{\pi}{2}$ se obține cînd jocul este nul și deci sistemul (42) este omogen; prin urmare în acest caz sistemul (42) admite și alte soluții decît cea banală. Nedeterminarea sistemului are și o semnificație fizică: alura repartiției presiunii de contact

nu depinde de valoarea forței dintre corpurile în contact; indiferent de valoarea forței P unghiul de contact este constant.

Un caz particular interesant se obține atunci cînd ochiul are contur exterior circular concentric cu gaură; la limită se obține planul elastic conținînd o gaură — caz important în practică. În acest caz nucleul (30) are expresia:

$$H(\omega, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos i\,\omega(\cos i\theta - \cos\theta), \tag{30'}$$

iar sistemul (36) se poate scrie:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i I_{ij} = B_j/A_j, & j \neq 1, \\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} C_i \sum\limits_{j\neq 1} I_{ij} = -B_1/A_1, & j = 1, \end{cases} \tag{44}$$

a care se adaugă ecuația (37). Pentru placa infinită coeficientul A_1 are valoarea:

$$A_1 = \frac{1+\mu}{2\pi E},$$

unde μ este coeficientul lui Poisson, iar E modulul de elasticitate al materialului plăcii. Restul coeficienților A_j nu intervin în calcul deoarece $B_j = 0$, $j \neq 1$.

Dacă jocul este nul și deci $\beta = \frac{\pi}{2}$ condiția pe contur (37) se obține ca o combinație liniară a ecuațiilor sistemului (44): se înmulțește fiecare din primele $N/2$ linii ale matricei (40) cu $(-1)^k$, $k = 0, \ldots, N/2$ fiind numărul de ordine al liniilor, se împarte prima linie cu 2 și se adună; elementele matricei $[I_{12}]$ se reduc complet și se obține linia:

$$L' = \frac{\pi}{2}[\underbrace{1 -1 \quad 1 -1 \ldots}_{\substack{N/2 \text{ elemente} \\ \text{corespunzătoare lui } k=2m}} \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{\substack{N/2 \text{ elemente corespunzătoare} \\ \text{lui } k=2m+1}}].$$

Sistemului (44) i se adaugă relația de echivalență în cazul $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$R \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos k\omega \cos\omega \, d\omega = P, \tag{45}$$

unde R este raza găurii, astfel că sistemul devine :

$$[I]\cdot\{C_k\}=\begin{Bmatrix}0\\P_k\\0\\0\\\vdots\end{Bmatrix}, \tag{46}$$

dacă ecuația (45) se pune în locul ecuației a doua din sistemul (44), sistemul (46) devenind astfel determinat. Se observă că în sistemul (46) nu apar caracteristicile mecanice ale pieselor în contact.

Rezolvarea directă a sistemului (36), (42), (44) sau (46) — prin limitarea dezvoltării seriei (18) la un număr finit de termeni — este dificilă deoarece sistemele sînt slab condiționate. S-a aplicat totuși această metodă în cazul planului elastic conținînd o gaură în care intră un bolț foarte rigid, rezultatele fiind date în figurile 7 și 8. Deși s-a lucrat în dublă precizie nu s-a obținut rezultate corecte pentru toate valorile unghiului

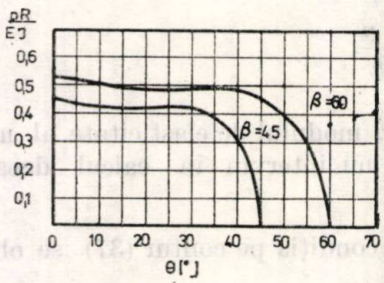


Fig. 7

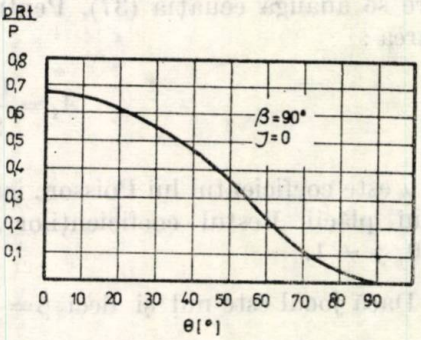


Fig. 8

β care s-au studiat, iar convergența a fost extrem de slabă cu creșterea numărului de termeni din dezvoltarea seriei (18). O ameliorare se obține prin aplicarea metodei celor mai mici pătrate. Matricea $[I]$ se limitează la m coloane și n linii, $n > m$, deci mai multe ecuații decît necunoscute. Se pune condiția ca suma pătratelor erorilor să fie minimă, adică

$$[I]^T_{n\times m}[I]_{n\times m}=[I]^T_{n\times m}\cdot\{B\}_m, \tag{47}$$

în care cu $[I]_{n\times m}$ s-a notat limitarea matricei infinite la n linii și m coloane, iar cu $\{B\}_m$ s-a notat limitarea vectorului $\{B\}$ la m elemente.

Din motivele arătate mai sus s-a preferat o altă metodă de rezolvare a ecuației integrale (15). Se caută presiunea sub forma

$$p(\omega)=\sum_{i=0}^{\infty}p_i\cos(2i-1)\omega_1, \tag{48}$$

în care p_i sînt constante necunoscute, iar $\omega_1 = \omega\frac{\pi}{2\beta}$, în felul acesta fiind satisfăcute condițiile pe contur $p(\beta) = p(-\beta) = 0$. Prin înlocuirea în ecuația integrală (15) se obține succesiv :

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \int_{-\beta}^{\beta} H(\omega, \theta) \cos(2i-1)\omega_1 d\omega = s(\theta),$$

sau

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i \mathcal{H}_i(\theta) = s(\theta), \tag{49}$$

în care s-a notat :

$$\mathcal{H}_i(\theta) = \int_{-\beta}^{\beta} H(\omega,\theta)\cos(2i-1)\omega_1 d\omega.$$

Analog cu relația (16) se poate scrie :

$$\mathcal{H}_i(\theta) = [\xi_{1i}(\theta) + \xi_{2i}(\theta)] - [\xi_{1i}(0) + \xi_{2i}(0)]\cos\theta, \tag{50}$$

în care s-a notat cu

$$\xi_{li}(\theta) = \int_{-\beta}^{\beta} G_l(\omega,\theta)\cos(2i-1)\omega_1 d\omega, \quad l = 1,2.$$

Funcțiile $\xi_{li}(\theta)$, $l = 1,2$, se deduc în același mod cu funcțiile $G_1(\omega,\theta)$. Funcția $\xi_{li}(\theta)$ permite calculul unei deplasări radiale la unghiul θ, datorită unei încărcări $\pi_i(\omega) = \cos(2i-1)\omega_1$, cu $\omega_1 = \frac{\pi}{2}\beta$, care acționează pe zona de contact cu unghiul la centru 2β, restul conturului fiind liber. Această presiune se va pune în expresiile (19) și (20), prin minimizarea cărora se află constantele de integrare din funcția Airy (18).

La rezolvarea pe calculator s-a procedat astfel : se limitează seria (48) la M termeni, iar în zona de contact se aleg L puncte echidistante. Se vor afla deci simultan M seturi de constante de integrare pentru ochi și M pentru bolț. Funcțiile $\xi_{li}(\theta)$ și deci și funcțiile $\mathcal{H}_i(\theta)$ se vor obține sub forma unor matrice cu M linii și L coloane ; elementul $\mathcal{H}_{ij}$ al matricei $[\mathcal{H}]$ reprezintă deplasarea radială relativă față de punctul inițial de contact, a unui punct situat la unghiul $(j-1)\Delta\theta$, dată de încărcarea $\pi_i(\omega)$. Intervalul $\Delta\theta$ este

$$\Delta\theta = \beta/(L-1).$$

Cele M constante necunoscute p_i se află prin rezolvarea sistemului liniar :

$$[\mathcal{H}]\,[\mathcal{H}]^T\{p\} = [\mathcal{H}]\cdot\{s\}, \tag{51}$$

în care $\{p\}$ este vectorul necunoscutelor p_i, iar $\{s\}$ este vectorul separației radiale :

$$\{s\} = \frac{J}{2}\begin{Bmatrix} 1-\cos\theta_1 \\ 1-\cos\theta_2 \\ \vdots \\ 1-\cos\theta_L \end{Bmatrix}.$$

Se poate arăta că și în acest caz determinantul sistemului (51) este nul dacă $J = 0$, M și L tinzînd la ∞. În acest caz se adaugă relația de echivalență:

$$P \cong R \sum_{i=1}^{M} p_i \int_{-\beta}^{\beta} \cos(2i-1)\omega_1 \cos\omega \, d\omega, \tag{52}$$

unde R este raza găurii; relația (52) devine pentru $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$P = \frac{\pi}{2} \cdot R \cdot p_1, \tag{53}$$

de unde rezultă imediat constanta p_1, sistemul (51) fiind acum determinat.

4. PREZENTAREA REZULTATELOR NUMERICE

Pe baza celor expuse mai sus autorul a elaborat mai multe programe FORTRAN, care s-au rulat pentru mai multe cazuri concrete. Rezultatele sînt date sub formă de diagrame în figurile 7...13. În figura 7 s-a trasat distribuția de presiuni în cazul unui plan elastic conținînd o gaură în care intră un bolț foarte rigid, pentru două valori ale unghiului de contact. În figura 8 este redată distribuția de presiuni în cazul jocului nul dintre bolț și gaură. Matricea $[I]$ s-a limitat la 50 de linii și 6 coloane, utilizîndu-se metoda celor mai mici pătrate.

În figurile 9...13 sînt redate grafic rezultatele studiului asupra unor ochiuri cu contur exterior circular (fig. 9.) La determinarea matricelor $[\mathscr{H}]$ s-au ales ales 52 de puncte pe conturul ochiului și 52 pe conturul bolțului, seria (18) limitîndu-se la 49 termeni (adică s-a mers pînă la $\cos 12\theta$). În figura 9 s-a reprezentat variația forței totale în funcție de unghiul de contact pentru diferite valori ale raportului $\varkappa = R_2/R_1$. S-a reprezentat de asemenea cu linie întreruptă soluția obținută conform lucrării [1] și dată de relația (11). Se constată o mai bună apropiere de curbele corespunzătoare lui $\varkappa$ mai mare ceea ce este explicabil.

În figurile 10 și 11 este redată distribuția de presiuni dintre bolț și ochi pentru două valori ale raportului $\varkappa$ și pentru diferite valori ale unghiului de contact. În figura 10 pentu unghiul de contact $\beta = 60°$ distribuția de presiuni s-a dedus și prin metoda elementului finit, constatîndu-se o foarte bună concordanță. Trebuie specificat că aplicarea metodei elementului finit nu este indicată în cazul acestei probleme deoarece conduce la un timp de calculator mult mai mare decît în cazul folosirii metodei descrise în lucrare.

În figurile 12 și 13 este dată distribuția de presiuni în cazul jocului nul dintre bolț și ochi pentru două valori ale raportului $\mathscr{H}$. 2,5 și 4.

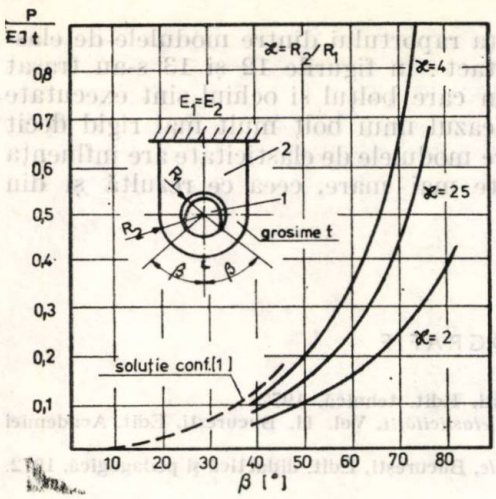


Fig. 9

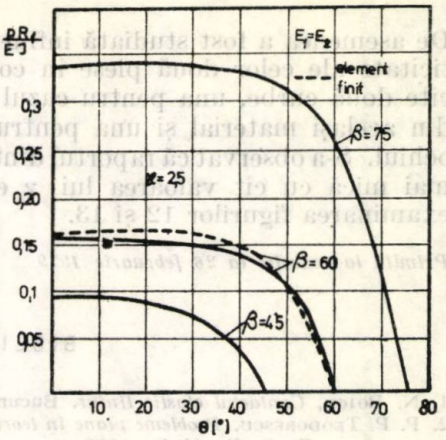


Fig. 10

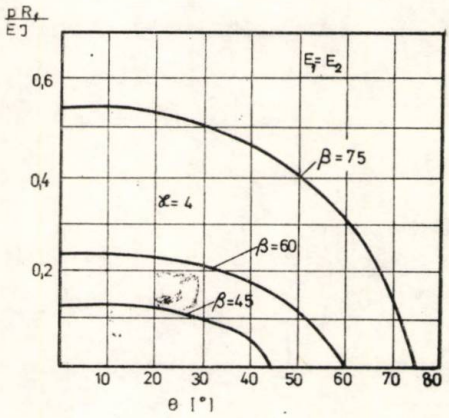


Fig. 11

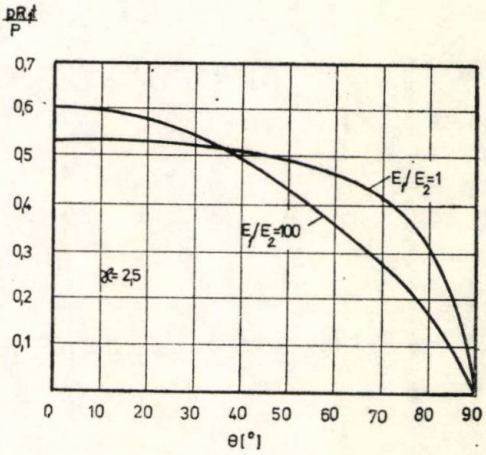


Fig. 12

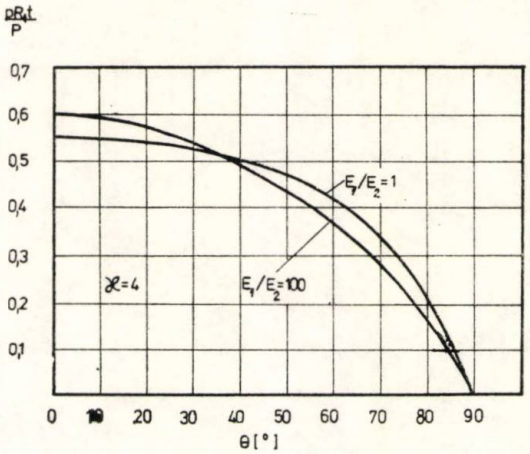


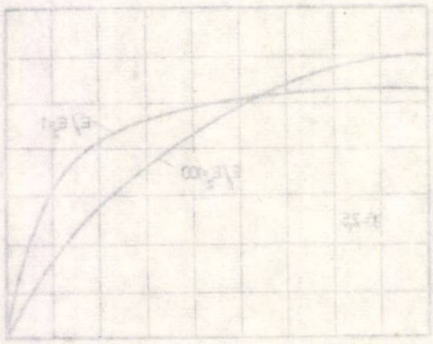
Fig. 13

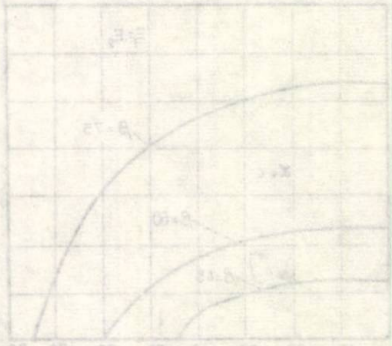
De asemenea a fost studiată influența raportului dintre modulele de elasticitate ale celor două piese în contact : în figurile 12 și 13 s-au trasat cîte două curbe, una pentru cazul în care bolțul și ochiul sînt executate din același material și una pentru cazul unui bolț mult mai rigid decît ochiul. S-a observat că raportul dintre modulele de elasticitate are influența mai mică cu cît valoarea lui $\varkappa$ este mai mare, ceea ce rezultă și din examinarea figurilor 12 și 13.

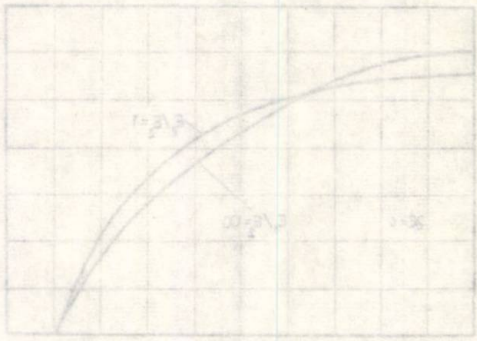
Primită la redacție la 26 februarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. N. Boicu, *Contactul elastic liniar*, București, Edit. tehnică, 1977.
2. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, Vol. II, București, Edit. Academiei R. S. România, 1966.
3. D. V. Ionescu, *Ecuații diferențiale și integrale*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1972.







STUDIUL VOALĂRII PLĂCILOR PLANE PRIN METODE ITERATIVE DE CALCUL

de ALEXANDRU NICOLAU, MIRCEA IEREMIA

Institutul de construcții București

Lucrarea abordează problema voalării plăcilor plane dreptunghiulare în domeniul elastic, acționate în planul lor median, folosind o metodă iterativă de calcul.
Se studiază ecuația diferențială a suprafeței medii deformate a plăcii ușor voalate, cu anumite condiții la limită și se determină soluția aproximativă pe cale analitică sau numerică.
Problema se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații integrale printr-un procedeu iterativ.
Se efectuează calculul primelor două aproximații ale procedeului rapid convergent și rezultă săgețile plăcii voalate.

1. INTRODUCERE

Considerăm o placă subțire izotropă, de formă dreptunghiulară, acționată în planul său median de eforturile axiale de compresiune N_x și N_y și de eforturile de lunecare $N_{xy} = N_{yx}$, constante pe grosimea h a plăcii. Se obține o stare de tensiune asemănătoare cu starea de echilibru de membrană, caracteristică plăcilor plane flexibile încovoiate.

În momentul în care mărimea forțelor aplicate în planul median atinge o anumită valoare critică, forma inițială plană și stabilă de echilibru a plăcii devine nestabilă și placa începe să voaleze.

Voalarea plăcilor plane depinde de modul de variație al solicitărilor pe contur, de condițiile de rezemare ale plăcilor și de dimensiunile acestora.

Admitem ipotezele simplificatoare că fenomenul este elastic că solicitările rămîn constante în timpul încovoierii plăcii și ecuațiile de echilibru static le putem scrie pe placa ușor încovoiată considerînd o încovoiere limitată, fără extensiunea planului median.

În aceste condiții, ecuația diferențială a suprafeței medii deformate a plăcii ușor voalate capătă forma:

$$K \cdot \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tag{1}$$

$$+ 2N_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 5, 1979, P. 681 – 694

unde

$K = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — modulul de rigiditate la încovoiere cilindrică a pălcii,

$w(x,y)$ — deplasarea din încovoiere a plăcii ($w \leqslant 0{,}2 \cdot h$).

Adeseori se poate neglija influența termenilor în $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$ și $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, asigurîndu-ne însă că influența acestor termeni este mică în cazul considerat.

La ecuația diferențială cu derivate parțiale (1) se adaugă diferite condiții la limită, funcție de cazul practic considerat.

Soluția aproximativă a unei asemenea ecuații, cu condițiile pe contur precizate, în cazul în care coeficienții ecuației sînt constanți, se obține fie cu ajutorul unor serii trigonometrice, fie numeric prin diferențe finite [2].

În cazul unei ecuații diferențiale cu coeficienți variabili, problema se rezolvă admițînd că expresiile forțelor N_x, N_y și N_{xy} variază în aceeași proporție, avînd un factor comun. Cea mai mică dintre valorile acestui factor pentru care apare la limită și forma de echilibru va defini sarcina critică de voalare.

Deoarece nu există o soluție generală pentru acest tip de ecuație, se caută valorile critice ale forțelor care acționează în planul median al plăcii, admițînd apriori o anumită formă de voalare a plăcii și găsind acele valori pentru care deformațiile încep să tindă spre infinit. Desigur că valorile critice găsite nu sînt exacte pentru o altă formă de voalare a plăcii.

Dacă este suficientă o valoare aproximativă a sarcinii critice, se folosește metoda energetică de calcul, aplicînd teorema valorii staționare a energiei potențiale totale în situația de echilibru nestabil la limită a plăcii voalate.

Lucrarea prezintă studiul ecuației diferențiale precedente avînd coeficienții variabili, cu anumite condiții la limită, folosind o metodă iterativă de calcul care permite determinarea soluției aproximative pe cale analitică sau numerică.

2. VOALAREA PLĂCILOR PLANE SIMPLU REZEMATE CU REAZEME TASABILE

Voalarea plăcilor plane dreptunghiulare simplu rezemate pe contur, admițînd anumite cedări de reazime (de exemplu, de-a lungul marginilor paralele cu axa XX) revine, după cum s-a arătat, la determinarea soluției ecuației (1) în domeniul D: $x \in (0,a)$; $y \in (0, b)$ cu condițiile la limită:

$$\begin{aligned} w(x, 0) = w(x, b) &= \varphi(x), \qquad x \in (0, a), \\ w(0, y) = w(a, y) &= 0, \qquad y \in (0, b) \end{aligned} \tag{2}$$

și

$$\left[\Delta w + (\mu - 1)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{y=0,\,b} = 0, \quad x \in (0, a),$$

$$\left[\Delta w + (\mu - 1)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{x=0,\,a} = 0, \quad y \in (0, b). \tag{3}$$

Din considerente fizice, soluția $w(x,y)$ se caută în clasa $C^1(D)$, iar funcția de tasare $\varphi(x)$ se admite de clasa $C^2(0,a)$, verificînd condițiile de racordare în vîrfurile dreptunghiului 0 (0,0); A $(a, 0)$; $B(a,b)$ și $C(0,b)$.

Problema (1), (2), (3) se adimensionalizează prin introducerea variabilelor adimensionale notate cu accent:

$$x = L \cdot x'; \quad y = L \cdot y^2; \quad w(x, y) = L \cdot w'(x', y'), \tag{4}$$

$$N_x(y) = N \cdot N'_{x'}(y'); \quad N_{xy}(x, y) = N \cdot N'_{x'y'}(x', y'); \quad N_y(x) = N \cdot N'_{y'}(x').$$

Pentru o fișie de placă, de lățime unitate, L și N sînt respectiv o lungime caracteristică și un efort caracteristic avînd dimensiunile: $[L] = \mathrm{cm} = L$; $[N] = \frac{\mathrm{daN}}{\mathrm{cm}} = \mathrm{MT}^{-2}$; dimensiunile rigidității K sînt: $[K] = \mathrm{L^2MT^{-2}}$.

Introducînd noile variabile (4) în ecuația diferențială (1), aceasta devine:

$$\frac{\partial^4 w'}{\partial x'^4} + 2\frac{\partial^4 w'}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4 w'}{\partial y'^4} =$$

$$= q\left[N'_{x'}(y')\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2} + 2N'_{x'y'}(x', y')\frac{\partial^2 w'}{\partial x' \partial y'} + N'_{y'}(x')\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}\right], \tag{1'}$$

unde q este un parametru adimensional, definit prin

$$q = \frac{NL^2}{K}; \quad [q] = \frac{MT^{-2}\,\mathrm{L}^2}{\mathrm{L^2MT^{-2}}} = 1. \tag{5}$$

Pentru majoritatea plăcilor plane considerate la §1, parametrul q are valori cuprinse în intervalul: $q \in (0, 03; 0{,}3)$. Sînt valorile care corespund valorilor critice ale forțelor din planul median, pentru care deformațiile încep să crească mult.

Ecuația (1') este definită în domeniul D': $x' \in (0, a')$; $y' \in (0, b')$ cu $a' = \frac{a}{L}$, $b' = \frac{b}{L}$; $[a'] = [b'] = 1$.

Condițiile la limită (2) cu (4) devin:

$$w'(x', 0) = w'(x', b') = \varphi'(x')$$

$$\varphi'(x') = \frac{1}{L}\varphi(x'); \qquad x' \in (0, a'), \tag{2'}$$

$$w'(0, y') = w'(a', y') = 0 \qquad y' \in (0, b'),$$

şi, respectiv,

$$\left[\Delta w' + (\mu - 1)\frac{\partial^2 w'}{\partial x'^2}\right]_{y'=0,\,b'} = 0, \quad x' \in (0,\ a'),$$

$$\left[\Delta w' + (\mu - 1)\frac{\partial^2 w'}{\partial y'^2}\right]_{x'=0,\,a'} = 0, \quad y' \in (0,\ b'). \tag{3'}$$

Renunţînd la accent, pentru simplitatea notaţiei, problema revine deci la determinarea soluţiei $w \in C^1(D)$ a ecuaţiei diferenţiale:

$$\Delta^2 w = q \cdot L \cdot w \text{ în } D = (0,\ a) \times (0,\ b), \tag{6}$$

cu

$$Lw = N_x(y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}(x, y)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + N_y(x)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \tag{6'}$$

din condiţiile la limită:

$$w|_{\partial D} = \varphi(S), \tag{7}$$

$$\Delta w|_{\partial D} = (1 - \mu)\,\varphi''(S), \tag{8}$$

unde S este abscisa curbilinie a frontierei $\partial D = OA + AB + BC + CO$, iar $\varphi(S) = \varphi(x)$ pentru $S = x \in (0,\ a)$ şi $\varphi(S) = 0$ pentru $S = y \in (0,\ b)$, cu îndeplinirea condiţiilor de racordare în vîrfurile dreptunghiului.

Condiţiile la limită (8) provin din observaţia:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} = \varphi'' \text{ pentru } S = x \in (0,\ a);\ y = 0,\ y = b,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} = 0 \quad \text{pentru } S = y \in (0, b);\ x = 0,\ x = a, \tag{8'}$$

în care s-a ţinut seama de (7). Funcţia $(1 - \mu)\ \varphi''(S)$ este continuă pe ∂D.

Problema precedentă (6), (7), (8) poate fi *factorizată*, adică înlocuită printr-o problemă echivalentă pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale. Într-adevăr, introducînd funcţia

$$\omega = \Delta w \text{ în } \bar{D} = D \cup \partial D, \tag{9}$$

problema (6), (7), (8) se transformă în problema determinării soluţiei, de clasă $C^1(D)$, a sistemului de ecuaţii cu derivate parţiale

$$\begin{cases} \Delta\omega = qLw, \\ \Delta w = \omega, \end{cases} \quad \text{în } D, \tag{10}$$

cu condiţiile la limită, respectiv pentru ω:

$$\omega|_{\partial D} = \psi(S);\ \psi(S) = (1 - \mu)\ \varphi''(S) \tag{11}$$

și (7) pentru w. (Ipoteza valabilității substituției (9) și pe frontiera ∂D este necesară deci pentru deducerea condiției la limită (11). Reciproc, problema (10), (11), (7) prin eliminarea lui ω, folosind (9), conduce la problema (6), (7), (8). Deci problema (6), (7), (8) este echivalentă cu (10), (11), (7).

Să stabilim acum *echivalența problemei precedente (10), (11), (7) cu problema rezolvării unui sistem de ecuații integrale (20).*

Pentru aceasta, observăm că a doua ecuație diferențială din (10) cu condiția la limită (7) (în ipoteza cunoașterii membrului drept din $(10)_2$ reprezintă o problemă Dirichlet pentru ecuația lui Poisson) are soluția:

$$w(\vec{x}) = -\int_D g(\vec{x}|\vec{\xi})\,\omega(\vec{\xi})\,d\vec{\xi} - \int_{\partial D} \frac{\partial g(\vec{x}|\vec{\xi})}{\partial \Pi_\xi}\,\varphi(\vec{\xi})\,dS_\xi \tag{12}$$

sau, sub formă operatorială,

$$w = G\omega + \Phi. \tag{12'}$$

Primul termen din (12) sau (12'): $w_1 \equiv G\omega$ reprezintă de fapt soluția ecuației Poisson: $\Delta w_1 = \omega$, cu condiții la limită omogene: $w_1|_{\partial D} = 0$, iar al doilea termen din (12) sau (12'): $w_2 = \Phi$ reprezintă soluția ecuației lui Laplace $\Delta w_2 = 0$, cu condiții la limită neomogene, continue pe ∂D: $w_2|_{\partial D} = \varphi(S)$.

(Soluția $w_2 = \Phi$ a ultimei probleme Dirichlet ar putea fi obținută și altfel decît cu ajutorul funcției Green $g(\vec{x}\,|\,\vec{\xi})$, de exemplu prin separarea variabilelor).

În (12), vectorii $\vec{x}$ și $\vec{\xi}$ au componentele $\vec{x} = (x,y)$; $\vec{\xi} = (\xi,\eta)$, iar $d\vec{\xi} = d\xi\,d\eta$.

După cum se știe, funcția Green $g(\vec{x}\,|\,\vec{\xi})$ este soluție a problemei Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta g(\vec{x}\,|\,\vec{\xi}) = -\delta(\vec{x} - \vec{\xi}), & \vec{x} \in D,\ \vec{\xi} \in D, \\ g(\vec{x}\,|\,\vec{\xi})_{\vec{x} \in \partial D} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Ea are o singularitate logaritmică în $\vec{x} = \vec{\xi} \in D$:

$$g(\vec{x},\ \vec{\xi}) = \frac{1}{m} \log \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} + V(\vec{x}\,|\,\vec{\xi}), \tag{13'}$$

cu $V(\vec{x},\ \vec{\xi}) \in C^2(D)$ și admite dezvoltarea în serie Fourier

$$g(\vec{x}\,|\,\vec{\xi}) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{m,n}} u_{m,n}(\vec{x}) \cdot u_{m,n}(\vec{\xi}) \tag{14}$$

după sistemul ortonormat al funcțiilor proprii $\{u_{m,n}\}$ corespunzător valorilor proprii $\{\lambda_{m,n}\}$, (cu $m, n = 1, 2, \ldots$) ai operatorului Δ, pentru domeniul $D = (0, a) \times (0, b)$ dat de

$$u_{m,n}(\vec{x}) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y, \qquad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{15}$$

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Primul termen din (12) sau (12′) cu (14), (15) admite deci dezvoltarea :

$$G\omega(x, y) = - \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{u_{m,n}(x, y)}{\lambda_{m,n}} \iint_D u_{m,n}(\xi, \eta)\omega(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{16}$$

iar al doilea termen din (12) sau (12′) cu (14), (15) sau mai rapid, obținut prin separarea variabilelor, admite dezvoltarea

$$\Phi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} b} \left[\operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} y + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{a} (b - y) \right] \cdot \sin \frac{m\pi}{a} x =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\operatorname{ch} \frac{m\pi}{a} \left(y - \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{m\pi b}{2a}} \sin \frac{\pi m}{a} x \tag{17}$$

cu

$$A_m = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \varphi(\xi) \sin \frac{m\pi}{a} \xi d\xi.$$

În mod asemănător se observă că prima ecuație diferențială din (10) cu condiția la limită (11) (în ipoteza cunoașterii membrului al doilea din (10), reprezintă o problemă Dirichlet pentru ecuația lui Poisson) are soluția

$$\omega(\vec{x}) = - q \int_D g(\vec{x} \mid \vec{\xi})\, Lw(\vec{\xi})\, d\vec{\xi} - \int_{\partial D} \frac{\partial g(\vec{x} \mid \vec{\xi})}{\partial \Pi_\xi} \psi(\vec{\xi})\, dS_\xi \tag{18}$$

sau, sub forma operatorială,

$$\omega = qGLw + \psi. \tag{18′}$$

La fel ca în cazul precendent, primul termen din (18) sau (18′) reprezintă soluția ecuației Poisson, $\Delta\omega_1 = qLw$, cu condiții la limită omogene $\omega_1|_{\partial D} = 0$ și admite, cu aceleași notații, dezvoltarea

$$GLw(x, y) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{u_{m,n}(x, y)}{\lambda_{m,n}} \iint_D u_{m,n}(\xi, \eta)\, Lw(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \quad (16')$$

Al doilea termen din (18) sau (18′) $\omega_2 = \psi$ reprezintă soluția ecuației lui Laplace : $\Delta\omega_2 = 0$ cu condiții la limită neomogene $\omega_2|_{\partial D} = \psi$ continue pe ∂D. Deci ψ este dată de (17) cu singura deosebire că în (17′ datele φ se înlocuiesc prin ψ.

Reciproc, (12) sau (12′) verifică (10), cu condiția la limită (7), iar (18) sau (18′) verifică (10), cu condiția la limită (11). Problema (10), (11), (7) este deci echivalentă cu problema rezolvării sistemului de ecuații integrale, scris sub formă operatorială sub forma

$$\begin{aligned} w &= G\omega + \Phi, \\ \omega &= qGLw + \psi \end{aligned} \quad (20)$$

(ce conține parametrul adimensional q).

Să aplicăm acum un *procedeu iterativ de rezolvare a sistemului de ecuații integrale (20).*

În prealabil sistemul (20) se scrie sub forma matriceală :

$$\vec{X} = A_1 \vec{X} + \vec{F}_1, \quad (20')$$

unde vectorii bidimensionali $\vec{X}$, $\vec{F}$ și matricea operator A_1 sînt dați, respectiv, prin

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} w \\ \omega \end{pmatrix}; \quad \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} \Phi \\ \psi \end{pmatrix}; \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & G \\ qGL & 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Dintre numeroasele procedee iterative de rezolvare a ecuației operatoriale (20) să indicăm numai analogul procedeelor iterative Jacobi și Gauss-Seidel.

Procedeul iterativ (simplu) al lui Jacobi este

$$\vec{X}^{(m)} = A_1 \vec{X}^{(m-1)} + \vec{F}_1; \quad \vec{X}^{(0)} = \text{arbitrar}; \quad (m = 1,2,\ldots), \quad (22)$$

sau, „pe componente",

$$\begin{aligned} w^{(m)} &= G\omega^{(m-1)} + \Phi, \\ & \qquad (m = 1,2,\ldots). \quad (22') \\ \omega^{(m)} &= qGLw^{(m-1)} + \psi, \end{aligned}$$

Procedeul iterativ Gauss-Seidel revine la a descompune matricea operator A_1 din (21) în suma dintre o matrice-operator inferior triunghiulară, notată prin A_i și o matrice-operator superior triunghiulară, notată prin A_s : $A_1 = qA_i + A_s$, unde

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ GL & 0 \end{pmatrix}; \qquad A_s = \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

și a construi iterațiile sub forma

$$\vec{X}^{(m)} = qA_i \vec{X}^{(m)} + A_s \vec{X}^{(m-1)} + \vec{F}; \quad \vec{X}^{(0)} = \text{arbitrar} \tag{23}$$

sau, „pe componente",

$$\begin{aligned} w^{(m)} &= G\omega^{(m-1)} + \Phi, \\ \omega^{(m)} &= qGLw^{(m)} + \psi, \end{aligned} \qquad (m = 1,2,\ldots). \tag{23'}$$

Procedeul (23') diferă de (22') doar prin faptul că prin ecuația operatorială a doua se folosește iterația precedentă (după cum era de așteptat) și drept valoare arbitrară se poate alege în (23') numai $\omega^{(0)}$.

Introducînd iterația $w^{(m)}$ dată de prima ecuație operatorială din (23') în a doua ecuație operatorială, procedeul (23') se poate scrie și sub forma :

$$\begin{aligned} w^{(m)} &= G\omega^{(m-1)} + \Phi, \\ \omega^{(m)} &= qK\omega^{(m-1)} + \chi, \end{aligned} \tag{23''}$$

unde operatorul K și funcția χ au, respectiv, expresiile

$$K = GLG; \qquad \chi = \psi + qGL\Phi.$$

Forma matriceală a procedeului (23'') se deduce fie direct, fie din (23) și este

$$\vec{X}^{(m)} = A_2 \vec{X}^{(m-1)} + \vec{F}_2; \quad \vec{X}^{(0)} = \text{arbitrar} \ (m = 1,2,\ldots), \tag{24}$$

unde vectorul $\vec{F}_2$ și matricea-operator A_2 sînt date, respectiv, de

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} \Phi \\ \chi \end{pmatrix}; \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & G \\ 0 & qK \end{pmatrix}.$$

Se observă că prin recurență, din (22) și (24) rezultă relațiile :

$$\vec{X}^{(m)} = A_j^m \vec{X}^{(0)} + (A_j^{m-1} + \ldots + A_j + I)\vec{F}_j \ = 1,2, \tag{25}$$

unde I este matricea-operator unitate. Relația precedentă (25), scrisă pe componente, cu $j = 2$, conduce la

$$\begin{aligned} w^{(m)} &= \Phi + G\chi + qGK\chi + \ldots + q^{m-2} GK^{m-2} \chi + q^{m-1} GK^{m-1} \omega^{(0)}, \\ \omega^{(m)} &= \chi + qK\chi + q^2K^2\chi^2 + \ldots + q^{m-1} K^{m-1} \chi + q^m K^m \omega^{(0)}, \end{aligned} \tag{25'}$$

unde $\omega^{(0)}$ este o funcție arbitrară de clasă $C^2(D)$.

În mod asemănător se poate scrie relația (25) cu $j = 1$ pe componente, obținîndu-se de fapt același rezultat cu scrierea prin recurență a relațiilor (22′).

Alte procedee iterative, cu introducerea unui factor de accelerare a convergenței, pentru anumite ecuații operatoriale se găsesc în [4]. Adaptarea lor la cazul precedent, cu studiul proprietăților operatorilor introduși G, L, K, cu deducerea intervalului de convergență pentru parametrul q, cu legătura cu valorile proprii ale problemei inițiale (6), (7), (8) etc. se găsesc în [3].

Avînd în vedere intervalul de variație al parametrului $q \in (0{,}03\ ;\ 03)$, impus de considerentele fizice din §1, în cele ce urmează ne vom mărgini la calculul primelor două aproximații pentru procedeul (25′).

Observație: Ținînd seama că operatorul lui Green (liniar, mărginit și pozitiv definit) este inversul operatorului lui Laplace $-\Delta$ cu condițiile la limită de tip Dirichlet, procedeele iterative integrale precedente (22′) și (23′) sînt echivalente, respectiv, cu procedeele iterative diferențiale:

$$\Delta w^{(m)} = \omega^{(m-1)} \text{ în } D;\ w^{(m)}|_{\partial D} = \varphi(S),$$
$$\Delta\omega^{(m)} = qLw^{(m-1)} \text{ în } D;\ \omega^{(m)} = \psi(S), \tag{22″}$$

$$\Delta w^{(m)} = \omega^{(m-1)} \text{ în } D;\ w^{(m)}|_{\partial D} = \varphi(S),$$
$$\Delta\omega^{(m)} = qLw^{(m)} \text{ în } D;\ \omega^{(m)}|_{\partial D} = \psi(S), \tag{23″}$$

cu $n = 1, 2, \ldots$. Aceste procedee iterative diferențiale se pot realiza numeric, prin diferențe finite, cu ajutorul subrutinelor de calcul al soluției problemei lui Dirichlet pentru ecuația lui Poisson [1].

Alegerea parametrului q în intervalul de convergență al procedeelor integrale respective asigură și convergența acestor procedee iterative diferențiale.

3. CALCULUL ITERATIV AL SĂGEȚILOR PLĂCII VOALATE

Să efectuăm calculul primelor două aproximații ale procedeului (25′) sau (23′) în ipoteza datelor φ, liniare pe porțiuni:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2p}{a}x, & x \in \left(0, \dfrac{a}{2}\right), \\ \dfrac{2p}{a}(a - x), & x \in \left(\dfrac{a}{2}, a\right), \end{cases} \quad (p = \text{dat}). \tag{26}$$

În acest caz $\varphi \in C^0(0,a)$ deci soluția problemei (6), (7), (8) va fi înțeleasă în sens generalizat, iar $\psi(S) = 0$, $S \in \partial D$ implică $\psi(x, y) \equiv 0$ pentru $(x, y) \in D$. Deci $\chi(x, y) = qGL\Phi(x, y)$ pentru $(x, y) \in D$. Conform

relațiilor (23′) cu $m = 1, 2$ sau (25′) cu $m = 1, 2$ trebuie calculate aproximațiile :

$$\begin{aligned} w^{(1)}(x, y) &= \Phi(x, y) + G\omega^{(0)}(x, y), \\ \omega^{(1)}(x, y) &= qGLw^{(1)}(x, y), \\ w^{(2)}(x, y) &= \Phi(x, y) + G\omega^{(1)}(x, y) = \Phi(x, y) + qG^2 Lw^{(1)}(x, y), \end{aligned} \tag{27}$$

unde $\omega^0(x, y)$ este o funcție arbitrară în D (se observă că calculul lui $w^{(2)}(x, y)$ nu este necesar decît pentru calculul lui $w^{(3)}(x, y)$. Calculul precedent, ca de altfel și viteza de convergență a procedeului iterativ (23′) sau (25′) depind de alegerea aproximației inițiale $\omega^{(0)}(x, y)$.

Alegerea

$$\omega^{(0)}(x, y) = u_{1,1}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{ab}} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \tag{28}$$

simplifică calculul relației (16) dacă se ține seama de relațiile de ortonormare a funcțiilor proprii, $u_{m,n}(\vec{x})$,

$$\iint_D u_{m,n}(\xi, \eta)\, u_{1,1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \begin{cases} 0, & m \text{ și } n \neq 1, \\ 1, & m = n = 1. \end{cases}$$

Atunci din (16) rezultă

$$G\omega^{(0)}(x, y) = -\frac{1}{\lambda_{1,1}} u_{1,1}(x, y) = -\frac{1}{\lambda_{1,1}} \omega^{(0)}(x, y),$$

$$\lambda_{1,1} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Coeficienții (17′) cu (26) :

$$A_m = \sqrt{\frac{2}{a}} \cdot \frac{2p}{a} \left[\int_0^{a/2} x \sin \frac{m\pi}{a} x\, dx + \int_{a/2}^{a} (a - x) \sin \frac{m\pi}{a} x\, dx \right]$$

devin

$$\begin{cases} A_{2m} = 0, \\ A_{2m-1} = \dfrac{4p\sqrt{2a}}{\pi^2} \cdot \dfrac{(-1)^m}{(2m-1)^2}, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Atunci relația (17) devine :

$$\Phi(x, y) = \frac{8p}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m-1)^2} \times$$

$$\times \frac{\sin \dfrac{(2m-1)\pi}{a} x}{\operatorname{sh} \dfrac{(2m-1)\pi}{a} b} \left[\operatorname{sh} \frac{(2m-1)\pi}{a} y + \operatorname{sh} \frac{(2m-1)\,\pi}{a} (b - y) \right].$$

Deci prima aproximație este

$$w^{(1)}(x, y) = -c \cdot \sin\frac{\pi}{a}x \sin\frac{\pi}{b}y - \frac{8p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2}\times \tag{29}$$

$$\times \frac{\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi}{a}\left(y-\dfrac{b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi b}{2a}} \cdot \sin\frac{(2m-1)\pi}{a}x,$$

cu

$$c = \frac{2ab\sqrt{ab}}{\pi^2(a^2+b^2)}.$$

Seria precedentă fiind rapid convergentă (converge și în medie către condiția la limită (7)), pentru calculul lui $w^{(1)}$ se pot lua primii termeni ai dezvoltării precedente. De exemplu, pentru $y = \dfrac{b}{2}$

$$w^{(1)}\left(x, \frac{b}{2}\right) = -c \cdot \sin\frac{\pi}{a}x + \frac{8p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2}\times$$

$$\times \frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi b}{2a}} \cdot \sin\frac{(2m-1)\pi}{a}x = -c \cdot \sin\frac{\pi}{a}x +$$

$$+\frac{8p}{\pi^2}\left(-\frac{\sin\dfrac{\pi}{a}x}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi b}{2a}} + \frac{\sin\dfrac{3\pi}{a}x}{9\operatorname{ch}\dfrac{3\pi b}{2a}} - \dots\right).$$

În centrul dreptunghiului $OABCD$ se obține săgeata

$$w^{(1)}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = -c +$$

$$+\frac{8p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi b}{2a}} \approx \frac{8p}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi b}{2a}} - c,$$

unde

$$c = \frac{2ab\sqrt{ab}}{\pi^2(a^2+b^2)}.$$

Pentru calculul lui $\omega^{(1)}$ dat de $(27)_2$ se folosește relația (16) și (6'). În relația (6'):

$$L w^{(1)}(\xi, \eta) = N_x(\eta) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + 2N_{xy}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial \eta} + N_y(\xi) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \eta^2}$$

să admitem pentru coeficienții N_x, N_{xy}, N_y următoarele expresii:

$$\begin{aligned} N_x(\eta) &= \alpha_1 \eta + \beta_1, \\ N_{xy}(\xi, \eta) &= \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2, \\ N_y(\xi) &= \alpha_3 \xi + \beta_3. \end{aligned} \tag{30}$$

Atunci (6') cu (29) devine:

$$\begin{aligned} L w^{(1)}(\xi, \eta) = {} & (A_1 \xi + A_2 \eta + A_3) \cdot \sin \frac{\pi}{a} \xi \cdot \sin \frac{\pi}{b} \eta - \\ & - \frac{c\pi^2}{ab} (\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2) \cdot \cos \frac{\pi}{a} \xi \cdot \cos \frac{\pi}{b} \eta + \\ & + (B_1 \xi + B_2 \eta + B_3) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\operatorname{ch} \frac{(2m-1)\pi}{a} \left(\eta - \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{(2m-1) \cdot \pi}{a} \cdot \frac{b}{2}} \times \\ & \times \sin \frac{(2m-1)\pi}{a} \xi - \frac{8p}{a^2} (\alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh} \frac{(2m-1)\pi}{a} \left(\eta - \frac{b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \frac{(2m-1) \cdot \pi}{a} \cdot \frac{b}{2}} \cdot \cos \frac{(2m-1)\pi}{a} \xi, \end{aligned} \tag{31}$$

unde

$$A_1 = \frac{c\pi^2 \alpha_2}{b^2}; \quad A_2 = \frac{c\pi^2 \alpha_1}{a^2}; \quad A_3 = c\pi^2 \left(\frac{\beta_1}{a^2} + \frac{\beta_2}{b^2} \right),$$

$$B_1 = -\frac{8p}{a^2} \alpha_3; \quad B_2 = \frac{8p}{a^2} \alpha_1; \quad B_3 = \frac{8p}{a^2} (\beta_1 - \beta_2).$$

Introducînd (31) în relația (16), conform relației $(27)_2$ se obține pentru $\omega^{(1)}(x,y)$ expresia

$$\omega^{(1)}(x, y) = q \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{A^{(m,n)}}{\lambda_{m,n}} \cdot u_{m,n}(x, y), \tag{32}$$

unde

$$A^{(m,n)} = -I_1^{(m,n)} + \frac{c\pi^2}{ab} I_2^{(m,n)} - I_3^{(m,n)} + \frac{8p}{a^2} I_4^{(m,n)}, \tag{33'}$$

cu

$$I_1^{(m,n)} = \iint_D A_1\xi + A_2\eta + A_3)\, u_{m,n}(\xi, \eta)\, u_{1,1}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$I_2^{(m,n)} = \iint_D (\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2)\, u_{m,n}(\xi, \eta) \cos\frac{\pi}{a}\xi \cos\frac{\pi}{b}\eta\, d\xi\, d\eta, \tag{34}$$

$$I_i^{(m,n)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\operatorname{ch}\dfrac{(2k-1)\pi b}{2a}} J_i^{(m,n,k)}, \quad i = 3, 4,$$

cu

$$J_3^{(m,n,k)} = \iint_D (B_1\xi + B_2\eta + B_3)\, u_{m,n}(\xi, \eta) \operatorname{ch}\frac{(2k-1)\pi}{a}\left(\eta - \frac{b}{2}\right) \times$$

$$\times \sin\frac{(2k-1)\pi}{a}\xi\, d\xi\, d\eta, \tag{35}$$

$$J_4^{(m,n,k)} = \iint_D (\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2) u_{m,n}(\xi, \eta) \cdot \operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi}{a}\left(\eta - \frac{b}{2}\right) \times$$

$$\times \cos\frac{(2k-1)\pi}{a}\xi\, d\xi\, d\eta.$$

Pentru primul coeficient din seria (32) se obține expresia

$$A^{(1,1)} = \frac{ac\pi^2\,\alpha_2}{2b^2} + \frac{bc\pi^2\,\alpha_1}{2a^2} + c\pi^2\left(\frac{\beta_1}{a^2} + \frac{\beta_2}{b^2}\right). \tag{36}$$

Pentru calculul aproximației a doua $(27)_3$ trebuie calculată întîi expresia $G\omega^{(1)}(x, y)$ după relația (16). Introducînd (32) în (16), intervertind integrala dublă cu suma dublă și ținînd cont de ortonormarea sistemului de funcții proprii $(15)_1$, se obține expresia

$$G\omega^{(1)}(x, y) = -\sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{u_{m,n}(x, y)}{\lambda_{m,n}} \iint_D u_{m,n}(\xi, \eta)\, \omega^{(1)}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= -q \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{u_{m,n}(x, y)}{\lambda_{m,n}} \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{A^{(i,j)}}{\lambda_{i,j}} \iint_D u_{m,n}(\xi, \eta)\, u_{i,j}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= -q \sum_{m,n,i,j=1}^{\infty} \frac{u_{m,n}(x, y)}{\lambda_{m,n}} \cdot \frac{A^{(i,j)}}{\lambda_{i,j}} \delta_{im}\, \delta_{jn} = -q \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{A^{(m,n)}}{\lambda_{m,n}^2} u_{m,n}(x, y).$$

Adăugînd la $\Phi(x,y)$, calculat în prealabil, relaţia (36), în care se introduc expresiile (15), se obţine aproximaţia a doua $(27)_3$ sub forma

$$w^{(2)}(x,y)=\frac{8p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2m-1)^2}\cdot\frac{\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi}{a}\left(y-\dfrac{b}{2}\right)}{\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi b}{2a}}\cdot\sin\frac{(2m-1)\pi}{a}x-$$

$$-\frac{2q}{\sqrt{ab}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{A^{(m,n)}}{\left(\dfrac{m^2}{a^2}+\dfrac{n^2}{b^2}\right)}\cdot\sin\frac{m\pi}{a}x\cdot\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

Pentru calculul lui $w^{(2)}(x,y)$ se pot lua primii termeni din seriile precedente deoarece ele sînt rapid convergente.

De exemplu

$$w^{(2)}\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{8p}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2\operatorname{ch}\dfrac{(2m-1)\pi b}{2a}}-$$

$$-\frac{2q}{\sqrt{ab}}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}\cdot A^{(2m-1,\,2n-1)}}{\left[\left(\dfrac{2m-1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{2m-1}{b}\right)^2\right]^2}\approx$$

$$\approx\frac{8p}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\dfrac{\pi b}{2a}}-\frac{2q}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{A^{(1,1)}}{\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)^2}\cdot$$

unde $A^{(1,1)}$ se determină prin (36).

Primită la redacţie la 2 decembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. R. W. Hockney, *The potential calculation and some applications*, Phys. Fluids, *9*. 1968.
2. M. Ieremia, *Beulung orthotroper Rechteckplatten*, Mécanique appliquée, *6*, **22** (1977), und *2*, **23**, (1978).
3. A. Nicolau, *Metode iterative în rezolvarea aproximativă a unor probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale de ordin patru*, St. cerc. matem., în curs de apariţie.
4. W. V. Petryshyn, *On the extrapolated iacobi or simultaneons displacements method in the solution of matrix and operator equations*, Math. of comp., 89, **19** (1965).

CONCEPTE PROBABILISTE ÎN OPTIMIZAREA STRUCTURILOR. II

de DAN FRANGOPOL

Institutul de construcții București

Lucrarea tratează problema optimizării structurilor prin prisma conceptelor moderne probabilistice. În prima parte a lucrării (I) se propune o ierarhizare a problemelor de optimizare și se analizează o serie de aspecte specifice procesului optimizării. Partea a doua a lucrării (II) este consacrată concepției probabilistice de optimizare a structurilor, ținîndu-se seama de criteriile de optimizare specifice și de metodele matematice necesare pentru evaluarea siguranței structurilor. După ce se prezintă exemple de optimizare probabilistică, lucrarea se încheie cu concluzii privind stadiul actual al aplicării conceptelor probabilistice în optimizarea structurilor, indicîndu-se și obiectivele spre care trebuie orientată cercetarea în viitor.

3. OPTIMIZAREA PROBABILISTICĂ

3.1 CONCEPȚIA PROBABILISTICĂ ÎN OPTIMIZAREA STRUCTURILOR

S-a arătat că prin optimizarea deterministă se urmărește obținerea unor soluții de structuri optime atunci cînd încărcările și caracteristicile structurale se presupun date sub forma unor valori certe. Siguranța soluțiilor optime rezultate dintr-o astfel de optimizare nu poate fi evaluată decît în mod cu totul empiric pe baza unor coeficienți de siguranță unici (în optimizarea deterministă — treapta zero —) sau diferențiați (în optimizarea semiprobabilistică — treapta I —), coeficienți ce rezultă din aplicarea unor concepții de calcul lipsite de o fundamentare științifică riguroasă. Aplicarea acestor concepții, care nu țin seama în calcule în mod explicit de caracterul aleator al factorilor de bază care condiționează siguranța structurilor, conduce la soluții optime incorecte, în sensul că nu se realizează un compromis optim între cerințele contradictorii de siguranță și de economie pe care trebuie să le îndeplinească soluțiile.

Din acest motiv, în optimizarea structurilor își face loc în mod progresiv concepția probabilistică. Aplicarea acestei concepții în optimizarea structurilor (aplicare care în prezent se găsește într-un stadiu incipient) presupune, pe de o parte, evaluarea unui sistem de probabilități prin care să se caracterizeze siguranța unei structuri și, pe de altă parte, formularea unui criteriu de optimizare probabilistă prin a cărui utilizare să se obțină o structură a cărei realizare să ducă la beneficii cît mai mari posibil.

Cedarea unei structuri implică depășirea unor stadii de comportare și stări limită succesive, mergînd de la comportarea lipsită de orice fel

de degradare, apariția fisurilor, a articulațiilor plastice etc. pînă la distrugerea totală. Aplicarea concepției probabilistice presupune, în principiu, evaluarea probabilităților de depășire (sau de neatingere) pentru toate stările limită care pot apare în decursul exploatării structurii (ansamblul acestor probabilități caracterizează din punct de vedere cantitativ siguranța structurii) și dimensionarea acesteia astfel încît, prin nivelul caracteristicilor sale, să satisfacă în condiții cît mai economice cerințele necesare exploatării normale.

Din cele de mai sus rezultă complexitatea problemei de optimizare probabilistică. În prezent mai mulți factori constituie un obstacol în abordarea riguroasă a optimizărilor structurale pe cale probabilistică. Unii dintre aceștia sînt următorii :

a) Lipsa de informații statistice precise referitoare atît la încărcări, cît și la caracteristicile mecanice și geometrice ale elementelor și structurilor de construcții.

Informațiile existente conțin un grad de incertitudine care uneori poate fi important. Problema analizei gradului de incertitudine conținut în diverse categorii de informații și incidența acestuia asupra valorii soluției optime rămîne un subiect care, în pofida importanței sale, este foarte puțin abordat în literatura de specialitate.

Un prim pas în această direcție se poate face prin recurgerea la teoria informației și mai precis la una din noțiunile sale fundamentale : *entropia*. Aceasta este o măsură a gradului de incertitudine a unui sistem de variabile aleatoare. O proprietate esențială a entropiei este aditivitatea ; conform acestei proprietăți, entropia unui sistem de variabile aleatoare independente este egală cu suma entropiilor acestor variabile.

Utilizînd noțiunea de entropie se poate deci măsura gradul de incertitudine conținut în diverse categorii de informații. Trebuie remarcat că un plus de informație antrenează o diminuare a entropiei. Dacă suplimentul de informație conduce la cunoașterea completă a sistemului, entropia acestuia se anulează.

b) Asigurarea tehnică actuală (hardware) total insuficientă în situația în care s-ar dispune de toate informațiile necesare optimizării probabilistice.

Performanțele calculatoarelor disponibile, chiar a celor de vîrf pe plan mondial, sînt în prezent total nesatisfăcătoare pentru o optimizare probabilistică riguroasă a unor structuri complexe. În literatura de specialitate se arată că o astfel de optimizare ar fi posibilă întrun timp competitiv (de ordinul 1...10 ore) numai peste 5...6 decenii dacă s-ar admite o mărire a vitezei de calcul a calculatoarelor pe deceniu de circa 1000 ori.

În ceea ce privește problemele de software, elaborarea de programe pentru o optimizare probabilistică riguroasă nu ar presupune eforturi deosebite. Aceste eforturi ar trebui concretizate prin completarea programelor existente, utilizate pentru optimizarea deterministă, cu subprograme astfel concepute încît să permită introducerea datelor necesare optimizării probabilistice și să conțină algoritmii de calcul specifici programării stocastice.

c) Reacția opiniei publice.

Este un fapt constatat că opinia publică nu este pregătită, în prezent, să considere distrugerea unei construcții ca un eveniment posibil.

Este cert că în opinia publică, chiar printre specialiști, se acceptă mult mai ușor accidentele de muncă sau de circulație decît distrugerea unei construcții, distrugere care ar implica unele riscuri care nu pot fi considerate, într-o formă unanim acceptabilă, ca un element cantitativ a unui criteriu de optimizare probabilistică. Aceste riscuri se referă la viața și sănătatea oamenilor și/ sau la valorile culturale adăpostite de construcția respectivă. Din cele de mai sus rezultă că reacția subiectivă a opiniei publice reprezintă un factor important care nu poate fi neglijat în obținerea raportului optim dintre siguranța și economia structurilor.

d) Bariera economică.

O construcție poate fi supusă în decursul existenței sale acțiunilor normale (climatice, tehnologice,...) și, extrem de rar, unor acțiuni cu caracter excepțional (bombardamente, inundații,...). Surplusul de cost necesar pentru a asigura o aceeași siguranță a structurii în raport cu o acțiune excepțională ca și în raport cu o acțiune normală devine atît de mare încît se lovește de o veritabilă barieră economică. Din această cauză acțiunile excepționale nu pot fi luate în considerare în cadrul criteriului de optimizare decît în măsura gravității consecințelor unei eventuale avarii. Aceasta este însă dificil de apreciat.

În concluzie, rezultă că acești factori reprezintă un obstacol considerabil în dezvoltarea teoriei dimensionării probabiliste optime a construcțiilor. Putem de altfel să ne întrebăm dacă în prezent este util să orientăm cercetarea în direcția acestei teorii. Răspunsul la această întrebare este afirmativ din mai multe cauze. În primul rînd cercetarea va ajuta să se înțeleagă natura problemei dimensionării probabilistice optime a construcțiilor. Apoi va face să apară în mod clar sensibilitatea soluției optime în raport cu anumiți parametri care nu pot fi considerați în cadrul unei abordări clasice deterministe. Printre acești parametri se citează următorii : probabilitatea de supraviețuire a structurii, coeficienții de variație ai încărcărilor și ai capacităților portante ale elementelor de construcție, coeficienții de corelație dintre acțiuni, coeficienții de corelație dintre capacitățile portante ale elementelor structurii.

În cele ce urmează, se vor expune două criterii de optimizare probabilistică, se vor discuta unele probleme specifice acestui tip de optimizare și se vor prezenta exemple de optimizare a unor structuri simple. Aceste exemple vor permite scoaterea în evidență a avantajelor optimizării probabilistice a structurilor față de optimizarea deterministă.

3. 2. CRITERII DE OPTIMIZARE PROBABILISTICĂ

Dintre criteriile de optimizare probabilistică cele care conduc la o asigurare rațională a structurilor sînt criteriul costului total și criteriul greutății totale.

3.2.1. Criteriul costului total

Cel mai general criteriu care permite stabilirea structurii optime din punct de vedere economic a fost formulat după cum urmează :

$$C_T = C_1 + C_2 P_{(-)}, \qquad (8)$$

în care C_T reprezintă costul total probabil al construcției, C_1 este costul inițial, iar C_2 și $P_{(-)}$ reprezintă, respectiv, suma costurilor generate de eventualitatea ieșirii din starea de exploatare normală a construcției și probabilitatea de realizare a acestui eveniment.

Conform acestui criteriu obiectivul dimensionării este găsirea structurii căreia îi corespunde valoarea minimă a costului total probabil. Altfel spus, structura optimă este cea la care valoarea probabilității de ieșire din starea de exploatare normală, $P^*_{(-)}$, minimizează valoarea costului C_T. Să denumim $P^*_{(-)}$ probabilitatea economică; valoarea sa este calculată în cazul fundamental prezentat în continuare.

Acest caz corespunde unei structuri simple pentru care dimensionarea se reduce la găsirea valorii optime a unui singur parametru p (momentul static, aria unei secțiuni,...). Valoarea optimă p^* a parametrului p duce la minimizarea costului total probabil al structurii.

Deoarece relația între p și coeficientul de siguranță central al structurii θ este în general cunoscută, problema se reduce la găsirea valorii optime θ^* a coeficientului θ care minimizează costul total probabil al structurii.

Admițînd că θ variază liniar atît în funcție de $\log_{10}P_{(-)}$, cît și de costul inițial C_1 (ipoteze ce nu introduc în general erori semnificative pentru majoritatea legilor de distribuție utilizate în analiza probabilistică a siguranței structurilor), se obține, pentru probabilitatea economică, relația

$$P^*_{(-)} = \frac{\alpha}{C_2 \ln 10}, \tag{9}$$

în care α reprezintă creșterea necesară costului inițial C_1 pentru a reduce de 10 ori probabilitatea $P_{(-)}$. În consecință, coeficientul de siguranță central θ^* al structurii optime este dat de expresia

$$\theta^* = \beta \cdot \operatorname{colog}_{10} P^*_{(-)} + a, \tag{10}$$

în care β reprezintă creșterea necesară coeficientului de siguranță θ pentru a reduce de 10 ori probabilitatea $P_{(-)}$, iar a este o constantă.

În fine, costul total probabil al structurii optime, notat C^*_T, corespunde relației

$$C^*_T = \alpha \cdot \operatorname{colog}_{10} P^*_{(-)} + C_2 P^*_{(-)} + b, \tag{11}$$

în care b este o constantă.

Dacă soluția este diferită de soluția optimă, ea antrenează un exces de cost total E dat de diferența

$$E = C_T - C^*_T = C_1 + C_2 P_{(-)} - C^*_T, \tag{12}$$

în care $P_{(-)}$ este probabilitatea care caracterizează soluția considerată. Acest supliment de cost poate fi calculat în funcție de $P_{(-)}$, $P^*_{(-)}$ și α

(creşterea necesară costului iniţial pentru a reduce de 10 ori probabilitatea $P_{(-)}$) după cum urmează :

$$E = \alpha \left(\log_{10} \frac{P^*_{(-)}}{P_{(-)}} + \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{P_{(-)} - P^*_{(-)}}{P^*_{(-)}} \right). \tag{13}$$

Alura variaţiei costului suplimentar E în funcţie de probabilitatea $P_{(-)}$ este ilustrată în figura 5. Din examinarea acestui grafic, calitativ corect, se constată creşterea mult mai accentuată a costului suplimentar în cazul subdimensionării ($P_{(-)} > P^*_{(-)}$) decît în cazul supradimensionării ($P_{(-)} < P^*_{(-)}$).

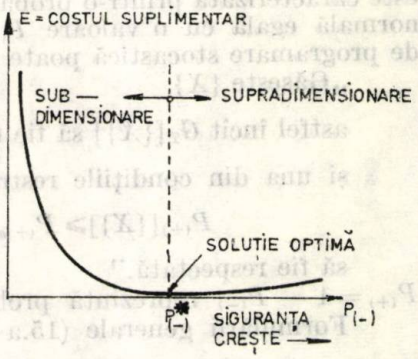


Fig. 5

Soluţia optimă care se asigură prin dimensionarea probabilistică pe baza criteriului costului total (sau al altui criteriu de optimizare) trebuie diferenţiată în funcţie de importanţa funcţională a construcţiei, de durata de exploatare scontată, de gravitatea consecinţelor atingerii diferitelor stări limită posibile etc. Astfel, dacă se consideră parametrul $\lambda = C_2/C_1$ ca o măsură a gravităţii consecinţelor atingerii unor stări limită ultime (exemple : degradarea construcţiei, întreruperea procesului tehnologic etc.), costul total probabil al structurii optime (11) variază liniar în raport cu logaritmul λ, conform graficului din figura 6. Ecuaţia dreptei din acest grafic, se obţine înlocuind în (11) C_2 prin λC_1 :

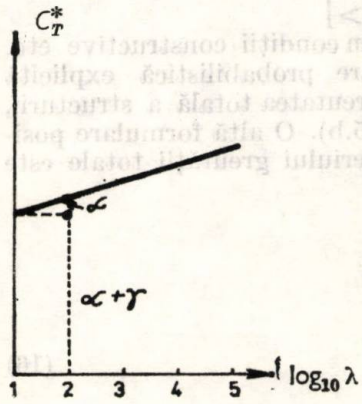


Fig. 6

$$C^*_T = \alpha \log_{10} \lambda + \gamma, \tag{14}$$

în care $\gamma = \alpha \operatorname{colog}_{10} \dfrac{\alpha}{C_1 \ln 10} + \dfrac{\alpha}{\ln 10} + b.$

3.2.2. Criteriul greutăţii totale

În practică este dificilă şi cîteodată chiar imposibilă evaluarea exactă a costului total probabil. Deoarece greuatea totală a unei structuri reprezintă în multe cazuri o măsură a costului acesteia, este logic ca în aceste situaţii să se substituie criteriului costului total criteriul greutăţii totale. Se menţionează totuşi că în anumite cazuri se întîlnesc structuri alcătuite din elemente al căror cost este în opoziţie cu greutatea lor (elemente uşoare cu cost mai ridicat decît al unor elemente mai grele), datorită unor condiţii speciale de fabricare şi/sau prelucrare.

Criteriul greutății totale poate fi aplicat cu succes în optimizarea probabilistică în special în cazul structurilor metalice utilizate frecvent în construcții, conducînd la soluții similare celor rezultate prin aplicarea criteriului costului total.

Conform criteriului greutății totale, obiectivul optimizării probabilistice îl constituie găsirea structurii de greutate totală G_T minimă care este caracterizată printr-o probabilitate de ieșire din starea de exploatare normală egală cu o valoare $P_{(-)a}$ specificată apriori. Această problemă de programare stocastică poate fi formulată în modul următor:

„Găsește $\{X\}$

astfel încît $G_T[\{X\}]$ să fie minim (15.a)

și una din condițiile restrictive

$$P_{(+)}[\{X\}] \geqslant P_{(+)a} \quad \text{sau} \quad P_{(-)}[\{X\}] \leqslant P_{(-)a} \tag{15.b}$$

să fie respectată."

$P_{(+)} = 1 - P_{(-)}$ reprezintă probabilitatea de supraviețuire a structurii.

Formulării generale (15.a—b) i se pot asocia și alte condiții restrictive de tipul relațiilor (1.b), adică $F_j(x_j)\left\{\begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix}\right\} 0$, ce rezultă din condiții de fabricație a elementelor de construcție, din condiții constructive etc.

Formularea (15.a—b) este o optimizare probabilistică explicită deoarece funcția-obiectiv (15.a), respectiv greutatea totală a structurii, este independentă de condiția de siguranță (15.b). O altă formulare posibilă a optimizării probabilistice pe baza criteriului greutății totale este următoarea:

„Găsește $\{X\}$

astfel încît una din funcțiile

$$G_T[\{X\};\ P_{(+)}(\{X\}) \geqslant P_{(+)a}] \text{ sau}$$
$$G_T[\{X\};\ P_{(-)}(\{X\}) \leqslant P_{(-)a}] \tag{16}$$

să fie minimă."

În acest caz optimizarea este implicită deoarece condiția de siguranță este inclusă în funcția de optimizare.

Formulările (15) și (16) sînt echivalente, ambele conducînd la o aceeași soluție optimă $\{X\}_{op}$.

Dacă vectorul soluție $\{X\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}^T$ respectă una din condițiile (15.b) acesta reprezintă o soluție admisibilă. Dacă în plus $\{X\}$ satisface și condiția (15.a) acesta coincide cu soluția optimă a problemei $\{X\}_{op}$.

3.2.3. Unele probleme specifice optimizării probabilistice

Soluționarea optimizării probabilistice a unei structuri presupune în prealabil rezolvarea unor probleme specifice cum sînt:

a) definirea variabilelor și a funcției obiectiv;
b) evaluarea siguranței structurii;
c) definirea metodei de calcul pentru soluționarea optimizării probabilistice.

a) Componentele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale vectorului soluție $\{X\}$ pot fi variabile aleatoare sau caracteristici (valori medii, dispersii,...) ale acestora. Aceste componente se referă fie la caracteristicile geometrice ale structurii (deschideri, înălțimi, înclinările barelor unei grinzi cu zăbrele, ...), fie la repartizarea materialului în structură (momente de inerție, rigidități,...)

După precizarea variabilelor, funcția obiectiv poate fi definită, în funcție de criteriul de optimizare ales, reprezentînd costul total probabil sau greutatea totală a structurii.

Un parametru important care intervine în optimizarea probabilistică pe baza criteriului greutății totale, parametru care influențează sensibil soluția optimă obținută, este nivelul de asigurare al structurii măsurat prin valoarea probabilității de supraviețuire $P_{(+)a}$ (sau de cedare $P_{(-)a} = 1 - P_{(+)a}$) specificată apriori. Stabilirea judicioasă a acestui parametru constituie ea însăși o problemă de optimizare complexă pe ansamblul activității de construcții. Această problemă are un caracter dinamic deoarece stabilirea nivelului de asigurare al structurilor trebuie efectuată considerîndu-l ca un parametru al cărui optim este variabil în timp în funcție de evoluția nivelului de dezvoltare social-economică și tehnico-științifică.

b). Indiferent de criteriul de optimizare utilizat, evaluarea siguranței structurii este o problemă centrală care intervine în procesul optimizării probabilistice. În această ordine de idei sînt de menționat, în principiu, trei căi:

— determinarea efectivă a probabilității (sau a probabilităților) prin care se caracterizează cantitativ siguranța structurii;

— simplificarea problemei prin calculul unei valori aproximative a probabilității care caracterizează siguranța structurii;

— simplificarea radicală a problemei prin efectuarea de calcule asupra momentelor de ordinul 1 și 2 ale distribuțiilor variabilelor aleatoare de care depinde siguranța structurii.

Prima cale nu este în prezent abordabilă practic chiar în cadrul activității de cercetare, iar a doua și a treia pot fi aplicate numai în unele probleme de optimizare (aproximativă) ale unor structuri simple în condițiile disponibilității unei cantități de date și a unei capacități de calcul corespunzătore.

Pentru a exemplifica aceste căi diferite de abordare se consideră cazul structurilor caracterizate printr-o comportare în lanț (de exemplu cazul unei grinzi cu zăbrele static determinate) supuse la o singură schemă de încărcare. Pentru o astfel de structură probabilitatea de cedare $P_{(-)}$ poate fi calculată conform relației:

$$P_{(-)} = P\left[\bigcup_{i=1}^{m} E_i\right], \tag{17}$$

unde $\bigcup$ este simbolul reuniunii, E_i este evenimentul care definește cedarea elementului i, iar m este numărul de elemente care alcătuiesc structura.

Evenimentul E_i se produce atunci cînd rezerva de siguranță a elementului i este negativă. Această rezervă de siguranță, reprezentată prin variabila aleatoare R_i, se definește prin diferența

$$R_i = C_i - S_i, \tag{18}$$

în care S_i este efectul schemei de încărcare considerate asupra elementului i, iar C_i este capacitatea portantă a elementului i în raport cu acest efect. În consecință, se poate scrie

$$E_i \equiv (R_i < 0). \tag{19}$$

Evenimentul (19) poate fi exprimat și cu ajutorul variabilei normate

$$R_i^* = \frac{R_i - \bar{R}_i}{\sigma(R_i)}, \tag{20}$$

în care $\bar{R}_i$ și $\sigma(R_i)$ sînt, respectiv, valoarea medie și abaterea medie pătratică a rezervei de siguranță R_i, prin relația

$$E_i \equiv \left(R_i^* < -\frac{\bar{R}_i}{\sigma(R_i)}\right) \equiv (R_i^* < -\beta_i), \tag{21}$$

în care indicatorul probabilistic $\beta_i = \bar{R}_i/\sigma(R_i)$ exprimă distanța măsurată în abateri standard $\sigma(R_i)$, cuprinsă între valoarea medie $\bar{R}_i$ și punctul de abscisă $R_i = 0$.

Indicatorul probabilistic β_i poate fi exprimat în funcție de valorile medii și abaterile medii pătratice ale variabilelor aleatoare independente C_i și S_i, prin relația

$$\beta_i = \frac{\bar{C}_i - \bar{S}_i}{\sqrt{\sigma^2(C_i) + \sigma^2(S_i)}} = \frac{\theta_i - 1}{\sqrt{\theta_i^2 V^2(C_i) + V^2(S_i)}}, \tag{22}$$

în care $\theta_i = \bar{C}_i/\bar{S}_i$ este coeficientul central de siguranță al elementului i, iar $V(C_i) = \sigma(C_i)/\bar{C}_i$ și $V(S_i) = \sigma(S_i)/\bar{S}_i$ sînt coeficienții de variație ai variabilelor C_i și S_i.

Probabilitatea de cedare a elementului i este deci

$$P_{(-)i} = P(R_i < 0) = P(R_i^* < -\beta_i). \tag{23}$$

Această probabilitate poate fi evaluată cu exactitate în situația în care distribuțiile variabilelor aleatoare C_i și S_i sînt cunoscute, pe baza relațiilor :

$$P_{(-)i} = \int_0^\infty G_{C_i}(x)\, g_{S_i}(x)\, \mathrm{d}x = 1 - \int_0^\infty G_{S_i}(x) g_{C_i}(x)\, \mathrm{d}x, \tag{24}$$

în care $G_{C_i}(x)$, $G_{S_i}(x)$ și $g_{C_i}(x)$, $g_{S_i}(x)$ sînt, respectiv, funcțiile și densitățile de repartiție ale variabilelor C_i și S_i. Cum, în general, informațiile necesare

evaluării exacte a probabilității (24) lipsesc, se recurge la simplificarea problemei prin folosirea unor relații aproximative de tipul

$$P_{(-)i} \simeq f(\beta_i) = c_1 \exp\{-2{,}3c_2\beta^{c_3}\}, \tag{25}$$

în care c_1, c_2, c_3 sînt constante ale căror valori se pot modifica în funcție de suplimentul de informație ce se obține în timp asupra repartițiilor variabilelor aleatoare C_i și S_i.

Relația (17) poate fi utilizată și pentru calculul exact al probabilității apariției cedării unei structuri static nedeterminate la care se poate considera drept criteriu de distrugere cel al cedării plastice. În acest caz, în relația (17) m reprezintă numărul de mecanisme de cedare posibile ale structurii, iar E_i este evenimentul care caracterizează apariția mecanismului i :

$$E_i \equiv (C_i - S_i < 0) \equiv (R_i < 0). \tag{26}$$

Atît capacitatea portantă a mecanismului i, notată C_i, cît și efectul încărcărilor structurii asupra acestui mecanism, notat S_i, sînt variabile aleatoare care au semnificația energetică următoare :

$$C_i = \sum_{j=1}^{s} \theta_{ij} \cdot M_j, \tag{27}$$

$$S_i = \sum_{k=1}^{t} \delta_{ik} \cdot Q_k,$$

unde M_j este o variabilă aleatoare ce reprezintă momentul plastic din secțiunea critică j care produce lucru mecanic în cadrul mecanismul i prin rotirea absolută θ_{ij}, iar Q_k este încărcarea aleatoare care produce lucru mecanic în mecanismul i prin deplasarea corespunzătoare δ_{ik}.

Deoarece calculul exact al probabilității (17) este dificil de realizat, în practică se pot utiliza marginile următoare :

$$\max_{i=1}^{m} P_{(-)i} \leqslant P_{(-)} \leqslant \sum_{i=1}^{m} P_{(-)i}. \tag{28}$$

În cazul structurilor static nedeterminate la care este posibilă apariția a m mecanisme de cedare plastică, relația (28) exprimă că probabilitatea de distrugere a structurii este cel puțin egală cu probabilitatea de apariție a oricărui mecanism de cedare posibil și cel mult egală cu suma probabilităților de apariție a tuturor mecanimelor posibile.

În cazul structurilor static determinate alcătuite din m elemente, relația (28) exprimă că probabilitatea de distrugere a structurii este cel puțin egală cu probabilitatea de distrugere a oricăruia dintre elementele sale și cel mult egală cu suma probabilităților de distrugere a tuturor elementelor care o alcătuiesc.

Marginea inferioară, $\max_{i=1}^{m} P_{(-)i}$, corespunde situației în care rezervele, de siguranță $R_i (i = 1,2,\ldots,m)$ sînt variabile aleatoare strict corelate, iar

marginea superioară, $\sum_{i=1}^{m} P_{(-)i}$, corespunde situației în care $R_i (i = 1,2,\ldots m)$ sînt variabile aleatoare independente (situație în care toate cele m evenimente E_i sînt incompatibile două cîte două).

Trebuie remarcat că aproximarea valorii exacte a probabilității $P_{(-)}$ prin marginea superioară este o aproximare care se situează de partea siguranței. Eroarea care rezultă din această aproximare este cu atît mai redusă cu cît corelația existentă între cele m variabile aleatoare R_i este mai slabă.

O aproximare prin exces mai exactă decît cea obținută prin utilizarea marginei superioare $\sum_{i=1}^{m} P_{(-)i}$ este dată de suma $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_{(-)i}$ în care coeficienții de ponderare α_i sînt cuprinși în intervalul [0, 1] fiind definiți prin relația

$$\alpha_i = \min_{j=1}^{i-1} \left\{ 1 - \frac{P\left[R_i^* < -\max\left(\frac{\beta_j}{|\rho_{ij}|} ; \beta_i \right) \right]}{P[R_i^* < -\beta_i]} \right\}, \tag{29}$$

în care ρ_{ij} reprezintă coeficientul de corelație dintre rezervele de siguranță R_i și R_j. Utilizînd această aproximație se poate deci scrie :

$$P_{(-)} \leqslant \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_{(-)i}. \tag{30}$$

Se menționează că suma $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_{(-)i}$ furnizează valoarea exactă a probabilității $P_{(-)}$ în următoarele situații :

— dacă variabilele aleatoare R_i sînt independente (deci dacă $\rho_{ij} = 0$ $(i = 1,\ 2,\ldots,\ m\ ;\ j < i)$), atunci

$$\alpha_i = \min_{j=1}^{i-1} \left\{ 1 - \frac{P(R_i^* < -\infty)}{P(R_i^* < -\beta_i)} \right\} = 1,\ i = 1, 2,\ldots, m, \tag{31}$$

deci

$$P_{(-)} = \sum_{i=1}^{m} P_{(-)i}\ ; \tag{32}$$

— dacă variabilele aleatoare R_i sînt strict corelate (deci dacă $\rho_{ij} = 1 (i = 1,\ 2,\ldots,\ m\ ;\ j \leqslant i)$) și dacă se numerotează cele m elemente (mecanisme de cedare) astfel încît să fie satisfăcută relația de ordine

$$\beta_1 \leqslant \beta_2 \leqslant \ldots \leqslant \beta_m, \tag{33}$$

deci dacă în cazul structurilor static determinate primul element este caracterizat prin cea mai mică siguranță (veriga cea mai slabă din lanț), sau dacă în cazul structurilor static nedeterminate primul mecanism de cedare are cea mai mare probabilitate de apariție, atunci $\alpha_1 = 1$, iar

$$\alpha_i = \min_{j=1}^{i=1} \left\{ 1 - \frac{P(R_i^* < -\beta_i)}{P(R_i^* < -\beta_i)} \right\} = 0, \quad i = 2, 3, .., m, \tag{34}$$

și în consecință

$$P_{(-)} = P_{(-)1} = \max_{i=1}^{m} P_{(-)i}. \tag{35}$$

În cazul în care o structură cu o comportare în lanț alcătuită din m elemente este supusă la mai multe scheme de încărcare (fie n numărul schemelor de încărcare considerate) probabilitatea de distrugere a structurii $P_{(-)}$ poate fi aproximată prin relația

$$P_{-} \simeq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} P_{(-)ij}, \tag{36}$$

în care suma dublă reprezintă un majorant al valorii exacte $P_{(-)}$, iar $P_{(-)ij}$ este probabilitatea de distrugere a elementului i corespunzătoare schemei de încărcare j.

Se subliniază că pentru unele tipuri de structuri formularea generală a optimizării pe baza criteriului greutății totale (v. rel. 15.a—b) poate fi înlocuită prin formulări mai simple în care să nu fie necesară evaluarea probabilității $P_{(-)}$. Astfel, în cazul structurilor cu comportare în lanț, formularea (15. a-b) poate fi înlocuită prin minimizarea greutății totale G_T cu satisfacerea condiției

$$\frac{G_i}{G_T} = \frac{P_{(-)i}}{P_{(-)a}}, \tag{37}$$

în care G_i este greutatea elementului i caracterizat prin probabilitatea de distrugere $P_{(-)i}$, G_T este greutatea totală a structurii $G_T = \sum_{i=1}^{m} G_i$, iar $P_{(-)a}$ este valoarea admisă apriori a probabilității de distrugere a structurii. Conform formulării (37), elementele mai grele care alcătuiesc structura optimă sînt caracterizate printr-o probabilitate de cedare mai mare decît cea a elementelor mai ușoare.

O altă posibilitate de formulare simplificată a criteriului greutății totale (15. a-b) în cazul structurilor cu comportare în lanț, este minimizarea greutății totale G_T cu satisfacerea condiției :

$$P_{(-)i} = \frac{P_{(-)a}}{m}, \tag{38}$$

în care m este numărul elementelor care alcătuiesc structura. În această situație, structura optimă este constituită din elemente ce se caracterizează prin același grad de siguranță.

c). Din punct de vedere matematic, rezolvarea problemelor de optimizare probabilistică se face prin programare stocastică. Prezentarea metodelor de calcul specifice acestui tip de programare depășește cadrul acestei lucrări. Se menționează totuși că în acest caz se pot ivi două situații :

— cazul în care repartițiile variabilelor aleatoare care intervin în calcule sînt cunoscute ;

— cazul în care aceste repartiții nu sînt cunoscute, dar se cunosc unele caracteristici esențiale ale acestora (valori medii, dispersii,...).

De notat că în situațiile practice de optimizare a structurilor care impun programe stocastice, de multe ori acestea se aproximează prin programe deterministe în care variabilele aleatoare se înlocuiesc cu valorile lor medii, ținînd seama, eventual și de dispersiile acestora. O asemenea manieră de aproximare a problemei permite utilizarea metodelor clasice de optimizare deterministă (exemple : metoda gredientului, metoda funcțiilor penalizate etc.).

3.3. EXEMPLE DE OPTIMIZARE PROBABILISTICĂ

3.3.1. Formularea problemei de optimizare în domeniul plastic

Cele două exemple ce se vor prezenta în acest paragraf se referă la dimensionarea probabilistică optimă a unor structuri metalice în domeniul plastic.

Se admite că variantele de structură posibile pot diferi între ele numai prin variația cantităților de materiale introduse în secțiuni. Atît încărcările, cît și momentele plastice din secțiunile critice se presupun variabile aleatoare, iar dependențele probabilistice dintre încărcări, pe de o parte, și dintre momentele plastice, pe de altă parte, sînt luate în considerație prin intermediul unor coeficienți de corelație.

Problema de optimizare este aceea a minimizării greutății totale a structurii, în condițiile în care probabilitatea de cedare plastică $P_{(-)}$ este cel mult egală cu o valoare $P_{(-)a}$ specificată apriori. Această problemă, care se exprimă matematic sub forma relațiilor (15.a-b), se rezolvă prin programare stocastică neliniară.

Vectorul soluție $\{X\}$ reprezintă vectorul variabilelor de dimensionare $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ care, în cazul optimizării plastice, sînt reprezentate de modulii de rezistență plastici $W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots, W_n$ ai barelor ce alcătuiesc structura.

Între momentul plastic dintr-o secțiune critică j, notat M_j, și limita de curgere a oțelului σ_c, există relația

$$M_j = W_j \sigma_c.$$

Modulul de rezistență plastic W_j este o variabilă aleatoare, dar cum variabilitatea sa este redusă în comparație cu cea a limitei de curgere σ_c, se poate aproxima coeficientul de variație al momentului plastic M_j

$$V(M_j) = \sqrt{V^2(W_j) + V^2(\sigma_c)}$$

prin relația

$$V(M_j) = V(\sigma_c).$$

În această situație variabilitatea modulului de rezistență plastic se neglijază în raport cu variabilitatea limitei de curgere.

Se poate arăta că admițînd că funcția de optimizat, respectiv greutatea totală a structurii G_T, depinde liniar de valorile medii ale momentelor plastice secționale, minimizarea greutății totale revine la minimizarea expresiei liniare

$$F = \sum_{i=1}^{k} L_i W_i, \tag{39}$$

în care k este numărul barelor din structură care au modulii de rezistență plastici W_i diferiți, iar L_i este lungimea totală a barelor pentru care W_i este același.

Probabilitatea de cedare plastică a structurii $P_{(-)}$, exprimată prin relația exactă (17), în care m este numărul de mecanisme de cedare posibile, poate fi aproximată prin expresia marginei superioare dată de relația (32) :

$$P_{(-)} = \sum_{i=1}^{m} P_{(-)i}. \tag{40}$$

În această situație, problema de dimensionare revine la distribuirea optimă a valorii probabilității (40), care se poate identifica probabilității specificate apriori $P_{(-)a}$, între cele m mecanisme de cedare posibile ale structurii astfel încît funcția de optimizat (39) să fie minimă.

3.3. 2. Optimizarea unei grinzi continue

Ca un prim exemplu se consideră grinda continuă cu două deschideri din figura 7*a* supusă acțiunii unor încărcări concentrate aleatoare P și Q (caracterizate prin valorile medii $\bar{P} = 28{,}6$ kN, $\bar{Q} = 9{,}5$ kN și prin coeficienții de variație $V(P) = V(Q) = 15\%$). Momentele plastice ale grinzii corespunzătoare celor două deschideri M_1 și M_2 se consideră variabile aleatoare caracterizate prin coeficienții de variație $V(M_1) = V(M_2) = 10\%$. Cele patru mecanisme posibile de cedare ale grinzii sînt reprezentate în figura 7*b*.

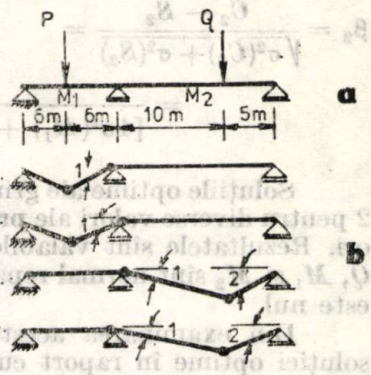


Fig. 7

Din examinarea configurației acestor mecanisme se remarcă :

— probabilitatea de apariție a oricăruia dintre cele patru mecanisme posibile nu depinde de valoarea coeficientului de corelație între încărcările P și Q [adică $P_{(-)i}$, pentru $i = 1, \ldots, 4$, nu depinde de $\rho(P, Q)$] ;

— numai probabilitățile de apariție ale mecanimelor 2. și 4. depind de valoarea coeficientului de corelație între momentele plastice M_1 și M_2 [adică numai $P_{(-)2}$ și $P_{(-)4}$ depind de $\rho(M_1, M_2)$].

Problema de optimizare se formulează în modul următor:

„Găsește $\bar{M} = \left\{\begin{matrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{matrix}\right\}$

astfel încît $F_0 = \{12\ 15\}\ \{\bar{M}\}$ să fie minim

și condiția restrictivă de siguranță a grinzii

$$\sum_{i=1}^{4} P_{(-)i} \leqslant P_{(-)a}$$

să fie respectată".

În această formulare, $\{M\}$ este vectorul soluției ale cărui componente sînt valorile medii ale momentelor plastice M_1 și M_2 (deci $\{\bar{M}\} = \sigma_c\{W\}$, în care $\{W\}$ este vectorul modulilor de rezistență plastici W_1 și W_2, iar σ_c este limita de curgere a oțelului), F_0 este funcția-obiectiv (deci $F_0 = \sigma_c F$, în care F este dată de (39)), iar $P_{(-)i}$ este probabilitatea de apariție a mecanismului i.

Probabilitatea $P_{(-)i}$ poate fi calculată pe baza relației (23), în care $\bar{C}_i$, $\bar{S}_i$ și $\sigma^2(C_i)$, $\sigma^2(S_i)$ sînt valorile medii și, respectiv, dispersiile variabilelor aleatoare C_i, S_i definite prin expresiile (27). De exemplu, probabilitatea de apariție a mecanismului 2. poate fi calculată pe baza relației:

$$P_{(-)2} = P(R_2 < 0) = P(R_2^* < -\beta_2),$$

unde

$$R_2 = C_2 - S_2 = 2M_1 + M_2 - 6P.$$

Valorile medii ale variabilelor aleatoare C_2 și S_2 sînt

$$\bar{C}_2 = 2\bar{M}_1 + \bar{M}_2 \quad \text{și} \quad \bar{S}_2 = 6\bar{P} = 171{,}6\ \text{kN} \cdot \text{m},$$

iar dispersiile acestor variabile sînt date de relațiile:

$$\sigma^2(C_2) = 4\ \sigma^2(M_1) + \sigma^2(M_2) + 4\sigma(M_1)\sigma(M_2)\rho(M_1, M_2)$$

$$\sigma^2(S_2) = 36\sigma^2(P) = 36\,[\bar{P} \cdot V(P)]^2 = 36[28{,}6 \cdot 0{,}15]^2 = 662{,}6\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}^2.$$

În consecință, indicatorul probabilistic al siguranței în raport cu apariția mecanismului 2, notat β_2, se poate scrie (v. rel. 22):

$$\beta_2 = \frac{\bar{C}_2 - \bar{S}_2}{\sqrt{\sigma^2(C_2) + \sigma^2(S_2)}} = \frac{2\bar{M}_1 + \bar{M}_2 - 171{,}6}{[4\sigma^2(M_1) + \sigma^2(M_2) + 4\sigma(M_1)\sigma(M_2)\rho(M_1, M_2) + 662{,}6]^{1/2}}.$$

Soluțiile optime ale grinzii continue din figura 7 *a* sînt date în tabelul 2 pentru diverse valori ale probabilității de cedare plastică specificate apriori. Rezultatele sînt valabile în situația în care variabilele aleatoare P, Q, M_1 și M_2 sînt normal repartizate iar coeficientul de corelație $\rho(M_1, M_2)$ este nul.

Din examinarea acestor rezultate se poate observa sensibilitatea soluției optime în raport cu valoarea probabilității de cedare plastică a structurii. Se remarcă de asemenea că:

Tabelul 2

Soluții optime pentru grinda continuă din figura 7a

Probabilitățile de cedare specificate apriori	Soluții optime (kN.m)		Funcții-obiectiv (kN. m²)	Probabilitațile de apariție ale mecanismelor de cedare (în ordine descrescătoare)
$P_{(-)a}$	$\bar{M}_1$	$\bar{M}_2$	$12\bar{M}_1+15\bar{M}_2$	$P_{(-)i}$
10^{-1}	90,6	34,8	1609,2	$0{,}82\cdot10^{-1}\rightarrow$(2.)* $0{,}14\cdot10^{-1}\rightarrow$(3.) $0{,}38\cdot10^{-2}\rightarrow$(1.) $0{,}29\cdot10^{-6}\rightarrow$(4.)
10^{-2}	107,0	39,2	1872,0	$0{,}80\cdot10^{-2}\rightarrow$(2.) $0{,}19\cdot10^{-2}\rightarrow$(3.) $0{,}15\cdot10^{-3}\rightarrow$(1.) $<10^{-7}\rightarrow$(4.)
10^{-3}	120,2	43,8	2099,4	$0{,}78\cdot10^{-3}\rightarrow$(2.) $0{,}21\cdot10^{-3}\rightarrow$(3.) $1{,}00\cdot10^{-5}\rightarrow$(1.) $<10^{-7}\rightarrow$(4.)
10^{-4}	132,0	48,6	2313,0	$0{,}78\cdot10^{-4}\rightarrow$(2.) $0{,}21\cdot10^{-4}\rightarrow$(3.) $0{,}11\cdot10^{-5}\rightarrow$(1.) $<10^{-7}\rightarrow$(4.)
10^{-5}	142,8	53,8	2520,6	$0{,}81\cdot10^{-5}\rightarrow$(2.) $0{,}18\cdot10^{-5}\rightarrow$(3.) $0{,}14\cdot10^{-6}\rightarrow$(1.) $<10^{-7}\rightarrow$(4.)

* Mecanismul de cedare corespunzător probabilității $P_{(-)i}$ este indicat între paranteze în conformitate cu figura 7*b*.

— funcția-obiectiv, $F_0=12\,\bar{M}_1+15\,\bar{M}_2$, care corespunde greutății minime a grinzii, crește o dată cu scăderea valorii probabilității de cedare plastică $P_{(-)a}$ (deci o dată cu mărirea siguranței structurii);

— indiferent de valoarea probabilității $P_{(-)a}$, mecanismele de cedare 2 și 3 au, în cazul soluției optime, probabilități de apariție mult mai mari decît cele corespunzătoare mecanismelor 1 și 4 (astfel, mecanismul 2 este caracterizat printr-o probabilitate de apariție aproximativ egală cu 0,8 $P_{(-)a}$, iar mecanismul 3 printr-o probabilitate aproximativ egală cu 0,19 $P_{(-)a}$). Această situație este pe deplin normală deoarece efectuînd optimizarea deterministă a grinzii continue din figura 7*a* (deci neluînd în considerare dispersiile variabilelor aleatoare P, Q, M_1, M_2), rezultă că structura optimă se poate distruge prin apariția unuia dintre mecanismele 2 sau 3.

3.3.3. Optimizarea unui cadru portal

Al doilea exemplu se referă la optimizarea cadrului portal cu un singur nivel și cu două deschideri din figura 8*a*. Încărcările aleatoare Q_1, Q_2 și H (caracterizate prin valorile medii $\bar{Q}_1=77{,}00$ kN, $\bar{Q}_2=115{,}50$ kN,

$\bar{H} = 15{,}05\text{kN}$ și prin coeficienții de variație $V(Q_1) = V(Q_2) = 15\%$, $V(H) = 20\%$) și momentele plastice aleatoare M_1, M_2 și M_3 (caracterizate prin coeficienții de variație $V(M_1) = V(M_2) = V(M_3) = 10\%$) constituie datele problemei. Încărcările Q_1, Q_2 și H se presupun variabile aleatoare independente, deci $\rho(Q_1, Q_2) = \rho(Q_1, H) = \rho(Q_2, H) = 0$. Se menționează că structura din figura 8 *a*, prezintă 28 de mecanisme de cedare posibile. Optimizarea probabilistică a cadrului revine la rezolvarea următoarei probleme :

„Găsește $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$
astfel încît $F_0 = 12\bar{M}_1 + 8\bar{M}_2 + 12\bar{M}_3$ să fie minim și condiția restrictivă de siguranță a cadrului

$$\sum_{i=1}^{28} P_{(-)i} \leqslant P_{(-)a}$$

să fie respectată".

Soluțiile optime ale cadrului portal din figura 8 *a*, obținute printr-un algoritm de programare stocastică neliniară ce are la bază metoda gradientului, sînt date în tabelul 3 pentru diverse valori ale probabilității de cedare plastică specificate apriori și pentru valorile extreme (0 și 1) ale coeficienților de corelație $\rho(M_i, M_j)$ dintre momentele plastice M_1, M_2 și M_3, în situația în care toate variabilele aleatoare care intervin în calcule urmează repartiția normală. În tabelul 3 se dau de asemenea valorile funcțiilor-obiectiv și probabilitățile de apariție pentru primele patru dintre cele mai probabile mecanisme de cedare corespunzătoare fiecări soluții optime. Aceste mecanisme sînt indicate în figura 8 *b*.

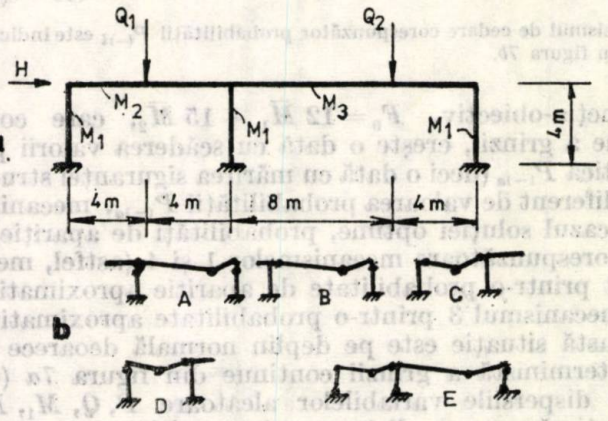


Fig. 8

Rezultatele prezentate în tabelul 3 arată că valoarea funcției de optimizat, $F_0 = 12\bar{M}_1 + 8\bar{M}_2 + 12\bar{M}_3$, care corespunde soluției optime, crește odată cu micșorarea probabilității de cedare plastică a structurii $P_{(-)a}$ și cu mărirea coeficienților de corelație $\rho(M_i, M_j)$ dintre momentele plastice ale barelor structurii. Se remarcă de asemenea că indiferent de valoarea probabilității $P_{(-)a}$, mecanismele de cedare A și B au, în cazul soluției optime, probabilitățile de apariție cele mai mari [astfel, mecanis-

Tabelul 3

Soluții optime pentru cadrul portal din figura 8-a

Probabilitățile de cedare specificate apriori	Coeficienții de corelație între momentele plastice	Soluții optime (kN.m)			Funcții obiectiv (kN.m²)	Probabilitățilede apariție ale mecanismelor de cedare (în ordine descrescătoare)
$P_{(-)a}$	$\rho(M_i, M_j)$	$\overline{M}_1$	$\overline{M}_2$	$\overline{M}_3$	F_0	$P_{(-)i}$
10^{-3}	0	132,8	132,2	314,2	6422	$0{,}65 \cdot 10^{-3} \rightarrow (A)^*$; $0{,}26 \cdot 10^{-3} \rightarrow (B)$; $0{,}45 \cdot 10^{-4} \rightarrow (C)$; $0{,}44 \cdot 10^{-4} \rightarrow (D) \ldots$
	1	111,1	157,9	371,6	7056	$0{,}65 \cdot 10^{-3} \rightarrow (A)$; $0{,}18 \cdot 10^{-3} \rightarrow (B)$; $10^{-4} \rightarrow (D)$; $0{,}36 \cdot 10^{-4} \rightarrow (E) \ldots$
10^{-4}	0	148,1	141,9	335,5	6938	$0{,}67 \cdot 10^{-4} \rightarrow (A)$; $0{,}27 \cdot 10^{-4} \rightarrow (B)$; $0{,}36 \cdot 10^{-5} \rightarrow (C)$; $0{,}23 \cdot 10^{-5} \rightarrow (D) \ldots$
	1	132,2	171,8	406,7	7841	$0{,}67 \cdot 10^{-4} \rightarrow (A)$; $0{,}19 \cdot 10^{-4} \rightarrow (B)$; $0{,}98 \cdot 10^{-5} \rightarrow (D)$; $0{,}23 \cdot 10^{-5} \rightarrow (E) \ldots$
10^{-5}	0	167,1	148,9	351,6	7416	$0{,}62 \cdot 10^{-5} \rightarrow (A)$; $0{,}31 \cdot 10^{-5} \rightarrow (B)$; $0{,}50 \cdot 10^{-6} \rightarrow (C)$; $0{,}13 \cdot 10^{-6} \rightarrow (D) \ldots$
	1	148,8	187,2	446,7	8644	$0{,}67 \cdot 10^{-5} \rightarrow (A)$; $0{,}18 \cdot 10^{-5} \rightarrow (B)$; $10^{-6} \rightarrow (D)$; $0{,}27 \cdot 10^{-6} \rightarrow (C) \ldots$

* Mecanismul de cedare corespunzător probabilității $P_{(-)i}$ este indicat între paranteze în conformitate cu figura 8*b*.

mul A este caracterizat printr-o probabilitate de apariție de circa (0,62 — — 0,67) $P_{(-)a}$, iar mecanismul B de circa (0,18 — 0,31) $P_{(-)a}$].

Figura 9 prezintă curbe de egală siguranță ($P_{(-)a} = 10^{-4}$) în raport cu cedarea plastică a cadrului din figura 8 a, pentru două valori (7000 și 8000 kN · m²) ale funcției obiectiv F_0, în situația în care momentele plastice M_1, M_2, M_3 sînt independente: $\rho(M_i, M_j) = 0$. Două puncte oarecare care se găsesc pe o astfel de curbă reprezintă două soluții de structură care sînt caracterizate prin aceeași siguranță și prin aceeași valoare a funcției-obiectiv. Criteriul pe baza căruia trebuie ales între aceste două soluții este acela al gravității consecințelor pe care le-ar implica avarierea structurii, optînd evident, pentru soluția la care mecanismele de cedare cele mai probabile conduc la consecințe mai puțin grave. Optimizarea deterministă a cadrului din figura 8a, arată că structura optimă se poate distruge prin apariția oricăruia dintre mecanismele A, B sau C. În consecință, ca și în exemplul precedent, se constată că mecanismele cu cea mai mare probabilitate de apariție corespunzătoare soluției de optimizare probabilistă sînt, în general, mecanismele de cedare asociate soluției de optimizare deterministă.

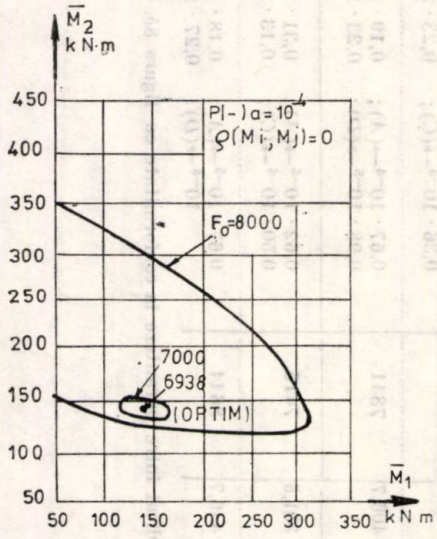


Fig. 9

4. CONSIDERAȚII FINALE

Din această lucrare rezultă o serie de concluzii privind stadiul actual al unor probleme legate de optimizarea structurilor pe cale probabilistică, precum și obiectivele spre care trebuie orientată cercetarea pentru a se obține soluții cît mai apropiate de soluțiile optime.

1. Optimizarea structurilor este în prezent o problemă de programare matematică orientată spre utilizarea la un nivel superior al calculatoarelor în scopul identificării unor soluții structurale prin a căror realizare să se obțină un maxim de eficiență pentru societate.

2. Din punctul de vedere al modului în care se consideră în calcule variabilitatea aleatoare a factorilor de bază care condiționează siguranța structurilor, formularea problemelor de optimizare se poate face în principiu pe două căi esențial diferite: formularea deterministă și formularea probabilistică. În timp ce formularea deterministă poate da numai unele indicații parțiale asupra soluției optime, formularea probabilistică corespunde scopului fundamental al calculelor.

3. În afara tipului de formulare utilizat, problemele de optimizare structurală trebuie diferențiate pe baza unei ierarhizări în funcție de obiec-

tul la care se referă (dimensiunile elementelor de construcții, distribuția materialului într-o structură cu configurația generală fixată, topologia unei structuri etc.).

4. În timp ce pentru problemele de optimizare mai simple, care corespund unor formulări deterministe din categoriile 1 și chiar 2 din ierarhizarea prezentată în lucrare, există în literatura de specialitate numeroase exemple de calcul, pentru problemele de optimizare mai complexe, care corespund unor formulări deterministe din categoriile 3 și 4, exemplele sînt mult mai puțin numeroase.

5. Pentru problemele de optimizare probabilistică, indiferent de categoria în care se încadrează din punct de vedere al ierarhizării, literatura de specialitate este deosebit de săracă. Din această cauză, dată fiind importanța obținerii unor progrese mai rapide în domeniul optimizării probabilistice a structurilor, este rațională stimularea unei activități de cercetare de proporții.

Această activitate de cercetare trebuie orientată în primul rînd spre următoarele obiective :

a) stabilirea cantității de informații necesare pentru fiecare categorie de date obținute în vederea optimizării structurilor ;

b) colectarea de date statistice (în limita cantității de informații necesare) asupra tuturor factorilor de bază care afectează siguranța structurilor (încărcări, caracteristici fizico-mecanice ale materialelor de construcție, caracteristici geometrice ale elementelor de construcție etc.) ;

c) automatizarea prelucrării datelor statistice colectate în vederea reprezentării lor în calculele probabilistice riguroase (treapta III) sub forma unor tipuri de distribuții și în calcule probabilistice simplificate (treapta II) sub forma unor caracteristici globale ale distribuțiilor statistice (valori medii, abateri medii pătratice, coeficienți de variație, cuantili etc.) ;

d) dezvoltarea și utilizarea tehnicilor existente de evaluare a siguranței structurilor pe cale probabilistică. Dat fiind faptul că în prezent evaluarea probabilistică a siguranței structurilor nu se poate face în mod riguros, aceste tehnici trebuie să se refere în special la treapta II (abordare probabilistică simplificată) și numai în anumite cazuri speciale (de exemplu, cazul unor construcții unicat de importanță deosebită) la trapta III (abordare probabilistică riguroasă). Dintre tehnicile de evaluare a siguranței cu mijloace probabilistice, tehnica de perspectivă pare în prezent tehnica de calcul automatizat a încercărilor statistice de tip Monte-Carlo ;

e) formularea unor criterii raționale de optimizare structurală pe cale probabilistică prin a căror aplicare, la fiecare situație analizată în parte, să se obțină structuri care să fie caracterizate printr-un nivel de asigurare cît mai apropiat de cel al soluției optime. Aceste criterii trebuie să considere simultan aspectele fizice datorate evaluării siguranței structurilor, aspectele sociale legate de reacția opiniei publice în cazul producerii unor avarieri ale structurilor, aspectele funcțional-economice legate de buna utilizare a structurilor, de costul calculelor de optimizare și de costul total probabil al structurilor, aspectele informaționale legate de precizia și certitudinea datelor de bază utilizate în calcule, precum și unele aspecte dinamice legate de faptul că gradul de asigurare al structurilor este un parametru al cărui optim este variabil în timp în funcție de evoluția nivelului de dezvoltare social-economică și tehnico-științifică.

BIBLIOGRAFIE

1. A. H-S. Ang, M. Amin, *Reliability of structures and structural systems*, J. Eng. Mech. Div, ASCE, Vol. 94. No. EM2, 1968.
2. A.H-S. Ang, C. A. Cornell, *Reliability bases of structural safety and design*, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 100, No. ST9, 1974.
3. M. Z. Cohn, S. R. Parimi, S. K. Ghosh, *On the uniqueness of plastic optimal design*, S. M. Div., Report No. 75, Univ. of Waterloo, 1971.
4. M. Z. Cohn, S. R. Parimi, *Multi-criteria probabilistic design of reinforced concrete structures*, S. M. Study, No. 8, Paper 19, University of Waterloo, 1972.
5. M. Z. Cohn, *Optimisation des structures en béton et optimisation en construction*, Séminaire sur les méthodes d'optimisation dans les constructions, Saint-Rémy-lès-Chevreuse, 1973.
6. C. A. Cornell, *Bounds on reliability of structural systems*, J. Struct. Div., ASCE, Vol. 93, No. ST *1* (1967).
7. R. L. Fox, *Optimization methods for engineering design*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1971.
8. D. Frangopol, *Statistical properties of the structural reliability in the elastic and elasto-plastic range*, Rev. roum. Sci. Tech. Méc. Appl., **19**, (1974).
9. — *Modele probabilistice de analiză a siguranței construcțiilor*, Rev. Construcții, *3*, (1975).
10. — *Structural systems reliability analysis*, Proc. 2nd Int. Conf. on Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, ICASP, Aachen, 1975.
11. — *Optimisation probabiliste des structures métalliques soumises a des forces axiales*, Chapitre 9, La Sécurité des Constructions, Editions Eyrolles, Paris, 1976.
12. — *Etude probabiliste de la sécurité des constructions*, Thése de Docteur en Sci. Appl., Univ. de Liège, 1976.
13. D. Frangopol, *Discrete-optimum probability solution of plastic structures*, Advances in Civil Engineering Through Engineering Mechanics, Session T4C: Structural Optimization, ASCE, New York, 1977.
14. D. Frangopol, J. Rondal, *Optimum probability-based design of plastic structures*, Engineering Optimisation, Vol. 3, Liverpool, 1977.
15. D. Frangopol, N. D. Hugn, *Calcul plastique probabiliste des structures en acier formées de barres*. Construction Métalique, *1*, Puteaux (1977).
16. D. Frangopol, *Rélation entre la sécurité d'une séction et la sécurité d'ensemble*, Annales des Travaux Publics de Belgique, *3*, (1977).
17. — *Considerații asupra dimensionării probabiliste optime a construcțiilor*, Rev. Construcții, *2* (1977).
18. — *Dimensionarea structurilor în domeniul plastic ca problemă de optimizare probabilistă*. Rev. Construcții, *3* (1977).
19. — *Determinarea pe baze probabilistice a relației dintre siguranța unei structuri și cea a elementelor care o alcătuiesc. — Structuri cu comportare în lanț*, Rev. Construcții, *3*, (1978).
20. D. Frangopol, N. D. Hung, J. Rondal, *Reliability analysis and optimum probability-based design of plastic structures*, Bull. Acad. Polonaise des Sciences, Série des sciences techniques, **XXVI**, *5*, (1978).
21. D. Frangopol, J. Rondal, *Le dimensionnement probabiliste optimal des structures*, Annales de l'ITBTP, Serie: Théories et Méthodes de Calcul, No. 363, Juillet-Aôut, 1978.
22. R. H. Gallagher, *Fully stressed design, Chapter 3 in Optimum Structural Design*, Theory and Applications (edited by R. H. GALLACHER and O. C. ZIENKIEWICZ), John Wiley and Sons, 1973.
23. R. A. Gellatly, D. M. Dupree, *Examples of computer-aided optimal design of structures*, 10 th Congress IABSE. Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976.
24. D. Georgescu, D. Frangopol, *Analiza siguranței structurilor metalice*, Vol. I, Inst. de Construcții București, 1978.
25. D. Ghiocel, D. Frangopol, *Evaluating the probability of a plastic collapse failure*, Part I and Part II, Bul. Șt. Inst. de Construcții, București, *3* și *4* (1973).
26. H. H. Hilton, M. Feigen, *Minimum weight analysis based on structural reliability*, J. Aero. Sci., **27**, *9* (1960).
27. N. C. Lind, A. G. Davenport, *Towards practical application of structural reliability theory*, Probabilistic Design of Reinforeed Concrete Buildings, ACI Publication SP-31, 1972.

28. C. MASSONNET, J. RONDAL, *Dimensionnement optimal des structures*, Université de Liège 1975.
29. S. T. MAU, *Optimum design of structures with a minimum expected cost criterion*, Cornell Univ., Depart. Civ. Eng., Report *340*, (1971).
30. F. MOSES, D. E. KINSER, *Optimum structural design with failure probability constraints*, AIAA J., *5*, (1967).
31. F. MOSES, *Approaches to structural reliability and optimization*, An Introduction to Structural Optimization (edited by M. Z. COHN), S. M. Study No. 1, Univ. of Waterloo Press, 1969.
32. F. MOSES, J. D. STEVENSON, *Reliability-based structural design*, J. Struct. Div., ASCE, **96**, ST *2* (1970).
33. F. MOSES, *Design for reliability-Concepts and Applications*, Chapter 13 in Optimum Structural Design, Theory and Applications (edited by R. H. GALLAGHER and O.C. ZIENKIEWICZ), John Wiley and Sons, 1973.
34. F. MOSES, *Reliability of structural systems*, J. Struct. Div., ASCE, *100*, ST *9* (1974).
35. F. MOSES, *System and geometrical optimization for linear and non-linear structural behaviour*, 10 th Congres IABSE, Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976, p. 61—75.
36. S. R. PARIMI, M. Z. COHN, *Optimal solutions in probabilistic structural deisgn*, Part II: Applications, Journal de Méc. Appl., **2**, *1* (1978).
37. W. PRAGER, *Optimality criteria in structural design*, AGARD, R-589, 1971.
38. E. ROSENBLUETH, E. MENDOZA, *Reliability optimization in isostatic structures*, J. Eng. Mech. Div., ASCE, **97**, EM *6* (1971).
39. E. ROSENBLUETH, L. ESTEVA, *Reliability basis for some mexican codes*, Probablistic Design of Reinforced Concrete Buildings, ACI Publication SP-31, 1972.
40. E. ROSENBLUETH, *Code specifications for safety and serviceability*, ASCE—IABSE Int. Conf. on Planning and Design of Tall Buildings, Tech. Committee 10, Lehigh Univ., 1972.
41. H. SANDI, *Perspective in evaluarea siguranței și asigurarea structurilor*, A V-a Conf. de Betoane, Vol. I, Timișoara, 1972
42. L. A. SCHMIT, *Structural design by systematic synthesis*, Proc. 2nd Conf. on Electronic Computation, ASCE, 1960
43. J. D. STEVENSON, *Reliability anylsis and optimum design of structural systems with applications to rigid frames*, S. M., Report *14*, Case Western Reserve Univ. (1967).
44. J. D. STEVENSON, F. MOSES, *Reliability analysis of frame structures*, J. Struct. Div., ASCE, **96**, ST *11*, (1970).
45. H. SWITZKY, *Minimum weight design with structural reliability*, Proc. AIAA/ASME 5th Struct. and Materials Conf., 1964.
46. A. B. TEMPLEMAN, *Optimization concepts and techniques in structural design*, 10 th Congress IABSE, Introd. Report, Tokyo, Sept. 1976.
47. E. H. VANMARCKE, J. DIAZ-PADILLA, D. A. ROTH, *Reliability-based optimum design of simple plastic frames*, MIT, Depart. Civil Eng., R 72—46, Massachusetts, 1972.
48. E. H. VANMARCKE, *Matrix formulation of reliability analysis and reliability-based design*, Computers and Structures, **3**, *4*, (1973).

PRETENSIONAREA TENDOANELOR REZERVOARELOR SFERICE. II

de ALECSANDRU PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se expune rezolvarea originală a problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice și deci a determinării caracteristicilor de pretensionare care să asigure conlucrarea spațială a sistemului de rezemare al rezervoarelor date. Rezolvarea respectivă privește cazurile specifice cînd se fac diferențieri din punctul de vedere al schemelor de solicitare a tendoanelor, studiindu-se detaliat și distinct sau combinat efectele solicitărilor de natură mecanică și termică.

În partea a doua (II) a lucrării se prezintă mai întîi rezolvarea problemei pretensionării tendoanelor rezervorului sferic în *cazul specific* de interes practic imediat în care se fac diferențieri din punctul de vedere al modurilor (schemelor) de solicitare a tendoanelor respective, neglijîndu-se solicitarea termică (respectiv, efectul termic $\sigma_T = 0$) și admițîndu-se deci că $\sigma_{max} = \pm \sigma_M$ (v. ipotezele 2 și 3 în fig. 2). În acest caz, pentru care, așadar, $y = \pm \sigma_{max} = \pm \sigma_M \neq 0$, *condițiile de pretensionare și de funcționare pretensionată sub sarcină* corespunzătoare tendoanelor rezervorului sferic sînt de forma cunoscută (3) și (4), rezultînd direct că :

$$\sigma_{PT1} = \frac{a_1 b_1}{2b_1 - 1}\,\sigma_c = \frac{1}{(2 - m_1)c_c}\,\sigma_c = k_{PT1}\,\sigma_c < 0{,}5\,\sigma_c, \tag{19}$$

$$\sigma_M = \frac{a_1(b_1 - 1)}{2b_1 - 1}\,\sigma_c = \frac{1 - m_1}{(2 - m_1)\,c_c}\,\sigma_c =$$

$$= (1 - m_1)\,k_{PT1}\,\sigma_c = k_M\,\sigma_c, \tag{20}$$

deci

$$k_{PT1} = \frac{a_1 b_1}{2b_1 - 1} = \frac{1}{(2 - m_1)c_c} < 0{,}5 < \frac{1}{2 - m_1}, \tag{21}$$

$$k_M = \frac{a_1(b_1 - 1)}{2b_1 - 1} = \frac{1 - m_1}{(2 - m_1)\,c_c} = (1 - m_1)k_{PT1} < \frac{1 - m_1}{2 - m_1}, \tag{22}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 5, 1979, P. 717 – 730

BIBLIOTECA INSTITUTULUI POLITEHNIC BRAȘOV FONDUL 1818

respectiv

$$C_{PT\,1} = 1 - m_1 = 1 - b_1^{-1} = \frac{k_M}{k_{PT\,1}} = \frac{\sigma_M}{\sigma_{PT\,1}} < 1, \tag{23}$$

$$\sigma_{PT\,1} = k_{PT\,1}\, k_M^{-1}\, \sigma_M = C_{PT\,1}^{-1}\, \sigma_M =$$

$$= \frac{\sigma_M}{1 - m_1} = \frac{b_1}{b_1 - 1}\, \sigma_M, \qquad [\mathrm{N/mm^2}], \tag{24}$$

$$F_{PT\,1} = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_{PT\,1} = 0{,}7854\, d^2\, k_{PT\,1}\, k_M^{-1}\, \sigma_M =$$

$$= 0{,}7854\, d^2\, C_{PT\,1}^{-1}\, \sigma_M = \frac{0{,}7854\, d^2}{1 - m_1}\, \sigma_M =$$

$$= \frac{0{,}7854\, b_1\, d^2}{b_1 - 1}\, \sigma_M, \qquad [\mathrm{N,\ kN}], \tag{25}$$

$$F_M = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_M = 0{,}7854\, d^2\, k_M\, k_{PT\,1}^{-1}\, \sigma_{PT\,1} =$$

$$= 0{,}7854\, d^2\, C_{PT\,1}\, \sigma_{PT\,1} = 0{,}7854\, (1 - m_1)\, d^2\, \sigma_{PT\,1} =$$

$$= \frac{0{,}7854\, (b_1 - 1)\, d^2}{b_1}\, \sigma_{PT\,1}, \qquad [\mathrm{N,\ kN}], \tag{26}$$

$$\varepsilon_{PT\,1} = 4{,}7619\, \sigma_{PT\,1} = 4{,}7619\, k_{PT\,1}\, k_M^{-1}\, \sigma_M =$$

$$= 4{,}7619\, C_{PT\,1}^{-1}\, \sigma_M = 4{,}7619\, (1 - m_1)^{-1}\, \sigma_M =$$

$$= \frac{4{,}7619\, b_1}{b_1 - 1}\, \sigma_M = \frac{10\, \sigma_{PT\,1}}{2{,}1}, \qquad [\mu\mathrm{m/m}], \tag{27}$$

în care

$$m_1 = 1 - \sigma_M\, \sigma_{PT\,1}^{-1} = b_1^{-1} \in (0,\, 0\,;\ 1,\, 0), \tag{28}$$

$$a_1 = (\sigma_{PT\,1} + \sigma_M)/\sigma_c = c_c^{-1} \in (0,\ 0\,;\, 1,\, 0). \tag{29}$$

În continuare, se prezintă rezolvarea problemei pretensionării tendoanelor rezervorului sferic în *cazul specific* de interes practic deocamdată limitat în care, de asemenea, se fac diferenţieri din punctul de vedere al modurilor (schemelor) de solicitare a tendoanelor respective, dar nu se mai neglijează solicitarea termică (respectiv, efectul termic $\sigma_T \neq 0$), admiţîndu-se deci că $\sigma_{\max} = \pm\sigma_M \mp \sigma_T$ (v. ipotezele 4 — 7 în fig. 2). În acest caz, pentru care, aşadar, $y = \pm\sigma_M \neq 0$ şi $z = \pm\,\sigma_T \neq 0$, *condiţiile glo-*

bale de pretensionare și de funcționare pretensionată sub sarcină corespunzătoare tendoanelor rezervorului sferic sînt următoarele :

$$x - y - z = \sigma_{PT\,2} - \sigma_M - \sigma_T > 0, \tag{30}$$

$$x + y + z = \sigma_{PT\,2} + \sigma_M + \sigma_T < K = \sigma_c, \tag{31}$$

ele putîndu-se formula de asemenea astfel :

$$\sigma_{PT\,2} - \sigma_M - \sigma_T = \sigma_{PT\,2} - \sigma_{MT} = \frac{1}{b_2}\,\sigma_{PT\,2} = m_2\,\sigma_{PT\,2}, \tag{32}$$

$$\sigma_{PT\,2} + \sigma_M + \sigma_T = \sigma_{PT\,2} + \sigma_{MT} = a_2\,\sigma_c = \frac{\sigma_c}{c_c}, \tag{33}$$

în care

$$\sigma_{MT} = \sigma_M + \sigma_T, \tag{34}$$

$$m_2 = 1 - (\sigma_M + \sigma_T)\,\sigma_{PT\,2}^{-1} = 1 - \sigma_{MT}\,\sigma_{PT\,2}^{-1} = b_2^{-1} \in (0,0\,;1,0), \tag{35}$$

$$a_2 = (\sigma_{PT\,2} + \sigma_M + \sigma_T)\,\sigma_c^{-1} = (\sigma_{PT\,2} + \sigma_{MT})\,\sigma_c^{-1} = c_c^{-1} \in (0,0\,;1,0). \tag{36}$$

Rezolvînd sistemul celor două ecuații (32) și (33) cu două necunoscute ($\sigma_{PT\,2}$ și $\sigma_{MT} = \sigma_M + \sigma_T$), se obțin următoarele expresii de calcul :

$$\sigma_{PT\,2} = \frac{a_2 b_2}{2b_2 - 1}\,\sigma_c = \frac{1}{(2 - m_2)\,c_c}\,\sigma_c = k_{PT\,2}\,\sigma_c < 0{,}5\,\sigma_c, \tag{37}$$

$$\sigma_{MT} = \sigma_M + \sigma_T = \frac{a_2(b_2 - 1)}{2b_2 - 1}\,\sigma_c = \frac{1 - m_2}{(2 - m_2)\,c_c}\,\sigma_c =$$

$$= (1 - m_2)\,k_{PT\,2}\,\sigma_c = k_{MT}\,\sigma_c < \frac{b_2 - 1}{2b_2 - 1}\,\sigma_c = \frac{1 - m_2}{2 - m_2}\,\sigma_c, \tag{38}$$

în care, deci

$$k_{PT\,2} = \frac{a_2 b_2}{2b_2 - 1} = \frac{1}{(2 - m_2)\,c_c} < 0{,}5 < \frac{1}{2 - m_2}, \tag{39}$$

$$k_{MT} = \frac{a_2(b_2 - 1)}{2b_2 - 1} = \frac{1 - m_2}{(2 - m_2)\,c_c} = (1 - m_2)\,k_{PT\,2} < \frac{1 - m_2}{2 - m_2}, \tag{40}$$

unde

$$\mathcal{O}_{PT\,2} = 1 - m_2 = 1 - b_2^{-1} = \frac{k_{MT}}{k_{PT\,2}} = \frac{\sigma_{MT}}{\sigma_{PT\,2}} < 1. \tag{41}$$

Comparînd prin raportare expresiile (37) și (38), concomitent cu considerarea expresiei (41), se obțin următoarele *formule finale* simple pentru calculul :

— efortului unitar de pretensionare :

$$\sigma_{PT\,2} = k_{PT\,2}\, k_{MT}^{-1}\, \sigma_{MT} = C_{PT\,2}^{-1}\, \sigma_{MT} =$$

$$= \frac{\sigma_{MT}}{1 - m_2} = \frac{b_2}{b_2 - 1}\, \sigma_{MT}, \qquad [\mathrm{N/mm^2}], \qquad (42)$$

— forței de pretensionare :

$$F_{PT\,2} = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_{PT\,2} = 0{,}7854\, d^2\, k_{PT\,2}\, k_{MT}^{-1}\, \sigma_{MT} =$$

$$= 0{,}7854\, d^2\, C_{PT\,2}^{-1}\, \sigma_{MT} = \frac{0{,}7854\, d^2}{1 - m_2}\, \sigma_{MT} =$$

$$= \frac{0{,}7854\, b_2\, d^2}{b_2 - 1}\, \sigma_{MT}, \qquad [\mathrm{N, kN}], \qquad (43)$$

— forței maxime din tija tendoanelor :

$$F_{MT} = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_{MT} = 0{,}7854\, d^2\, k_{MT}\, k_{PT\,2}^{-1}\, \sigma_{PT\,2} =$$

$$= 0{,}7854\, d^2\, C_{PT\,2}\, \sigma_{PT\,2} = 0{,}7854\, d^2\, (1 - m_2)\, \sigma_{PT\,2} =$$

$$= \frac{0{,}7854\, d^2\, (b_2 - 1)}{b_2}\, \sigma_{PT\,2}, \qquad [\mathrm{N, kN}], \qquad (44)$$

— deformației specifice de pretensionare :

$$\varepsilon_{PT\,2} = 4{,}7619\, \sigma_{PT\,2} = 4{,}7619\, (1 - m_2)^{-1}\, \sigma_{MT} =$$

$$= \frac{4{,}7619\, b_2}{b_2 - 1}\, \sigma_{MT} = \frac{10\, \sigma_{PT\,2}}{2{,}1}, \qquad [\mu\mathrm{m/m}]. \qquad (45)$$

Dacă se consideră expresia clasică de calcul, conform căreia

$$\sigma_T = E\varepsilon_T = E\alpha\Delta t_{FPT2}, \qquad (46)$$

atunci, în baza egalității (32), se obține

$$\sigma_{PT\,2} = \frac{1}{1 - m_2}\, (E\alpha\Delta t_{FPT\,2} + \sigma_M) =$$

$$= \frac{b_2}{b_2 - 1}\, (E\alpha\Delta t_{FPT\,2} + \sigma_M), \qquad (47)$$

rezultînd următoarea valoare $\Delta t_{FPT\,2} > 0$, pentru care *pretensionarea tendoanelor rămîne eficientă*:

$$\Delta t_{FPT\,2} < \frac{1}{E\alpha}\left[\frac{1-m_2}{(2-m_2)\,c_c}\,\sigma_c - \sigma_M\right] = \tag{48}$$

$$= \frac{1}{E\alpha}\left[(1-m_2)\,k_{PT\,2}\,\sigma_c - \sigma_M\right],$$

respectiv, următoarea valoare σ_M pentru care *aceeași pretensionare își menține eficiența*:

$$\sigma_M < \frac{1-m_2}{(2-m_2)\,c_c}\,\sigma_c - E\alpha\Delta t_{FPT\,2} =$$

$$= (1-m_2)\,k_{PT2}\,\sigma_c - E\alpha\Delta t_{FPT\,2}. \tag{49}$$

Pentru *cazul particular*, cînd $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm², $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360$ N/mm², $\Delta t_{FPT\,2} = 40°C$, $m_2 = 0{,}10$ și $c_c = 1{,}50$, se obține

$$\sigma_M < \frac{1-0{,}10}{(2-0{,}10)\cdot 1{,}50}\cdot 360 - 2{,}1\cdot 10^5 \cdot 13\cdot 10^{-6}\cdot 40 = 4{,}48 \text{ N/mm}^2,$$

deci

$$\frac{\sigma_M}{\sigma_c} < \frac{4{,}48}{360} = 0{,}0124 \rightarrow 1{,}24\,\%.$$

Pentru *cazul, de asemenea particular*, cînd $\sigma_M = 92{,}07$ N/mm², $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm², $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360$ N/mm², $m_2 = 0{,}10$ și $c_c = 1{,}50$, se obține

$$\Delta t_{FPT\,2} < \frac{1}{2{,}1\cdot 10^5 \cdot 13\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}1)\cdot 1{,}50}\cdot 360 - 92{,}07\right] = 7{,}92 \text{ grd},$$

pentru $c_c = 1{,}25$ rezultînd

$$\Delta t_{FPT\,2} < \frac{1}{2{,}1\cdot 10^5 \cdot 13\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}1)\cdot 1{,}25}\cdot 360 - 92{,}07\right] = 16{,}25 \text{ grd},$$

iar pentru $c_c = 1{,}00$ corespunzînd

$$\Delta t_{FPT\,2} < \frac{1}{2{,}1\cdot 10^5 \cdot 13\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}1)\cdot 1{,}00}\cdot 360 - 92{,}07\right] = 28{,}74 \text{ grd},$$

Reluînd expresia clasică de calcul (46), în baza următoarei condiții de solicitare (v. ipoteza 4b în fig. 2):

$$x + y + z = \sigma_{PT\,2} + \sigma_M + \sigma_T > 0, \tag{50}$$

respectiv

$$\sigma_{PT\,2} + \sigma_M + \sigma_T = \frac{1}{b_2}\,\sigma_{PT\,2} = m_2\,\sigma_{PT\,2}, \tag{51}$$

se obține

$$\sigma_{PT\,2} = -\frac{1}{1-m_2}(E\alpha\Delta t_{FPT\,2} + \sigma_M) =$$

$$= -\frac{b_2}{b_2-1}(E\alpha\Delta t_{FPT\,2} + \sigma_M), \tag{52}$$

$$\Delta t_{FPT\,2} < -\frac{1}{E\alpha}\left[\frac{1-m_2}{(2-m_2)\,c_c}\,\sigma_c + \sigma_M\right] =$$

$$= -\frac{1}{E\alpha}\left[(1-m_2)\,k_{PT\,2}\,\sigma_c + \sigma_M\right] < 0, \tag{53}$$

$$\sigma_M < -\left[\frac{1-m_2}{(2-m_2)\,c_c}\,\sigma_c + E\alpha\,\Delta t_{FPT\,2}\right] =$$

$$= -\left[(1-m_2)\,k_{PT\,2}\,\sigma_c + E\alpha\,\Delta t_{FPT\,2}\right]. \tag{54}$$

Pentru *cazul particular*, cînd $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm², $\alpha = 13.10^{-6}$ grd^{-1}, $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p0,2} = 360$ N/mm², $\Delta t_{FPT\,2} = 20°C$, $m_2 = 0{,}10$ și $c_c = 1{,}50$, se obține

$$\sigma_M < -\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}10)\cdot 1{,}50}\cdot 360 + 2{,}1\cdot 10^5\cdot 13\cdot 10^{-6}\cdot 20\right] = -168{,}28\text{N/mm}^2.$$

Pentru *cazul, de asemenea particular*, cînd $\sigma_M = 92{,}07$ N/mm², $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm², $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}, $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360$ N/mm², $m_2 = 0{,}10$ și $c_c = 1{,}50$, se obține

$$\Delta t_{FPT\,2} < -\frac{1}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 13\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}10)\cdot 1{,}50}\cdot 360 + 92{,}07\right] = -75{,}37°C,$$

pentru $c_c = 1{,}25$ rezultînd

$$\Delta t_{FPT\,2} < -\frac{1}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 13\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}10)\cdot 1{,}25}\cdot 360 + 92{,}07\right] = -83{,}70°C,$$

iar pentru $c_c = 1{,}00$ corespunzînd

$$\Delta t_{FPT\,2} < -\frac{1}{2{,}1\cdot 10^5\cdot 13.\cdot 10^{-6}}\cdot\left[\frac{1-0{,}10}{(2-0{,}10)\cdot 1{,}00}\cdot 360 + 92{,}07\right] = 96{,}19°C.$$

Așadar, în condiții de solicitare, tendoanele pretensionate ale rezervoarelor sferice se comportă mai favorabil în domeniul temperaturilor $t_F < t_{PT}$.

Observație importantă. Efectul termic corespunzător variațiilor de temperatură ale mediului înconjurător este nul atunci cînd, la un moment dat, se asigură același cîmp de temperatură $t_F \neq t_{PT}$ pentru toate dispozitivele (manta, picioare, tendoane etc.) sistemului de rezemare discretă al rezervoarelor sferice.

Aplicații numerice. 1. Pentru un rezervor sferic de 1 000 m³, cu 10 picioare tubulare și deci cu 10 perechi de tendoane, se cunosc următoarele date : $d = 44$ mm ; $\sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2} = 360$ N/mm² ; $c_c = 1{,}50$; $F_{max} = F_M = 140\,000$ N $= 140$ kN (corespunzător condițiilor de exploatare). Se cere : a) să se determine *caracteristicile pretensionării* tendoanelor rezervorului sferic respectiv în situațiile *fără efect termic*, pentru care a.1) $m = m_1 = 0{,}10$; a.2) $m = m_1 = 0{,}50$ și a.3) $m = m_1 = 0{,}90$; b) să se determine *caracteristicile funcționale* ale tendoanelor rezervorului respectiv în alternativa pretensionării acestora cu forța : b.1) $F_{PT} = F_{PT\,1} = 150\,000$ N $= 150$ kN ; b.2) $F_{PT} = F_{PT\,1} = 100\,000$ N $= 100$kN și b.3) $F_{PT} = F_{PT\,1} = 10\,000$ N $= 10$ kN.

Rezolvare

a) Efortul unitar maxim $\sigma_{max} = \sigma_M$ are următoarea valoare (v. formulele 17 și 26) :

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{0{,}7854\,d^2} = \sigma_M = \frac{F_M}{0{,}7854\,d^2} = \frac{140\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 92{,}07 \text{ N/mm}^2,$$

pentru care — în alternativa *rezolvării grafice* — rezultă (v. fig. 8) :

a.1) $\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = 100$ N/mm² $< 0{,}5\,\sigma_c = 0{,}5 \cdot 360 = 180$ N/mm² ;

$\varepsilon_{PT} = \varepsilon_{PT\,1} = 480$ μm/m,

$F_{PT} = F_{PT\,1} = 155$ kN,

a. 2) $\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = 183$ N/mm² $> 0{,}5\,\sigma_c = 180$ N/mm²,

a. 3) $\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} \geqslant \sigma_c = 360$ N/mm²,

ultimele două situații, a.2) și a.3), neputînd fi luate în considerație fără riscuri pentru activitatea practică.

În alternativa *rezolvării analitice* se obține (v. formulele 11, 12, 13, 18 și 16, respectiv 21, 22, 23, 27 și 25) :

a. 1) $$k_{PT} = k_{PT\,1} = \frac{1}{(2 - m)c_c} = \frac{1}{(2 - 0{,}10) \cdot 1{,}50} = 0{,}351,$$

$$k_{max} = k_M = (1 - m)\,k_{PT} = (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}351 = 0{,}316,$$

$$C_{PT} = C_{PT\,1} = \frac{k_{max}}{k_{PT}} = \frac{0{,}316}{0{,}351} = 0{,}900 \rightarrow 90\,\%,$$

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = \frac{\sigma_{max}}{C_{PT}} = \frac{92{,}07}{0{,}900} = 102{,}3 \text{N/mm}^2 < 0{,}5\,\sigma_c = 180 \text{N/mm}^2,$$

$$\varepsilon_{PT} = \varepsilon_{PT\,1} = \frac{10\,\sigma_{PT}}{2{,}1} = \frac{10 \cdot 102{,}3}{2{,}1} = 487{,}16 \text{ μm/m},$$

$$F_{PT} = F_{PT\,1} = 0{,}7854\,d^2\,\sigma_{PT} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 102{,}3 = 155\,551 \text{ N} = 155{,}551 \text{ kN};$$

se remarcă că efortul unitar maxim *disponibil* este (v. formulele 10 și 20)

$$\sigma_{max} = \sigma_M = k_{max}\,\sigma_c = 0{,}316 \cdot 360 = 113{,}68 \text{ N/mm}^2 > 92{,}07 \text{ N/mm}^2,$$

a.2) $$k_{PT} = k_{PT\,1} = \frac{1}{(2 - 0{,}5) \cdot 1{,}50} = 0{,}444,$$

$$k_{max} = k_M = (1 - 0{,}50) \cdot 0{,}444 = 0{,}222,$$

$$C_{PT} = C_{PT\,1} = \frac{0{,}222}{0{,}444} = 0{,}500 \rightarrow 50\,\% ;$$

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = \frac{92{,}07}{0{,}500} = 184{,}14 \text{ N/mm}^2 > 0{,}5\,\sigma_c = 180 \text{ N/mm}^2;$$

de remarcat că, în această situație, efortul unitar maxim *disponibil* este

$$\sigma_{max} = \sigma_M = k_{max}\,\sigma_c = 0{,}222 \cdot 360 = 80{,}00\ \text{N/mm}^2 < 92{,}07\ \text{N/mm}^2,$$

pretensionarea tendoanelor în condițiile date (cu $m = m_1 = 0{,}50$) fiind *nerațională și contraindicată*, impunîndu-se deci modificarea și corectarea corespunzătoare a condițiilor inițiale respective :

a. 3) $$k_{PT} = k_{PT1} = \frac{1}{(2 - 0{,}90) \cdot 1{,}50} = 0{,}606,$$

$$k_{max} = k_M = (1 - 0{,}90) \cdot 0{,}606 = 0{,}0606,$$

$$C_{PT} = C_{PT1} = \frac{0{,}0606}{0{,}606} = 0{,}100,$$

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT1} = \frac{92{,}07}{0{,}100} = 920{,}7\ \text{N/mm}^2 >> \sigma_c = 360\ \text{N/mm}^2;$$

de remarcat că, de această dată, efortul unitar maxim *disponibil* este

$$\sigma_{max} = \sigma_M = k_{max}\,\sigma_c = 0{,}0606 \cdot 360 = 21{,}82\ \text{N/mm}^2 << 92{,}07\ \text{N/mm}^2,$$

pretensionarea endoanelor în condițiile date (cu $m = m_1 = 0{,}90$) fiind de-a dreptul periculoasă pentru activitatea practică.

S-au regăsit, astfel, rezultatele anterioare, corespunzătoare rezolvării grafice, micile diferențe valorice datorîndu-se impreciziei — de altfel inerente — citirilor care s-au făcut în nomograma din figura 8.

b) În această alternativă rezultă, de asemenea, că (v. formulele 17 și 26)

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{0{,}7854\ d^2} = \frac{140\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 92{,}07\ \text{N/mm}^2,$$

respectiv (v. formulele 16 și 25).

b.1) $$\sigma_{PT} = \sigma_{PT1} = \frac{F_{PT}}{0{,}7854\ d^2} = \frac{F_{PT1}}{0{,}7854\ d^2} = \frac{150\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 98{,}65\ \text{N/mm}^2,$$

deci (v. formulele 7 și 28)

$$m = m_1 = \frac{\sigma_{PT} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT}} = \frac{\sigma_{PT1} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT1}} = 1 - \frac{92{,}07}{98{,}65} = 0{,}067 > 0{,}000,$$

pentru care se obține (v. formulele 11,12, 14 și 21,22)

$$k_{PT} = k_{PT1} = \frac{1}{(2 - m)\,c_c} = \frac{1}{(2 - m_1)c_c} = \frac{1}{(2 - 0{,}067).1{,}50} =$$

$$= 0{,}345 < 0{,}500 < \frac{1}{2 - m} = \frac{1}{2 - m_1} = \frac{1}{2 - 0{,}067} = 0{,}517,$$

$$k_{max} = k_M = \frac{1 - m}{(2 - m)\,c_c} = \frac{1 - m_1}{(2 - m_1)\,c_c} = (1 - m)\,k_{PT} = (1 - m_1)\,k_{PT1} =$$

$$= \frac{1 - 0{,}067}{(2 - 0{,}067) \cdot 1{,}50} = 0{,}322 < \frac{1-m}{2-m} = \frac{1-m_1}{2-m_1} = \frac{1 - 0{,}067}{2 - 0{,}067} = 0{,}483;$$

de remarcat că, în acest caz, efortul unitar maxim *disponibil* este (v. formulele 10 și 20)

$$\sigma_{max} = \sigma_M = k_{max}\,\sigma_c = k_M\,\sigma_c = 0{,}322 \cdot 360 = 115{,}92 \text{ N/mm}^2 > 92{,}07 \text{ N/mm}^2,$$

pretensionarea tendoanelor fiind *rațională* în condițiile date, pentru care corespunde următoarea deformație specifică de pretensionare (v. formulele 18 și 27) :

$$\varepsilon_{PT} = \varepsilon_{PT\,1} = \frac{10\sigma_{PT}}{2{,}1} = \frac{10\sigma_{PT\,1}}{2{,}1} = \frac{10 \cdot 98{,}65}{2{,}1} = 469{,}76 \text{ } \mu\text{m/m}.$$

b. 2) $$\sigma_{PT} = \sigma_{PT,1}' = \frac{F_{PT}}{0{,}7854\,d^2} = \frac{F_{PT\,1}}{0{,}7854 \cdot d^2} = \frac{100\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 65{,}77 \text{ N/mm}^2,$$

deci

$$m = m_1 = \frac{\sigma_{PT} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT}} = \frac{\sigma_{PT\,1} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT\,1}} = 1 - \frac{92{,}07}{65.77} = -0{,}400 < 0{,}000,$$

ceea ce înseamnă că, în condițiile de solicitare date, tendoanele în discuție, inițial pretensionate cu forța $F_{PT} = F_{PT\,1} = 100\,000$ N, *își pierd pretensionarea* indiferent de valoarea coeficientului de siguranță $c_c > 1{,}00$, impunîndu-se deci reconsiderarea corespunzătoare a condițiilor inițiale respective.

b. 3) $$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = \frac{F_{PT}}{0{,}7854\,d^2} = \frac{F_{PT\,1}}{0{,}7854\,d^2} = \frac{10\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 6{,}577 \text{ N/mm}^2,$$

deci

$$m = m_1 = \frac{\sigma_{PT} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT}} = \frac{\sigma_{PT\,1} - \sigma_{max}}{\sigma_{PT\,1}} = 1 - \frac{92{,}07}{6{,}577} = -13{,}000 << 0{,}000,$$

concluzia formulată la punctul b. 2) menținîndu-și valabilitatea și în acest caz :

Condiția ca tendoanele în discuție — v. punctele b.2) și b. 3) — *să rămînă pretensionate*, în condițiile de exploatare date (pentru care $\sigma_{max} = \sigma_M = 92{,}07$ N/mm²), este următoarea (v. situația particulară *e*) din partea întîi a lucrării) :

$$\frac{1}{2c_c} < k_{PT} = \frac{1}{(2 - m)c_c} = k_{PT\,1} = \frac{1}{(2 - m_1)c_c} < 0{,}500,$$

rezultînd deci

$$k_{PT} = k_{PT\,1} > \frac{1}{2 \cdot 1{,}50} = 0{,}333,$$

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} > k_{PT}\,\sigma_c = 0{,}333 \cdot 360 = 120 \text{ N/mm}^2,$$

respectiv

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} \in (120\,;\,180) \text{ N/mm}^2.$$

Admițîndu-se $\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = 125$ N/mm², se obține

$$m = m_1 = 1 - \frac{92{,}07}{125{,}00} = 0{,}263 > 0{,}000,$$

pentru care

$$k_{PT} = k_{PT\,1} = \frac{1}{(2 - 0{,}263) \cdot 1{,}50} = 0{,}384 > 0{,}333,$$

$$k_{\max} = k_M = (1 - 0{,}263) \cdot 0{,}384 = 0{,}283,$$

$$C_{PT} = C_{PT\,1} = \frac{0{,}283}{0{,}384} = 0{,}737 \rightarrow 73{,}7\,\%,$$

$$F_{PT} = F_{PT\,1} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 125 = 190\,067 \text{ N} = 190{,}067 \text{ kN},$$

$$\varepsilon_{PT} = \varepsilon_{PT\,1} = \frac{10 \cdot 125}{2{,}1} = 595{,}24 \ \mu\text{m/m},$$

în acest caz, eforturile unitare *maxim disponibile* fiind următoarele :

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = k_{PT}\,\sigma_c = k_{PT\,1}\,\sigma_c = 0{,}384 \cdot 360 = 138{,}17 \text{ N/mm}^2 > 125{,}00 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_M = k_{\max}\,\sigma_c = k_M\,\sigma_c = 0{,}283 \cdot 360 = 101{,}83 \text{ N/mm}^2 > 92{,}07 \text{ N/mm}^2.$$

Pretensionarea tendoanelor în alternativa b.3) este și rămîne eficientă numai dacă se îndeplinește condiția

$$\sigma_{\max} = \sigma_M < \sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = 6{,}577 \text{ N/mm}^2,$$

respectiv

$$F_{\max} = F_M < F_{PT} = F_{PT\,1} = 10\,000 \text{ N} = 10 \text{ kN}.$$

2. Să se determine *caracteristicile pretensionării* tendoanelor rezervorului sferic din aplicația numerică precedentă în situația cînd $F_{\max} = F_M = 190\,000$ N $= 190$ kN (corespunzător condițiilor de încercare de presiune hidraulică la rece) și a) $c_c = 1{,}50$ și $m = m_1 = 0{,}10$, respectiv, b) $c_c = 1{,}25$ și $m = m_1 = 0{,}05$.

Rezolvare

a) În această situație se obține :

$$k_{PT} = k_{PT\,1} = \frac{1}{(2 - m)c_c} = \frac{1}{(2 - 0{,}10) \cdot 1{,}50} = 0{,}351,$$

$$k_{\max} = k_M = (1 - m)\,k_{PT} = (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}351 = 0{,}316,$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_M = \frac{F_{\max}}{0{,}7854\ d^2} = \frac{190\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 124{,}96 \text{ N/mm}^2 >$$

$$> k_{\max}\,\sigma_c = 0{,}316 \cdot 360 = 113{,}68 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = \frac{\sigma_{\max}}{1 - m} = \frac{124{,}96}{1 - 0{,}10} = 138{,}84 \text{ N/mm}^2 > k_{PT}\,\sigma_c =$$

$$= 0{,}351 \cdot 360 = 126{,}32 \text{ N/mm}^2,$$

tendoanele — inițial pretensionate — *pierzîndu-și pretensionarea* în condițiile încercării de presiune hidraulică la rece.

b) În această situație se obține :

$$k_{PT} = k_{PT\,1} = \frac{1}{(2 - m)c_c} = \frac{1}{(2 - 0{,}05) \cdot 1{,}25} = 0{,}410,$$

$$k_{max} = k_M = (1 - m)\, k_{PT} = (1 - 0{,}05) \cdot 0{,}410 = 0{,}390,$$

$$\sigma_{max} = \sigma_M = \frac{F_{max}}{0{,}7854 \cdot d^2} = \frac{190\,000}{0{,}7854 \cdot 44^2} = 124{,}96 \text{ N/mm}^2 <$$

$$< k_{max}\, \sigma_c = 0{,}390 \cdot 360 = 140{,}40 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{PT} = \sigma_{PT\,1} = \frac{\sigma_{max}}{1 - m} = \frac{124{,}96}{1 - 0{,}05} = 131{,}54 \text{ N/mm}^2 < k_{PT}\, \sigma_c =$$

$$= 0{,}410 \cdot 360 = 147{,}60,$$

$$C_{PT} = C_{PT\,1} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{PT}} = \frac{124{,}96}{131{,}54} = 0{,}950 \rightarrow 95\,\%,$$

$$F_{PT} = F_{PT\,1} = 0{,}7854\, d^2\, \sigma_{PT} = 0{,}7854 \cdot 44^2,\ 131\ 54 = 200\ 011 \text{ N} = 200{,}011 \text{ kN},$$

$$\varepsilon_{PT} = \varepsilon_{PT\,1} = \frac{10\, \sigma_{PT}}{2{,}1} = \frac{10 \cdot 131{,}54}{2{,}1} = 626{,}38\ \mu\text{m/m},$$

aceleași tendoane — inițial pretensionate — *menținîndu-se pretensionate* și în condițiile încercării de presiune hidraulică la rece.

3. Să se determine *caracteristicile de exploatare disponibile* ale tendoanelor rezervorului sferic din prima aplicație numerică în situația corespunzătoare pretensionării acestora pentru un coeficient al condițiilor de lucru $m = m_1 = 0{,}10$.

Rezolvare

În situația indicată prin enunț se obține (v. formulele 10,17, 20 și 26) :

$$\sigma_{max} = \sigma_M \leqslant (1 - m)\, \sigma_{PT} = (1 - m_1)\, \sigma_{PT\,1} = (1 - m)\, k_{PT}\, \sigma_c =$$

$$= (1 - m_1)\, k_{PT\,1}\, \sigma_c = (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}351 \cdot 360 = 113{,}72 \text{ N/mm}^2,$$

$$F_{max} = F_M \leqslant 0{,}7854\, d^2\, k_{max}\, k_{PT}^{-1}\, \sigma_{PT} = 0{,}7854\, d^2\, k_M\, k_{PT}^{-1}\, \sigma_{PT\,1} =$$

$$= 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}351^{-1} \cdot (0{,}351 \cdot 360) = 172\ 976 \text{ N} = 172{,}976 \text{ kN},$$

$$F_{PT} = F_{PT\,1} = \frac{F_{max}}{C_{PT}} = \frac{F_M}{C_{PT\,1}} = \frac{172\ 976}{0{,}900} = 192\ 196 \text{ N} = 192{,}196 \text{ kN}.$$

4. Să se determine *caracteristicile de exploatare disponibile* ale tendoanelor rezervorului sferic din prima aplicație numerică în situația corespunzătoare pretensionării acestora pentru $m_2 = 0{,}10$, dacă se consideră efectul termic pentru $\Delta t_{PT\,2} = 5$ grd. știind că $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2 și $\alpha = 13 \cdot 10^{-6}$ grd^{-1}.

Rezolvare

În situația precizată rezultă (v. formulele 38—41, 43—45 și 47) :

$$k_{PT\,2} = \frac{1}{(2 - m_2)\, c_c} = \frac{1}{(2 - 0{,}10) \cdot 1{,}50} = 0{,}351 < 0{,}500 < \frac{1}{2 - m_2} =$$

$$= \frac{1}{2 - 0{,}10} = 0{,}526,$$

$$k_{MT} = \frac{1 - m_2}{(2 - m_2)\, c_c} = \frac{1 - 0{,}10}{(2 - 0{,}10) \cdot 1{,}50} = 0{,}316 < \frac{1 - m_2}{2 - m_2} = \frac{1 - 0{,}10}{2 - 0{,}10} = 0{,}474,$$

$$\sigma_{PT\,2} = \frac{1}{1 - m_2} (E \alpha\, \Delta t_{FPT\,2} + \sigma_M) =$$

$$= \frac{1}{1 - 0{,}10} \cdot (2{,}1 \cdot 10^5 \cdot 13 \cdot 10^{-6} \cdot 5 + 92{,}07) = 117{,}47 \text{ N/mm}^2 <$$

$$< k_{PT\,2}\, \sigma_c = 0{,}351 \cdot 360 = 126{,}32 \text{ N/mm}^2 <$$

$$< 0{,}5\, \sigma_c = 0{,}5 \cdot 360 = 180{,}00 \text{ N/mm}^2,$$

$$\varepsilon_{PT\,2} = \frac{10\, \sigma_{PT\,2}}{2{,}1} = \frac{10 \cdot 117{,}47}{2{,}1} = 559{,}37\ \mu\text{m/m} <$$

$$< \frac{10\, k_{PT\,2}\, \sigma_c}{2{,}1} = \frac{10 \cdot 0{,}351 \cdot 360}{2{,}1} = 601{,}71\ \mu\text{m/m},$$

$$F_{PT\,2} = 0{,}7854\ d^2\, \sigma_{PT\,2} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 117{,}47 = 178\ 617 \text{ N} =$$

$$= 178{,}617 \text{ kN} < 0{,}7854\ d^2\, k_{PT\,2}\, \sigma_c = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 0{,}351 \cdot 360 =$$

$$= 192\ 135 \text{ N} = 192{,}135 \text{ kN},$$

$$\sigma_{MT} < (1 - m_2)\sigma_{PT2} = (1 - 0{,}10) \cdot 117{,}47 = 105{,}72 \text{ N/mm}^2 <$$

$$< (1 - m_2) k_{PT\,2}\, \sigma_c = (1 - 0{,}10) \cdot 0{,}351 \cdot 360 = 113{,}72 \text{ N/mm}^2;$$

$$F_{MT} < 0{,}7854\ d^2\, \sigma_{MT} = 0{,}7854 \cdot 44^2 \cdot 105{,}72 = 160\ 751 \text{ N} =$$

$$= 160{,}751 \text{ kN} < F_{PT_2} = 178{,}617 \text{ kN};$$

$$C_{PT\,2} = \frac{F_{MT}}{F_{PT\,2}} = \frac{\sigma_{MT}}{\sigma_{PT\,2}} = \frac{k_{MT}}{k_{PT\,2}} = \frac{160\ 751}{178\ 617} = 0{,}900 \rightarrow 90\ \%.$$

Primită la redacție la 15 noiembrie 1978

NOTAȚII

σ_M reprezintă efortul unitar normal (axial) rezultant maxim din tija tendonului, corespunzător solicitării *mecanice* (indice M) — cu efect preponderent de întindere sau de compresiune — a acesteia, în N/mm²;

σ_T — efortul unitar normal (axial) rezultant maxim din tija tendonului, corespunzător solicitării *termice* (indice T) — cu efect preponderent de tracțiune sau de relaxare — a acesteia, în N/mm²;

σ_{max} — efortul unitar normal (axial) rezultant maxim din tija tendonului, corespunzător cazului general al condițiilor de solicitare (la întindere sau la compresiune) concordante cu cele de exploatare, în N/mm²;

σ_{PT}, $\sigma_{PT\,1}$, $\sigma_{PT\,2}$ — eforturile unitare normale (axiale) corespunzătoare solicitării *mecanice* — cu efect preponderent de întindere — a tijei tendonului în condițiile pretensionării (indice PT) acestuia, în N/mm²;

σ_{MT} — efortul unitar normal (axial) rezultant maxim din tija tendonului, corespunzător cazului special cînd se consideră concomitent solicitarea mecanică și efectul termic ($\sigma_{MT} = \sigma_M + \sigma_T$), în N/mm²;

x, y, z — notațiile generalizate pentru eforturile unitare de tip σ, respectiv $x = \sigma_{PT}$, $y = \sigma_M$ sau $y = \sigma_{max}$ și $z = \sigma_T$, în N/mm²;

semnul (+) — corespunde solicitării de întindere ($\sigma > 0$);

semnul(—) — corespunde solicitării de compresiune ($\sigma < 0$);

indicele 1 — corespunde situației cînd efectul termic se neglijează sau este nul ($\sigma_T = 0$);

indicele 2 — corespunde situației cînd efectul termic se ia în considerație ($\sigma_T \neq 0$);

$\sigma_c = \sigma_{0.2} = R_{p\,0.2}$ — limita tehnică de curgere a materialului de bază al (tijei) tendonului la temperatura de calcul corespunzătoare, în N/mm²;

$E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm² — modulul de elasticitate longitudinal al materialului de bază al (tijei) tendonului, în N/mm²;

α — dilativitatea liniară a materialului de bază al (tijei) tendonului, în grd^{-1};

K — o mărime constantă, caracteristică mecanică de tip σ a materialului de bază al (tijei) tendoanelor, în N/mm²; în cazul pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice, evident, $K = \sigma_c = \sigma_{0,2} = R_{p\,0,2}$;

c_c — coeficientul global de siguranță față de limita tehnică de curgere a materialului de bază al (tijei) tendoanelor;

m, m_1, m_2 — coeficienții condițiilor de lucru;

a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 — coeficienți numerici;

k_{PT}, $k_{PT\,1}$, $k_{PT\,2}$ — coeficienții pretensionării;

k_M — coeficientul solicitării mecanice (fără efect termic) a tendoanelor pretensionate;

k_{MT} — coeficientul solicitării mecanice, cu efect termic, a tendoanelor pretensionate;

k_{max} — coeficientul solicitării (în general a) tendoanelor pretensionate;

C_{FT}, $C_{FT\,1}$, $C_{FT\,2}$ — constantele pretensionării;

d — diametrul (minim) de calcul al tendonului, în mm;

F_M — forța (axială) maximă din tija tendonului, corespunzătoare cazului specific al condițiilor de solicitare mecanică (la întindere sau la compresiune) concordante cu cele de exploatare, în N, kN etc.;

F_{MT} — forța (axială) maximă din tija tendonului, corespunzătoare cazului specific al condițiilor de solicitare mecanică (la întindere sau la compresiune) cu efect termic, în N, kN etc.;

F_{max} — forța (axială) maximă din tija tendonului, corespunzătoare cazului general al condițiilor de solicitare (la întindere sau la compresiune) concordante cu cele de exploatare, în N, kN etc.;

F_{PT}, $F_{PT\,1}$, $F_{PT\,2}$ — forțele de pretensionare a tendonului, în N, kN etc.;

ε_{PT}, $\varepsilon_{PT\,1}$, $\varepsilon_{PT\,2}$ — deformațiile specifice de pretensionare, în μm/m;

ε_T — deformația specifică de natură termică a tendoanelor pretensionate care au temperatura t_F diferită de cea a picioarelor și mantalei aceluiași rezervor sferic;

t_{PT} — temperatura (aceeași pentru picioare, tendoane și manta) la care se efectuează pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice, în grd;

t_F — temperatura (diferită de cea a picioarelor și mantalei, dacă este cazul) la care funcționează tendoanele pretensionate ale rezervoarelor sferice, în grd;

$\Delta t_{FPT} = t_F - t_{PT}$ — diferența de temperatură corespunzătoare tendoanelor pretensionate care funcționează la temperatura t_F, în grd; evident, $\Delta t_{FPT} = \Delta t_{FPT\,2}$.

CERCETĂRI PRIVIND DINAMICA SISTEMELOR HIDRAULICE DE ACȚIONARE CU ACUMULATOR

de AUREL OPREAN
Institutul politehnic București

CONSTANTIN CODREANU
I.M.F.C.A. București

În lucrare se elaborează modelul matematic generalizat al sistemelor de acționare hidrostatică cu acumulator pneumohidraulic utilizat ca sursă de energie. Sistemul hidraulic de acționare considerat se referă la mișcarea circulară, iar ecuația diferențială de funcționare, dedusă în forma sa generală, s-a rezolvat pentru cazul evoluției izotermice a încărcăturii de gaz din acumulator.
Metoda de calcul propusă permite să se determine viteza unghiulară a motorului hidraulic precum și timpul de acționare al acestuia.

1. INTRODUCERE

Sistemele de acționare hidrostatice își extind din ce în ce mai mult aria de utilizare în construcția de mașini și instalații, datorită avantajelor remarcabile pe care acestea le prezintă în comparație cu alte sisteme de acționare, în special sub aspectul gabaritului și greutății mici pe unitatea de putere, al obținerii unor forțe sau momente considerabile cu impulsuri de comandă extrem de mici (coeficienți de amplificare de ordinul sutelor de mii), al calităților dinamice superioare, al posibilităților largi de automatizare, al siguranței în funcționare ș.a.

Eficiența sistemelor de acționare hidrostatice crește substanțial [1, 2, 3] prin utilizarea acumulatoarelor hidraulice, care pot realiza o multitudine de funcții, printre care : surse de energie principale sau suplimentare, menținerea (cu o variație mică, între limitele impuse) a presiunii într-o magistrală de presiune înaltă, amortizarea pulsațiilor de presiune, atenuarea șocurilor hidraulice, compensarea pierderilor volumice de lichid sau a variației cu temperatura a volumului lichidului dintr-o instalație etc., cu aplicații la instalațiile hidrostatice ale mașinilor-unelte, preselor, mașinilor de ridicat și transportat, mașinilor de construcții, mașinilor de transport rutier, naval și aerian și multe altele.

Deși acumulatoarele hidraulice sînt cunoscute și utilizate de peste un secol, cercetările efectuate pînă în prezent nu au reușit să elaboreze modele matematice cu valabilitate generală, care să descrie în mod fidel comportarea dinamică a unei instalații hidrostatice cu acumulator pneumohidraulic — tipul cel mai răspîndit de acumulator — și care să permită determinarea cu precizie a vitezelor, accelerațiilor și timpilor de acționare pentru

astfel de sisteme [1], ceea ce se explică prin complexitatea fenomenelor de natură termodinamică, hidrodinamică și hidrostatică din instalațiile hidrostatice cu acumulator, complexitate accentuată de interdependența dintre evoluția gazului din acumulatorul pneumohidraulic și vitezele și accelerațiile organului acționat.

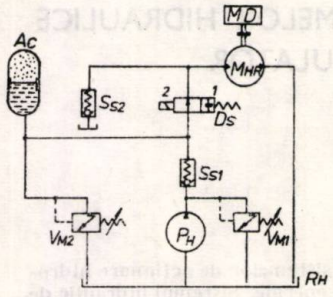


Fig. 1

Lucrarea de față își propune să rezolve problema alcătuirii unui model matematic adecvat și a determinării, pe baza acestui model, a vitezelor și timpilor de acționare în cazul unui sistem complex de acționare hidrostatică la care acumulatorul pneumohidraulic îndeplinește funcția de sursă de energie. Dintre numeroasele aplicații ale unor astfel de sisteme de acționare, pentru exemplificare se prezintă în figura 1 schema instalației hidrostatice cu acumulator pneumohidraulic folosită în cadrul sistemului de acționare destinat pornirii unui motor Diesel (MD) de mare putere, sistem de acționare care asigură furnizarea, pe o durată scurtă de timp, a unei cantități determinate de energie, înmagazinată în acumulator ca energie a încărcăturii de gaz, comprimată la presiune mare. Cuplarea acumulatorului A_c la motorul hidraulic rotativ de pornire M_{HR} se realizează prin distribuitorul D_s, care, după atingerea de către motor a turației necesare, se comută pe poziția *1*. După pornirea motorului Diesel are loc reîncărcarea acumulatorului, care se realizează cu pompa hidraulică P_H, antrenată de motorul Diesel, pînă la atingerea presiunii maxime de încărcare a acumulatorului, presiune controlată de supapa V_{M1}, prin care, apoi, pompa debitează în rezervorul hidraulic R_H. Supapa V_{M2} servește pentru limitarea presiunii în acumulator la creșterea temperaturii. În timpul funcționării motorului Diesel, motorul hidraulic M_{HR} lucrează în regim de generator, absorbind fluid prin supapa S_{s2} și debitîndu-l, liber, în rezervor.

2. DETERMINAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE DE MIȘCARE A SARCINII ACȚIONATE DE LA UN ACUMULATOR PNEUMOHIDRAULIC

Pentru elaborarea modelului matematic al mișcării sarcinii acționate de la acumulatorul pneumohidraulic, s-a luat în considerație o schemă cu o structură complexă (fig. 2), în care se prevăd, atît pe traseul de alimentare a motorului hidraulic de la acumulator, cît și pe cel de evacuare în rezervor, conducte de secțiuni și lungimi diferite, la care coeficienții globali de rezistențe locale sînt notați cu ζ_{ai} și, respectiv, ζ_{rj}, iar coeficienții de rezistențe liniare sînt notați cu λ_{ai} și, respectiv, λ_{rj}. În schemă s-au mai notat : g — garniturile de etanșare, A — ariile secțiunilor active ale acumulatorului și conductelor, d — diametrele, l — lungimile conductelor, m — masa pistonului acumulatorului, J — momentele de inerție ale motorului hidraulic și sarcinii, V — volumul camerei de gaz a acumulatorului, v — vitezele lichidului în conducte și p — presiunile în camerele acumulatorului și motorului.

Pentru acest sistem de acționare hidrostatic cu acumulator se pot scrie următoarele ecuații :

— ecuația de mișcare a pistonului acumulatorului :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = p(A - f_1) - p'(A + f_2) - (F_{01} + F_{02}), \qquad (1)$$

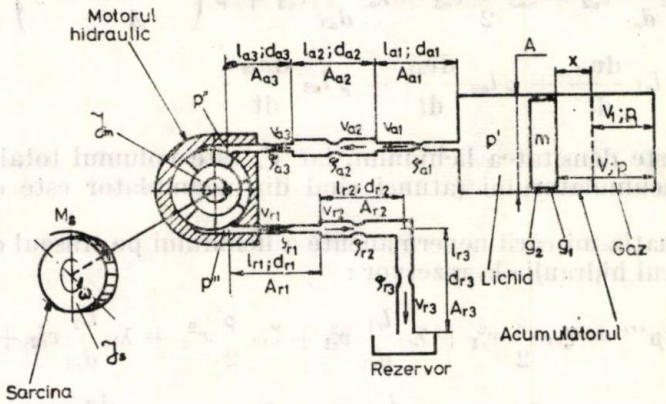


Fig. 2

în care F_{01}, F_{02}, f_1 și f_2 sînt constante care intervin în expresiile forțelor de frecare :

$$F_{fr1} = F_{01} + f_1 p,$$

$$F_{fr2} = F_{02} + f_2 p'$$

ale garniturilor de etanșare g_1 și, respectiv, g_2 ale pistonului acumulatorului, iar p și p' sînt presiunile în momentul oarecare t în camerele de gaz și, respectiv, de lichid ale acumulatorului ;

— ecuația de mișcare a rotorului motorului hidraulic și sarcinii acționate de acesta :

$$(J_m + J_s)\frac{d^2\theta}{dt^2} = (p'' - p''')\, q_m - M_s, \qquad (2)$$

în care J_m și J_s sînt momentele de inerție ale rotorului motorului și, respectiv, sarcinii, θ este unghiul de rotație al arborelui motorului, p'' și p''' sînt presiunile în camerele de alimentare și, respectiv, de evacuare ale motorului în momentul oarecare t, q_m este volumul specific al motorului hidraulic, iar M_s este momentul cuplului de sarcină la arborele acționat ;

— ecuația evoluției încărcăturii de gaz din acumulator :

$$p(V_1 + Ax)^n = p_1 V_1^n ; \qquad (3)$$

— ecuația micșării nepermanente a lichidului cuprins între pistonul acumulatorului și rotorul motorul hidraulic :

$$p' + \frac{\rho}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = p'' + \zeta_{a1}\frac{\rho}{2}v_{a1}^2 + \lambda_{a1}\frac{l_{a1}}{d_{a1}}\frac{\rho}{2}v_{a1}^2 + \zeta_{a2}\frac{\rho}{2}v_{a2}^2 +$$

$$+ \lambda_{a2}\frac{l_{a2}}{d_{a2}}v_{a2}^2 + \zeta_{a3}\frac{\rho}{2}v_{a3}^2 + \lambda_{a3}\frac{l_{a3}}{d_{a3}}v_{a3}^2 + \rho\left(\frac{V_0 - V_1}{A} - x\right)\frac{d^2x}{dt^2} +$$

$$+ \rho\, l_{a1}\frac{dv_{a1}}{dt} + \rho\, l_{a2}\frac{dv_{a2}}{dt} + \rho\, l_{a3}\frac{dv_{a3}}{dt}, \tag{4}$$

în care ρ este densitatea lichidului, iar V_0 este volumul total al camerei de gaz a acumulatorului (atunci cînd din acumulator este evacuat tot lichidul) ;

— ecuația mișcării nepermanente a lichidului pe traseul de evacuare de la motorul hidraulic la rezervor :

$$p''' = \zeta_{r1}\frac{\rho}{2}v_{r1}^2 + \lambda_{r1}\frac{l_{r1}}{d_{r1}}v_{r1}^2 + \zeta_{r2}\frac{\rho}{2}v_{r2}^2 + \lambda_{r2}\frac{l_{r2}}{d_{r2}}v_{r2}^2 +$$

$$+ \zeta_{r3}\frac{\rho}{2}v_{r3}^2 + \lambda_{r3}\frac{l_{r3}}{d_{r3}}v_{r3}^2 + \frac{\rho}{2}v_{r3}^2 + \rho l_{r1}\frac{dv_{r1}}{dt} +$$

$$+ \rho l_{r2}\frac{dv_{r2}}{dt} + \rho l_{r3}\frac{dv_{r3}}{dt}\ ; \tag{5}$$

— ecuațiile de continuitate a lichidului pe traseele instalației :

$$A\cdot\frac{dx}{dt} = q_m\cdot\frac{d\theta}{dt} = A_{a1}\cdot v_{a1} = A_{a2}\cdot v_{a2} = A_{a3}\cdot v_{a3} =$$

$$= A_{r1}\cdot v_{r1} = A_{r2}\cdot v_{r2} = A_{r3}\cdot v_{r3}\ \ (A\cdot x = q_m\cdot\theta). \tag{6}$$

Folosind ecuațiile (1)— (6), după eliminarea mărimilor $p, p', p'', p''', v_{a1}, v_{a2}, v_{a3}, v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}$ și x și efectuarea calculelor, considerînd forma generală a unei instalații cu a conducte de secțiuni diferite pe traseul de alimentare a motorului hidraulic de la acumulator și cu r conducte de secțiuni diferite pe traseul de evacuare a lichidului de la motorul hidraulic la rezervor, se obține ecuația diferențială a mișcării sarcinii acționate de la acumulatorul pneumohidraulic, sub forma generală :

$$\left[J_m + J_s + m\frac{q_m^2}{A(A+f_2)} + \rho q_m^2\left(\sum_{i=1}^{a}\frac{l_{ai}}{A_{ai}} + \sum_{j=1}^{r}\frac{l_{rj}}{A_{rj}}\right)\right]\ddot{\theta} +$$

$$+ \frac{\rho}{2}q_m^3\left\{\sum_{i=1}^{a}\left[\frac{1}{A_{ai}^2}\left(\xi_{ai} + \lambda_{ai}\frac{l_{ai}}{d_{ai}}\right)\right] + \sum_{j=1}^{r}\left[\frac{1}{A_{rj}^2}\left(\xi_{rj} + \lambda_{rj}\frac{l_{rj}}{d_{rj}}\right)\right] + \frac{1}{A_{rr}^2}\right\}\dot{\theta}^2 -$$

$$- q_m\frac{A - f_1}{A + f_2}p_1\left(\frac{V_1}{V_1 + q_m\,\theta}\right)^n + M_s + q_m\frac{F_{01} + F_{02}}{A + f_2} = 0 \tag{7}$$

sau

$$J\ddot{\theta} + K\dot{\theta}^2 - q_e p_1 \left(\frac{V_1}{V_1 + q_m \theta} \right)^n + M = 0, \tag{8}$$

expresiile mărimilor J, K, q_e și M rezultînd din compararea expresiilor (7) și (8) ale ecuației diferențiale a mișcării sarcinii acționate de la acumulatorul pneumohidraulic.

Se observă că mărimea J, care are semnificația de moment de inerție echivalent redus la arborele motorului hidraulic de acționare, depinde de unghiul de rotație θ, ceea ce se explică prin faptul că volumul de lichid din acumulator variază în cursul acționării. Avînd în vedere însă că aria secțiunii active a acumulatorului este întotdeauna mult mai mare decît ariile secțiunilor active ale conductelor instalației de acționare, masa lichidului din acumulator se poate neglija în toate cazurile practice, astfel încît momentul de inerție echivalent la arborele motorului hidraulic (J) poate fi considerat constant atunci cînd momentul de inerție al sarcinii exterioare (J_s) nu variază în cursul acționării.

3. SOLUȚIA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE (8) ÎN CAZUL EVOLUȚIEI IZOTERMICE A ÎNCĂRCĂTURII DE GAZ DIN ACUMULATOR

În foarte multe cazuri practice, evoluția de destindere a încărcăturii de gaz din acumulatorul care furnizează lichid sub presiune instalației de acționare este sau poate fi considerată izotermică, mai ales dacă descărcarea acumulatorului este suficient de lentă.

În cazul evoluției izotermice a încărcăturii de gaz din acumulator, deci cînd $n = 1$, ecuația diferențială (8) devine

$$J\ddot{\theta} + K\dot{\theta}^2 - \frac{q_e p_1 V_1}{V_1 + q_m \theta} + M = 0. \tag{9}$$

Notînd

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

rezultă

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta},$$

astfel încît, punînd $\dot{\theta}^2 = \omega^2 = u$, ecuația diferențială neliniară de ordinul doi (9) se transformă în ecuația diferențială liniară neomogenă de ordinul întîi :

$$\frac{du}{d\theta} + \frac{2K}{J} u = \frac{2q_e p_1}{J} \frac{V_1}{V_1 + q_m \theta} - \frac{2M}{J}, \tag{10}$$

a cărei soluție generală este de forma

$$u = e^{-\int P d\theta}\left(C + \int R e^{\int P d\theta}\, d\theta\right), \tag{11}$$

în care C este o constantă, iar

$$P = \frac{2K}{J}; \qquad R = \frac{2q_e p_1}{J}\frac{V_1}{V_1 + q_m\theta} - \frac{2M}{J}.$$

Pentru determinarea soluției generale a ecuației diferențiale (10) este necesar să se calculeze integralele care intervin în expresia (11) și să se determine constanta C din această expresie, folosind condițiile inițiale ale mișcării. Pentru aceasta, mai întîi se notează

$$I_I = \int P d\theta = \frac{2K}{J}\theta;$$

$$I_{II} = \int R e^{I_I} d\theta = \frac{2q_e p_1 V_1}{q_m J} I_1 - \frac{2M}{J} I_2,$$

unde

$$I_2 = \int e^{\frac{2K}{J}\theta} d\theta = \frac{J}{2K} e^{\frac{2K}{J}\theta},$$

$$I_1 = \int \frac{e^{\frac{2K}{J}\theta} d\theta}{\frac{V_1}{q_m} + \theta}.$$

Pentru calculul integralei I_1 se face schimbarea de variabilă

$$\frac{V_1}{q_m} + \theta = y,$$

expresia integralei devenind

$$I_1 = e^{-\frac{2K V_1}{q_m J}} \cdot I_1',$$

unde

$$I_1' = \int \frac{e^{\frac{2K}{J}y}}{y} dy.$$

Integrala I_1' se poate exprima numai prin intermediul unei serii de puteri :

$$I_1' = \ln|y| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{2K}{J}\right)^m y^m}{m \cdot m!},$$

cu care, după revenirea la variabila θ, integrala I_1 devine

$$I_1 = e^{-\frac{2KV_1}{q_m J}}\left[\ln\left(\frac{V_1}{q_m}+\theta\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2K}{J}\right)^m\left(\frac{V_1}{q_m}+\theta\right)^m}{m\cdot m!}\right].$$

Înlocuind pe I_1 și I_2 în expresia lui I_{II} și pe aceasta, împreună cu I_I, în expresia (11), determinînd constanta de integrare C, din condiția inițială $\theta = 0$ simultan cu $\omega = 0$, și trecînd la variabila ω, se obține viteza unghiulară ω în funcție de unghiul de rotație al arborelui motorului hidraulic de acționare sub forma :

$$\omega^2 = \frac{2q_e p_1 V_1}{q_m J} e^{-\frac{2K}{J}\left(\frac{V_1}{q_m}+\theta\right)} \ln \frac{\frac{V_1}{q_m}+\theta}{\frac{V_1}{q_m}} - \frac{M}{K}\left(1-e^{-\frac{2K}{J}\theta}\right)+$$

$$+\frac{2q_e p_1 V_1}{q_m J}\left[\frac{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2K}{J}\right)^m\left(\frac{V_1}{q_m}+\theta\right)^m}{m\cdot m!}}{e^{\frac{2K}{J}\left(\frac{V_1}{q_m}+\theta\right)}} - e^{-\frac{2K}{J}\theta}\,\frac{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2KV_1}{q_m J}\right)^m}{m\cdot m!}}{e^{\frac{2KV_1}{q_m J}}}\right]. \tag{12}$$

Relația (12) obținută pentru variația cu unghiul de rotație θ a vitezei unghiulare a motorului hidraulic de acționare alimentat de la acumulatorul pneumohidraulic este dificil de utilizat în calculele practice, din cauza dificultăților la calcularea celor două sume.

Folosind o metodă generală de aproximare a celor două sume, metodă dezvoltată în [1], relația (12) se poate pune sub forma mult mai comodă pentru utilizare :

$$\omega^2 = \frac{2q_e p_1 V_1}{q_m J}\left\{\frac{\ln\frac{V_1+q_m\theta}{V_1}}{e^{\frac{2K}{q_m J}(V_1+q_m\theta)}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\left[\frac{2KV_1}{q_m J}\left(1+\frac{q_m\theta}{V_1}\right)\right]^2-0{,}6\frac{KV_1}{q_m J}\left(1+\frac{q_m\theta}{V_1}\right)+7}-1{,}65}-$$

$$\left.-\frac{e^{-\frac{2K}{J}\theta}}{\sqrt{\left(\frac{2KV_1}{q_m J}\right)^2-0{,}6\frac{KV_1}{q_m J}+7}-1{,}65}\right\}-\frac{M}{K}\left(1-e^{-\frac{2K}{J}\theta}\right) \tag{13}$$

sau, în cazul cînd $KV_1/q_mJ > 2{,}5$, condiție care este îndeplinită în aproape toate cazurile practice, sub forma

$$\omega^2 = \frac{2q_e p_1 V_1}{q_m J}\left[\frac{\ln\left(1+\frac{q_m\theta}{V_1}\right)}{e^{\frac{2KV_1}{q_mJ}\left(1+\frac{q_m\theta}{V_1}\right)}} + \frac{1}{\frac{2KV_1}{q_mJ}\left(1+\frac{q_m\theta}{V_1}\right)-1} - \frac{e^{-\frac{2K}{J}\theta}}{\frac{2KV_1}{q_mJ}-1}\right] - \frac{M}{K}\left(1-e^{-\frac{2K}{J}\theta}\right). \tag{14}$$

Timpul de acționare se poate determina calculînd integrala

$$t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\omega(\theta)}. \tag{15}$$

Ținînd seama de structura complexă a funcției $\omega(\theta)$ — conform relațiilor (12), (13) sau (14) — , rezultă că integrala (15) nu poate fi calculată decît grafic sau numeric. Dacă, însă, instalația de acționare este caracterizată printr-o valoare suficient de mare a parametrului KV_1/q_mJ, de exemplu,

$$\frac{KV_1}{q_mJ} \geqslant 15, \tag{16}$$

atunci, din relația (14), prin neglijarea termenilor foarte mici și a celor care se micșorează rapid cu creșterea unghiului de rotație θ, se obține

$$\omega \approx \sqrt{\frac{2q_e p_1 V_1}{q_m J}\,\frac{1}{\frac{2K}{J}\theta + \frac{2KV_1}{q_mJ}-1} - \frac{M}{K}}, \tag{17}$$

relație cu care integrala (15) poate fi calculată, obținîndu-se

$$t = \frac{q_e p_1 V_1}{2q_m M}\sqrt{\frac{K}{M}}\left[\arcsin\left(\frac{2q_m M\theta}{q_e p_1 V_1}+\frac{2M}{q_e p_1}-\frac{Jq_m M}{q_e p_1 V_1 K}-1\right) - \arcsin\left(\frac{2M}{q_e p_1}-\frac{Jq_m M}{q_e p_1 V_1 K}-1\right)\right] + \frac{\sqrt{(2KV_1 - q_mJ)(q_mJM + 2q_e p_1 V_1 K - 2KV_1 M)}}{2q_m M\sqrt{K}} - \frac{\sqrt{(2KV_1 - q_mJ + 2q_mK\theta)(q_mMJ + 2q_e p_1 V_1 K - 2KV_1 M - 2q_m MK\theta)}}{2q_m M\sqrt{K}}. \tag{18}$$

4. CONCLUZII

Pe baza cercetărilor teoretice și a rezultatelor obținute se evidențiază următoarele concluzii :

— Studiul de față se referă la sistemele hidraulice de acționare cu acumulator pneumohidraulic, larg folosite în construcția de mașini-unelte, prese, mașini de construcții, mașini de transport rutier, aerian și naval ș.a., sisteme de acționare mai puțin studiate pînă în prezent, datorită complexității fenomenelor generate de caracterul descărcării acumulatorului pneumohidraulic în timpul acționării.

— În cadrul lucrării a fost elaborat modelul matematic generalizat al sistemelor hidraulice de acționare care folosesc ca sursă de energie acumulatoarele pneumohidraulice, iar ca motor de acționare — motorul hidraulic rotativ. Ecuația diferențială care descrie funcționarea unui astfel de sistem de acționare — ecuația (7) — a fost dedusă într-o formă foarte generală, cu luarea în considerație a tuturor influențelor și interdependențelor diferitelor mărimi și parametri funcționali și constructivi care intervin în cadrul sistemului dinamic analizat.

— Integrarea ecuației diferențiale a permis determinarea vitezei de rotație la arborele motorului de acționare în cazul evoluției izotermice a încărcăturii de gaz din acumulator. Relația de calcul al vitezei unghiulare obținută prin integrarea ecuației diferențiale (9) — relația (12) — a fost simplificată — relațiile (13) și (14) — printr-o metodă care nu introduce erori de calcul mai mari de 5%.

— A fost dedusă, de asemenea, o relație (18) pentru calculul timpului de acționare, relație aplicabilă tuturor instalațiilor de acționare cu acumulator pneumohidraulic și motor hidraulic rotativ care îndeplinesc condiția (16).

Primită la redacție la 27 decembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. C. Codreanu, *Contribuții la dinamica sistemelor de acționare hidrostatice cu acumulator*, Teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1978.
2. A. Oprean, V. Marin, și Al. Dorin, *Acționări hidraulice*, București, Edit. tehnică, 1976.
3. I. V. Wingate, *Accumulators review — Design and applications trends*, Fluid Power International, May, 1973.

O ÎNCERCARE DE FORMALIZARE A ABORDĂRII TOP-DOWN-STRUCTURATE A PRODUSELOR INFORMATICE CU APLICARE LA CERCETAREA, PROIECTAREA TEHNICĂ ŞI TEHNOLOGICĂ

de GORUN MANOLESCU

Institutul central pentru conducere şi informatică

Se prezintă o modalitate de concepere şi realizare a unui produs informatic (sistem de programe) ce se poate aplica în domeniul cercetării, proiectării tehnice şi tehnologice. La baza decelării acestei modalităţi se află un model matematic propus de autor. În lucrare se prezintă şi un exemplu de aplicare din cadrul cercetării ştiinţifice şi al proiectării regimului hidraulic pentru o sondă de foraj.

1. GENERALITĂŢI

Pe plan mondial, ca şi la noi în ţară dealtfel, eficienţa utilizării calculatoarelor este pusă astăzi în dezbatere.

Se reliefează din ce în ce mai pregnant concluzia că atingerea unor ritmuri înalte în procesul dezvoltării economice şi sociale necesită utilizarea pe scară largă a calculatoarelor în ştiinţă şi tehnologie [11, 14]. În legătură cu aceasta, în [12], se remarcă : „spre deosebire de utilizarea prelucrării automate a datelor în cadrul aplicaţiilor de gestiune economică care determină micşorarea cheltuielilor indirecte şi a risipei, aplicarea calculului automat în ştiinţă şi tehnologie acţionează direct asupra micşorării consumului de resurse şi asupra îmbunătăţirii parametrilor de performanţă". Dar acesta este numai un aspect al problemei. Un alt aspect, la fel de important, este legat de însuşi costul utilizării calculatoarelor. Astfel, într-un raport elaborat în 1975 de CEPA—S.U.A.,[1] se precizează că, deşi 33% din inginerii Statelor Unite utilizează în activitatea lor calculatorul electronic, dacă se ţine seama de *eficienţa folosirii acestuia*, procentul trebuie redus la numai 10%.

Pînă nu de mult şi mai ales în cercetarea, proiectarea tehnică şi tehnologică, era aproape unanim acceptată părerea conform căreia a utiliza eficient un calculator electronic, este sinonim cu a realiza un produs informatic a cărui rulare (execuţie) să dureze cît mai puţin. În ultimul timp însă optica s-a schimbat. Acest lucru s-a datorat creşterii substanţiale a complexităţii produselor informatice realizate pe plan mondial.

[1] citat în [12].

În știință și tehnologie această creștere este și mai accentuată. Este suficient să amintim, printre altele, că pentru prospecțiuni geologice și geofizice, firmele producătoare livrează, la ora actuală, calculatoare cu hardware și software de bază și de aplicații specializate pe domeniu. Dacă ne limităm numai la acest exemplu — dar situații similare se întîlnesc și în alte părți : în domeniul militar, în cel al cercetărilor spațiale etc., trebuie arătat că produsele informatice respective înglobează acum și caracteristicile unor aplicații economice (volum mare de date) și, în același timp, își păstrează și accentuează caracterul lor de bază : utilizarea unor modele matematice cu un deosebit grad de dificultate. În legătură cu cercetările spațiale, este semnificativ exemplul dat în [26] prin care se evidențiază cum, în urmă cu cîțiva ani, erorile software au produs pierderi importante. Aceste erori au condus la eșecul zborului interplanetar Marinner și la apariția situației critice din timpul zborului navei Apollo 11.

La ora actuală criteriile (parametrii) de eficiență, prin prisma cărora se măsoară performanțele unui produs informatic, s-au nuanțat și diversificat. Un set minimal al unor astfel de parametri ar putea fi următorul [1, 22, 26, 34] :

a) *efortul de proiectare-realizare* exprimat prin volumul resurselor[1)] necesare pentru proiectarea, construirea, testarea și realizarea unui produs informatic ;

b) *corectitudinea* exprimată prin numărul de greșeli de concepție întîlnite, începînd din perioada de testare-implementare și continuînd în toată perioada de exploatare-întreținere a produsului ;

c) *ușurința depanării* exprimată prin volumul resurselor [1)] necesare pentru localizarea greșelilor de concepție ;

d) *flexibilitatea* exprimată prin volumul resurselor [1)] necesare pentru efectuarea schimbărilor și extensiilor apărute în urma ivirii unor cerințe suplimentare în legătură cu un produs informatic existent ;

e) *timpul de răspuns* exprimat în timpul calculator necesar rulării (execuției) produsului informatic ;

f) *transferabilitatea* exprimată prin volumul resurselor [1)] necesare pentru trecerea exploatării unui produs informatic de la o configurație a unui sistem de calcul la altă configurație, pentru unul și același tip de calculator ;

g) *portabilitatea* exprimată prin volumul resurselor necesare pentru trecerea exploatării unui produs informatic de pe un tip de calculator pe alt tip de calculator ;

h) *ocuparea resurselor sistemului de calcul* exprimată prin procentul din totalul resurselor standard ale unui calculator (memorie centrală și periferice) al resurselor cerute de exploatarea produsului informatic ;

i) *siguranța în funcționare* exprimată prin volumul de resurse[1)] necesare pentru înlăturarea unor greșeli de operare făcute de factorul uman și a incidentelor de hardware și/sau software de bază (sistem de operare) ce apar în timpul exploatării unui produs informatic.

Pentru a se obține valori cît mai bune ale parametrilor de eficiență, în ultimul timp au apărut și s-au perfecționat o serie de tehnici și metode de concepere și realizare a produselor informatice. Dintre acestea, poate cea mai cunoscută la ora actuală, este așa-numita „programare structu-

[1)] umane, de timp calculator și configurație sistem de calcul.

rată". Este unanim acceptat că programarea structurată influențează favorabil parametrii de eficiență de la punctele a,..., d.

În legătură cu programarea structurată se poate spune că ea apare, la ora actuală, ca fiind un complex de reguli *mai ales pragmatice*. În realitate, programarea structurată îmbină o metodă deductivă de descompunere a unui enunț în subenunțuri (metoda top-down) cu o tehnică de structurare (modularizarea) și, din acest motiv, considerăm că denumirea de „abordare top-down-structurată" a produselor informatice este mai adecvată pentru acest complex. De asemenea, mai trebuie remarcat și faptul că există două aspecte complementare ale structurii unui produs informatic și anume: structura de calcul și structura datelor. În fine, o ultimă precizare, deși există o literatură extrem de bogată în domeniu, din lucrările consultate [1, 3, 8, 25 26, 29, 30, 32, 33, 34], nu a rezultat o definire neambiguă a abordării top-down-structurate care să permită, ulterior, o algoritmizare a ei.

Obiectivele lucrării de față, sînt:

— o încercare de formalizare a abordării top-down-structurate a produselor informatice, sub aspectul structurilor de calcul, prin care să se poată obține o definire neambiguă a acestei modalități de lucru;

— prezentarea unui exemplu ilustrativ de aplicare în cadrul activității de cercetare-proiectare din domeniul forajului sondelor de petrol și gaze.

2. ELABORAREA MODELULUI

Pornind de la lucrarea [4], devenită astăzi clasică în domeniu, vom introduce noțiunile de *simbol funcțional* și *simbol predicativ*, similare dar nu identice cu noțiunile de „cutie funcțională" și „cutie predicativă" din lucrarea citată.

Astfel, vom numi *simbol funcțional* o aplicație a_i a unui set $F_a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \in N$), unde $F_a : X \to X$, X notînd un set de obiecte. De asemenea, vom numi *simbol funcțional condiție*, un simbol funcțional $a_k : x_i \to x_j$ (x_i, $x_j \in X$, $a_k \in F_a$, $i \neq j$; $i, j, k \in N$), unde $x_j = \{F \cup A\}$, F notînd prescurtarea de la FALS, iar A, prescurtarea de la ADEVARAT.

Dintr-un punct de vedere foarte general, un simbol funcțional poate reprezenta o „cutie neagră" care „transformă" un obiect x_i în alt obiect $x_j (x_i, x_j \in X, i \neq j)$. Grafic, el poate fi redat prin schematizarea din figura 1.

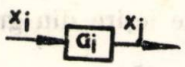


Fig. 1

Din punctul de vedere al limbajelor de programare care, în continuare, vor fi desemnate prin *LP*, un simbol funcțional condiție poate reprezenta o propoziție logică.

Vom numi *simbol predicativ*, o aplicație β_i a unui set $F_\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ ($m \in N$), unde $F_\beta : B_a \to B$, $B_a = \{F, A\}$, $B = \{0,1\}$. O aplicație β_i se definește astfel:

$$\beta_{(b)_i} = \begin{cases} 0 \text{ dacă } b = F, \\ 1 \text{ dacă } b = A. \end{cases}$$

Din punctul de vedere al *LP* şi spre deosebire de noţiunea similară introdusă în [4][1], un simbol predicativ poate reprezenta un operator de decizie, introdus prin cuvintele rezervate *DO*, *IF* (limbaje evoluate) sau SKIP (limbaj de comandă al unui sistem de operare). Grafic, el poate fi redat prin schematizarea din figura 2.

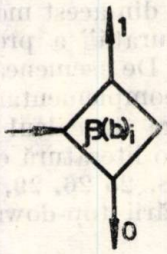


Fig. 2

Se poate acum introduce o mulţime finită şi nevidă $\mathcal{S}$, numită *mulţimea simbolurilor unei scheme logice*, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_p$, unde $\mathcal{S}_f$ notează clasa simbolurilor funcţionale şi $\mathcal{S}_p$ clasa simbolurilor predicative.

Mai departe, pe baza unor sugestii din [9, 13, 15], dar mai ales prin preluarea unor rezultate din [2], sîntem acum în măsură să introducem conceptul de *schemă logică*.

O schemă logică este un cvintuplu : $\varphi^{\mathcal{S}} = (\tilde{G}, p, i, i', e)$, unde

a) $\tilde{G} = (|G|, G, \delta_0, \delta_1)$ este un graf orientat, adică un cvadruplu format dintr-o mulţime $|G|$ — mulţimea *nodurilor*, o mulţime G — mulţimea *săgeţilor*, două aplicaţii $\delta_i : G \to |G|$ $(i = 0,1)$; δ_0 este aplicaţia „sursă" care asociază unei săgeţi $g : v \to v'$ sursa $v \in |G|$, iar δ_1 este aplicaţia „capăt" care asociază unei săgeţi $g : v \to v'$ capătul $v' \in |G|$; numim $\tilde{G}$ *graful schemei logice* ;

b) p este o aplicaţie, $p : \mathcal{S} \to |G|$ care asociază unui nod v, un simbol funcţional a sau un simbol predicativ β ;

c) i este un nod unic de intrare în graful $\tilde{G}$ ($\neg \exists$ nici o săgeată de capăt i) ;

d) i' este un nod unic în graful $\tilde{G}$ care are drept precedent unic nodul i ($\exists$ o singură săgeată de sursă i şi de capăt i') ;

e) e este un nod unic de ieşire din graful $\tilde{G}$ ($\neg \exists$ nici o săgeată de sursă e).

Cerem, în plus, ca graful $\tilde{G}$ să verifice condiţiile :

(i) mulţimea $\mathcal{D}(\tilde{G})(i, e)$ a drumurilor de la i la e să nu fie vidă ;

(ii) pentru $\forall\ v \in |G|$, $\exists$ cel puţin un drum $f \in \mathcal{D}(\tilde{G})$ (i, v) şi un drum $h \in \mathcal{D}(\tilde{G})(v, e)$;

(iii) nodului i să îi fie asociat întotdeauna un simbol funcţional condiţie : $a(x_i)_1 = A$;

---

[1] În [4], o „cutie predicativă" conţine atît un operator gen *DO*, *IF* sau SKIP, cît şi condiţia logică.

(iv) nodului i' să îi fie asociat întotdeauna un simbol predicativ : $\beta(A)_1 = 1$;

(v) nodului e să îi fie asociat întotdeauna un simbol funcțional $a(x_i)_n = x_j$, $x_j \in \emptyset$;

(vi) nodul e să fie întotdeauna precedat numai de noduri cărora li se asociază numai simboluri funcționale ;

(vii) graful $\tilde{G}$ să fie finit, adică mulțimile $|G|$ și G să fie finite.

Din punctul de vedere al reprezentării grafice uzuale a unei scheme logice (organigrame), nodul de intrare i, împreună cu nodul i', poate fi interpretat drept „bloc-start", iar nodul de ieșire e, drept „bloc-stop".

În continuare, preluînd din [30] denumirea de „context logic" [1], îi vom da o nouă interpretare.

În prealabil însă va trebui să reamintim cîteva noțiuni ale calculului propozițional ([7] p. 54 și 55).

Simbolii de bază ai calculului propozițional sînt :

a) simbolii variabilelor propoziționale $\{v_n | n \in N\}$;

b) conectivele logice $\neg$ și $\wedge$;

c) semnele de punctuație (și) (paranteza stîngă și paranteza dreaptă).

Se notează cu I_{prop} mulțimea simbolilor de bază ai calculului propozițional și se pune în evidență limbajul formulelor calculului propozițional $F_{prop} \subseteq I^*_{prop}$.

Limbajul formulelor este dat de următoarele reguli :

(i) dacă α, $\beta \in F_{prop}$, atunci $\neg\alpha(\alpha \wedge \beta) \in F_{prop}$;

(ii) $\{v_n | n \in N\} \subseteq F_{prop}$;

(iii) un cuvînt din I^*_{prop} este o formulă dacă și numai dacă se obține printr-un număr finit de aplicări ale regulilor anterioare.

Se introduc trei prescurtări pentru formulele din F_{prop}. Se notează cu $(\alpha \vee \beta)$ în loc de $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$, cu $(\alpha \to \beta)$ în loc de $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ și cu $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ în loc de $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$.

O realizare a calculului propozițional este o aplicație $f : \{v_n, n \in N\} \to B^2$, unde B^2 este algebra Boole cu două elemente $B^2 = \{0, 1, \cup, \cap, ^-\}$.

O realizare a calculului propozițional poate fi extinsă la o aplicație $f : F_{prop} \to B^2$ punînd în mod recursiv :

$$f(\alpha \wedge \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta) ;$$

$$f(\neg\alpha) = \overline{f(\alpha)},$$

de unde rezultă

$$f(\alpha \vee \beta) = f(\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = \overline{(\overline{f(\alpha)} \cap \overline{f(\beta)})} = f(\alpha) \cup f(\beta).$$

Se spune că o formulă α satisface o realizare f dacă $f(\alpha) = 1$. Se notează aceasta prin $f \models \alpha$.

---

[1] În [30] prin „context logic" se înțelege „intersecția realizărilor tuturor blocurilor de tip predicativ care condiționează execuția unei subscheme dintr-o „schemă logică" unde „blocurile de tip predicativ" sînt definite identic ca și „cutiile predicative" din [4], iar subschema și schema logică nu primesc definiții precise.

Dacă notăm un simbol predicativ $\beta(b)_i$ cu α_i și considerăm că $\forall \alpha_i \in \{v_n \mid n \in N\}$, atunci putem spune că există o formulă α alcătuită din simboluri predicative și conective logice.

Vom reveni acum la noțiunea de context logic al unui nod $v \in |G|$.

Numim *context logic al unui nod* $v \in |G|$, pe scurt context al nodului v, notat cu τ_v, $\mathcal{C}_v$ o realizare a unei formule α care are următoarele proprietăți :

(i) $\alpha = \bigvee_k^l \bigwedge_j^m \alpha_{jk}$, unde α_{jk} este un simbol predicativ j ce se află pe un drum k al grafului $\tilde{G}$, l notînd numărul maxim de drumuri dintre nodurile i și v, iar m, numărul maxim de simboluri predicative ce se află pe un drum ;

(ii) formula α satisface realizarea f, adică $f \mid = \alpha$.

Exemplu. Dacă între nodurile i și v există două drumuri dintre care, pe primul, se află simbolurile predicative α_{11} și α_{12} și pe al doilea, simbolurile predicative $\alpha_{21} = \alpha_{11}$ și $\alpha_{22} = \neg \alpha_{21}$, atunci se poate scrie :

$$\tau_v \mathcal{C}_v = f(\alpha) = f((\alpha_{11} \wedge \alpha_{12}) \vee (\alpha_{21} \wedge \alpha_{22})) =$$

$$= f((\alpha_{11} \wedge \alpha_{12}) \vee (\alpha_{11} \wedge \alpha_{22})) =$$

$$= f(\alpha_{11} \wedge (\alpha_{12} \vee \neg \alpha_{12})) = f(\alpha_{11}) \cap (f(\alpha_{12}) \cup \overline{(f(\alpha_{12}))}) = f(\alpha_{11}).$$

De asemenea, pornind de la o sugestie din [8], vom introduce noțiunea de *context de intrare într-o schemă logică*, notat cu $\mathcal{C}_{in}$, care, prin definiție, este contextul fixat de nodul i, adică $\mathcal{C}_{in} \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha_i') = 1$.

Este posibil acum să se introducă conceptul fudamental de schemă logică structurată.

O schemă logică structurată este $\forall$ schemă logică care îndeplinește condiția : $\mathcal{C}_{in} = \mathcal{C}_e$, unde $\mathcal{C}_e$ notează contextul nodului e (de ieșire).

De asemenea este posibil să se formuleze o primă propoziție.

PROPOZIȚIA 1. *Pentru* $\forall v' \in \{|G|/i\}$ *o aplicație* δ_i *de capăt* v' *și sursă* v, *păstrează invariant contextul dacă și numai dacă nodului* v *îi este asociat un simbol funcțional.*

Demonstrația este imediată.

Într-o serie de lucrări [1, 3, 8, 25, 30, 34] sînt utilizate noțiunile de „bloc", „bloc de program" și „modul", fără a se da o definiție neambiguă a acestora.

În continuare, utilizînd unele sugestii din [28], vom introduce conceptele de bloc neprimitiv, bloc primitiv condiție și bloc primitiv propriu-zis.

Un bloc neprimitiv, $b_{np}(I, E, [E])$, este un concept complex caracterizat prin următoarele elemente :

a) are drept componente :

a1) o mulțime I de instrucțiuni cod-mașină care constituie reprezentarea, în limbaj mașină, a unui set de instrucțiuni dintr-un LP ;

a2) echipamentul blocului constituit din mulțimea E a locațiilor de memorie (internă și externă) al căror conținut poate fi modificat prin execuția mulțimii I ;

a3) conținutul blocului constituit din mulțimea $[E]$ a valorilor ce pot fi modificate în E pe pacursul execuției mulțimii I;

b) execuția sa pe un calculator real se desfășoară astfel:

b1) $\forall$ parte a mulțimii I se execută în ordine strict secvențială, fiecare secvență fiind terminată înaintea începerii celei ce urmează;

b2) execuția $\forall$ părți a mulțimii I continuă, fără interferențe externe, pînă la o terminare (normală sau nu);

b3) echipamentul blocului, E, cît și conținutul acestuia, $[E]$, se află sub controlul blocului în tot timpul execuției $\forall$ părți din mulțimea I și conținutul $[E]$ nu se modifică decît în urma obținerii unor rezultate la fiecare pas (secvență) în parte;

c) poate fi reprezentat, pe o schemă logică, printr-un simbol funcțional asociat unui nod al schemei.

Vom nota cu B_{np} o mulțime finită și nevidă de blocuri primitive.

În legătură cu definiția introdusă pentru blocurile neprimitive, în primul rînd se poate observa că s-a căutat să se dea o interpretare cît mai concretă unor noțiuni introduse anterior, *i.e.* simbol funcțional, schemă logică etc. În al doilea rînd, prin caracteristica c, se impune, prin definiție o condiție de bază și anume aceea de a păstra *invariant contextul* (conform propoziției 1). Această condiție va fi esențială pentru definirea modalității de lucru top down-structurate.

Un bloc primitiv condiție, b_c $(I,E, [E])$, pe scurt bloc condiție, este un concept complex, caracterizat prin aceleași elemente ca și un bloc neprimitiv, cu diferența că subpunctul a1) se modifică astfel:

a1') o mulțime I de instrucțiuni cod-mașină care constituie reprezentarea, în limbaj mașină, a unui set format numai din instrucțiuni de evaluare a expresiilor logice și relaționale dintr-un LP.

Vom nota cu B_c o mulțime finită și nevidă de blocuri condiții.

Un bloc primitiv propriu-zis, $b_p(I, E, [E])$, pe scurt bloc primitiv, este un concept complex caracterizat prin aceleași elemente ca și un bloc neprimitiv, cu diferența că subpunctul a1) se modifică astfel:

a1'') o mulțime I de instrucțiuni cod-mașină care constituie reprezentarea, în limbaj mașină, a unui set de instrucțiuni dintr-un LP, care nu conține instrucțiuni de evaluare a unor expresii logice sau relaționale și nici instrucțiuni de conducere a fluxului execuției (*DO*, *IF*, SKIP, GOTO).

Vom nota cu B_p o mulțime finită și nevidă de blocuri primitive.

Se poate observa că între mulțimile B_{np}, B_p și B_c există relațiile:

$$B_p \subset B_{np},$$

$$B_c \cap B_p = \emptyset,$$

$$B_c \cap B_{np} = \emptyset.$$

Dacă $b \in B_c \cup B_{np}$ și $b=b_1=b_2= \ldots = b_n \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} I = I_1 = I_2 \ldots = I_n$, atunci spunem că b este de tip n.

În legătură cu conceptele de bloc condiție și bloc primitiv, trebuie remarcat faptul că, prin introducerea lor, s-a creat posibilitatea obținerii unui *criteriu de finitudine* al unei descompuneri top-down-structurate. În

literatura cercetată [1, 25, 26, 34], drept criteriu de finitudine este propus „claritatea" setului de instrucțiuni al unui LP prin care poate fi reprezentat un bloc de ultim nivel. Acest criteriu are la bază considerente psihologice care nu sînt precis definite și nici unanim acceptate.

Pe baza introducerii conceptelor de bloc neprimitiv, bloc condiție și bloc primitiv și utilizînd sugestii din [9, 13, 15], este posibilă definirea a două operații de bază în mulțimile B_p, B_c și B_{np}.

În prealabil însă, vom mai defini următoarele trei mulțimi:

$$B_1 = \{b = (b_1, b_2),\ b_i \in B_{np}\} \subset B_{np},$$

$$B_2 = \{b = (b_1, b_2, b_3),\ b_1 \in B_c;\ b_2, b_3 \in B_{np}\} \subset B_{np},$$

$$B_3 = \{b = (b_1, b_2),\ b_i \in B_c\} \subset B_c.$$

Operația de compunere, notată cu $\square$, este o operație binară și se definește pe mulțimile:

a) $\square : B_1 \to B_{np}$;

b) $\square : B_3 \to B_c$,

avînd proprietățile:

(i) $(b_i \square b_j) \square b_k = b_i \square (b_j \square b_k)$ $(i \neq j \neq k)$ (asociativitate);

(ii) $I(b_i \square b_j) = I(b_i) \circ I(b_j) (i \neq j)$, unde $\circ$ notează operația de concatenare.

Operația de compunere este necomutativă.

Operația de dihotomie, notată cu $\lhd$, este o operație ternară și se definește pe mulțimile:

$$\lhd : B_2 \to B_{np},$$

avînd propietatea:

$$I(b) = I(b_1) \cap (I(b_2) \cup I(b_3)).$$

În legătură cu operația de dihotomie apar următoarele variante:

a) dacă $\neg\exists b_2$ sau $\neg\exists b_3$ și b_3 sau b_2 nu pot fi descompuse în n blocuri de tip n legate prin operația $\square$ și dacă $\exists b_2$ și $\exists b_3$ și nici b_2 și nici b_3 nu pot fi descompus în n blocuri de tip n legate prin operația $\square$, atunci spunem că $\lhd$ este o *dihotomie-dacă* sau o *dihotomie-if*;

b) dacă $\neg\exists b_2$ și dacă $b_3 = b_{31} \square b_{32} \square \ldots \square b_{3n}$, unde b_{3i} este de tip n ($b_{31}, b_{32}, \ldots, b_{3n}$ sînt identice), atunci spunem că $\lhd$ este o *dihotomie-ciclu*.

Operația de dihotomie este neasociativă și necomutativă.

Operația de dihotomie poate fi interpretată drept un simbol predicativ.

Faptul că atît operația $\square$, cît și operația $\lhd$, aplicate pe mulțimile pe care au fost definite, conduc la obținerea unor blocuri neprimitive (cu excepția operației $\square$ definită pe mulțimile B_3, B_c) este ușor de văzut. Exemplele prezentate n figurile 3, 4 și 5 ilustrează acest lucru.

În legătură cu figura 4 se poate remarca faptul că prin operația de dihotomie-if se obține o structură similară, dar nu identică, cu una dintre structurile obținute în [4] (cunoscută sub denumires IF-THEN-ELSE). Diferența dintre structura redată în figura 4 și structura asemă-

nătoare din [4] este dată de evidențierea blocului $b_1 \in B_c$ pe figura respectivă.

În continuare, vom prezenta două propoziții care ne vor conduce, în final, la definirea modalității de lucru top-down-structurate.

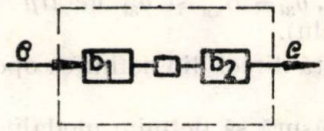


Fig. 3

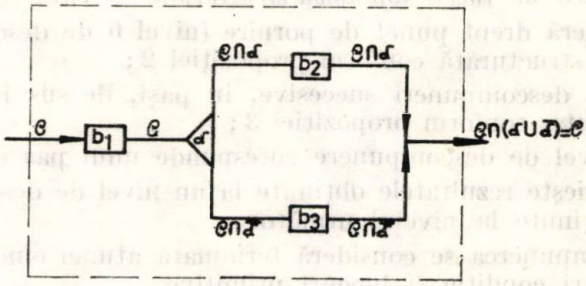


Fig. 4

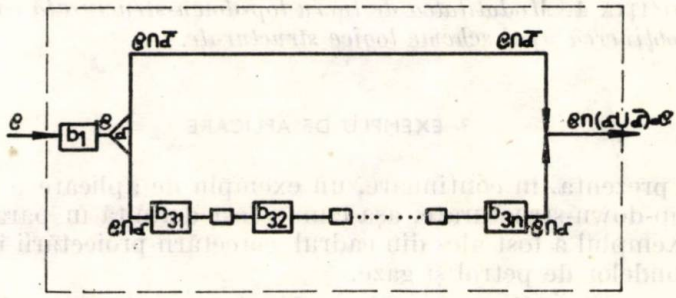


Fig. 5

PROPOZIȚIA 2. *∀ schemă logică cu mulțimea nodurilor* $|G|=\{i, i', v, e\}$, *unde i este nod de intrare, i' — nod care are precedent unic nodul i, v — nod care are precedent unic nodul i' și căruia i se asociază un simbol funcțional, e- nod de ieșire, este o schemă logică structurată.*

Demonstrație. Fie $\alpha_{i'}$ simbolul predicativ asociat nodului i' și fie $\mathcal{C}_{in}=f(\alpha_{i'})=1$. Aplicația δ_i de sursă i' și de capăt v conduce la contextul $\mathcal{C}_v=\mathcal{C}_{in}\cup f(\alpha_1)$, unde $\alpha_1=\alpha_{i'}$, adică $\mathcal{C}_v=\mathcal{C}_{in}\cup f(\alpha_{i'})=\mathcal{C}_{in}\cup\mathcal{C}_{in}=\mathcal{C}_{in}$. Deoarece lui v îi este asociat un simbol funcțional urmează, conform propoziției 1, că aplicația δ_i de sursă v și capăt e, păstrează invariant contextul, deci $\mathcal{C}_e=\mathcal{C}_{in}$.

PROPOZIȚIA 3. (REGULA DE DESCOMPUNERE). $\forall b \in B_{np}$ $(b \notin Bp)$, *poate fi descompus, la un pas, în :*

a) *minimum două blocuri* b_1, $b_2 \in B_{np}$ *legate prin operația de compunere* $(\square)$;

sau

b) *maximum trei blocuri dintre care*: $b_1 \in B_c$ și b_2, $b_3 \in B_{np}$, *legate prin operația de dihotomie-dacă* (*if*) ($\lhd$ — *if*);
sau

c) *maximum trei blocuri dintre care* $b_1 \in B_c$, $b_2 \in \emptyset$ și $b_3 \in B_{np}$, $b_3 = b_{31} \square b_{32} \square \ldots \square b_{3n}$, $b_{3i} \in B_{np}$ și b_{3i} *de tip* n, *legate prin operația de dihotomie-ciclu* ($\lhd$-ciclu).

Demonstrația rezultă direct din definirea operațiilor de compunere și de dihotomie.

Sîntem acum în măsură să definim modalitatea de lucru top-down-structurată.

Modalitatea de lucru top-down-structurată se caracterizează prin:

a) consideră drept punct de pornire (nivel 0 de descompunere), o schemă logică structurată conform propoziției 2;

b) aplică descompuneri succesive, în pași, de sus în jos și de la stînga la dreapta, conform propoziției 3;

c) un nivel de descompunere corespunde unui pas de sus în jos;

d) înlocuiește rezultatele obținute la un nivel de descompunere cu rezultatele obținute la nivelul următor;

e) descompunerea se consideră terminată atunci cînd toate blocurile sînt blocuri condiție și blocuri primitive.

Devine acum evidentă ultima propoziție pe care o mai prezentăm.

PROPOZIȚIA 4. *Modalitatea de lucru top-down-structurată conduce întotdeauna la obținerea unei scheme logice structurate.*

3. EXEMPLU DE APLICARE

Vom prezenta, în continuare, un exemplu de aplicare a modalității de lucru top-down-structurate, așa cum a fost definită în paragraful 2 al lucrării. Exemplul a fost ales din cadrul cercetării-proiectării în domeniul forajului sondelor de petrol și gaze.

Se propune realizarea unui produs informatic care să calculeze, din sută în sută de metrii, regimul hidraulic optim al unei sonde în foraj, pe baza criteriului presiunii minime la pompe [18, 23].

În termeni generali, problema stabilirii regimului hidraulic optim al unei sonde în foraj, poate fi formulată astfel: să se determine gama de perechi debit-suprafață a duzelor, cu care să se poată asigura un regim hidraulic eficient[1)], cu o presiune minimă la pompele de foraj, pe tot parcursul săpării unei sonde [23].

În cele ce urmează, ne propunem să realizăm schema logică a produsului informatic și transpunerea ei într-un limbaj de tip FORTRAN *simplificat*. Impunerea unui astfel de limbaj a urmărit două scopuri și anume: prezentarea unui exemplu ilustrativ (suficient de complex dar, în același timp, care să nu prezinte un grad prea mare de detaliere) și

---

1) Prin regim hidraulic eficient se înțelege regimul hidraulic care conduce la realizarea unei antrenări complete a materialului dislocat.

relevarea faptului că modalitatea de lucru top-down-structurată poate fi aplicată, ea însuşi succesiv, la diverse nivele de detaliere permiţînd pentru un anumit nivel (diferit de ultimul din punctul de vedere al realizării integrale a produsului) testarea prin simularea execuţiei.

Limbajul de tip FORTRAN simplificat ce ne propunem să-l uti lizăm se caracterizează prin următoarele :

a) dispune numai de constante şi variabile întregi neindexate;

b) expresiile aritmetice sînt formate numai din constante şi variabile conform punctului a) şi din operatorii : + şi — ;

c) expresiile relaţionale sînt formate numai din constante şi variabile conform punctului a) şi (sau) din expresii aritmetice conform punctului b) şi din operatorii : *.LT.*, *.LE.*, *.EQ.*, *.NE.*, *.GE.*, *.GT.* ;

d) expresiile logice sînt formate numai din expresii relaţionale conform punctului c) şi din operatorii : *.OR.*, *.AND.*, *.NOT.* ;

e) dispune numai de următoarele instrucţiuni de conducere a fluxului execuţiei : *GOTO* necondiţionat, *IF* logic, *DO* ;

f) dispune numai de instrucţiuni de atribuire ce utilizează expresii aritmetice conform punctului b) ;

g) dispune numai de instrucţiunea de scriere *WRITE* cu *FORMAT* ;

h) dispune numai de posibilitatea definirii şi apelării procedurilor de tip subrutină.

În acest caz, avînd în vedere cele discutate în paragraful 2, se poate spune că :

un *bloc neprimitiv* poate să conţină toate tipurile de instrucţiuni de la punctele *e*), ...,*h*) ;

un *bloc primitiv-condiţie* este o expresie relaţională sau logică, conform punctelor c) şi d) ;

un *bloc primitiv* conţine numai tipurile de instrucţiuni de la f) şi (sau) g) şi (sau) h).

Pentru calculul pierderilor de presiune în sistemul de circulaţie al sondei, se iau în considerare situaţiile ilustrate de figurile 6*a*...6*d*, şi anume :

coloană de tubaj simplă, garnitură de foraj simplă (fig. 6*a*) ;

coloană de tubaj simplă, garnitură de foraj combinată (fig. 6*b*) ;

coloană de tubaj pierdută (liner), garnitură de foraj simplă (fig. 6*c*) ;

coloană de tubaj pierdută (liner), garnitură de foraj combinată (fig. 6*d*).

Pe figurile 6*a*...6*d*, notaţiile au următoarele semnificaţii :

IL1 este lungimea prăjinilor de diametrul cel mai mic ;

IL2 — lungimea prăjinilor de diametrul cel mai mare ;

ILPG — lungimea prăjinilor grele ;

IL12 — lungimea coloanei pierdute minus ILPG ;

IL11 — lungimea ultimei coloane tubate înaintea linerului ;

IL — lungimea coloanei simple minus ILPG.

În figurile 7 și 8 se prezintă, sub formă grafică, rezultatul aplicării modalității de lucru top-down-structurate pentru atingerea obiectivului ce ni l-am propus.

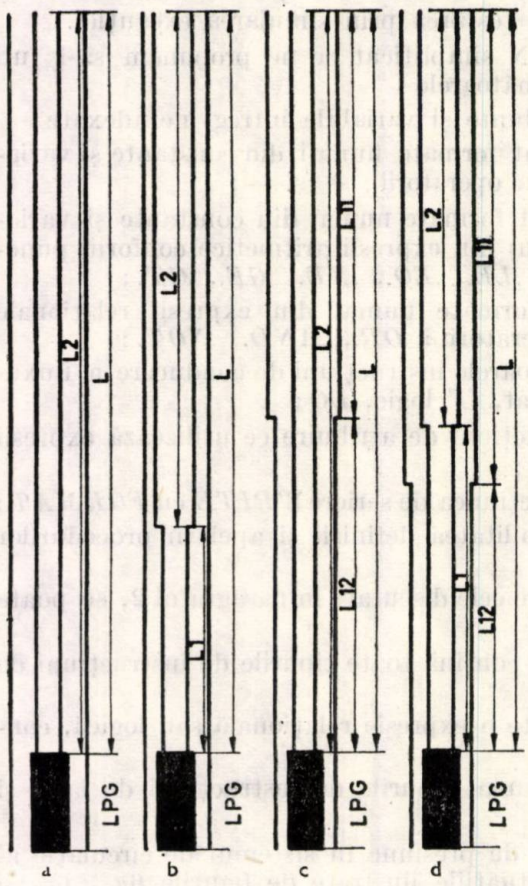


Fig. 6

În afara notațiilor preluate din figurile 6*a*...6*d*, celelalte notații din figurile 7 și 8 au următoarele semnificații :

⟨⟩ simbolizează un bloc neprimitiv ;

□ — bloc primitiv (condiție sau propriu zis) ;

◁ — operator de dihotomie ;

HIDRA — întregul produs informatic ;

INIT — bloc de inițializare ;

DIR — bloc director ;

CIT — bloc de citire date ;

CONTR — bloc de control date ;

CALCUL — bloc de calcul de nivel 2 ;

K — contor de erori pentru date ;

CALC — bloc de calcul de nivel 3 ;

IPC — puterea hidraulică calculată ;

IH — adîncimea curentă a sondei ;

CA — bloc de calcul de nivel 4 ;

IPP — putere hidraulică maximă a pompelor ;

IHF — adîncimea finală a sondei ;

C — bloc de calcul de nivel 5 ;

PIERDH — bloc de calcul pierderi hidraulice de nivel 6 ;

CRITPM — bloc de calcul parametrii regim hidraulic de nivel 6 ;

CALCP — bloc de calcul pierderi hidraulice de nivel 7 ;

CALCPAR — bloc de calcul parametrii regim hidraulic de nivel 7 ;

AFIS — bloc afișare rezultate ;

PIERD1, PIERD2 — blocuri de calcul pierderi hidraulice de nivel 8 ;

SCRPAR — bloc scriere parametrii regim hidraulic ;

P11, P12, P21, P22 — blocuri de calcul pierderi hidraulice de nivel 9.

Pe baza rezultatelor prezentate în figurile 7 și 8 s-a scris programul în limbajul tip FORTRAN simplificat pe care l-am adoptat. Acest program va fi prezentat în continuare. Se poate observa, din consultarea programului, tehnica de prezentare care conduce la autodocumentarea produsului informatic.

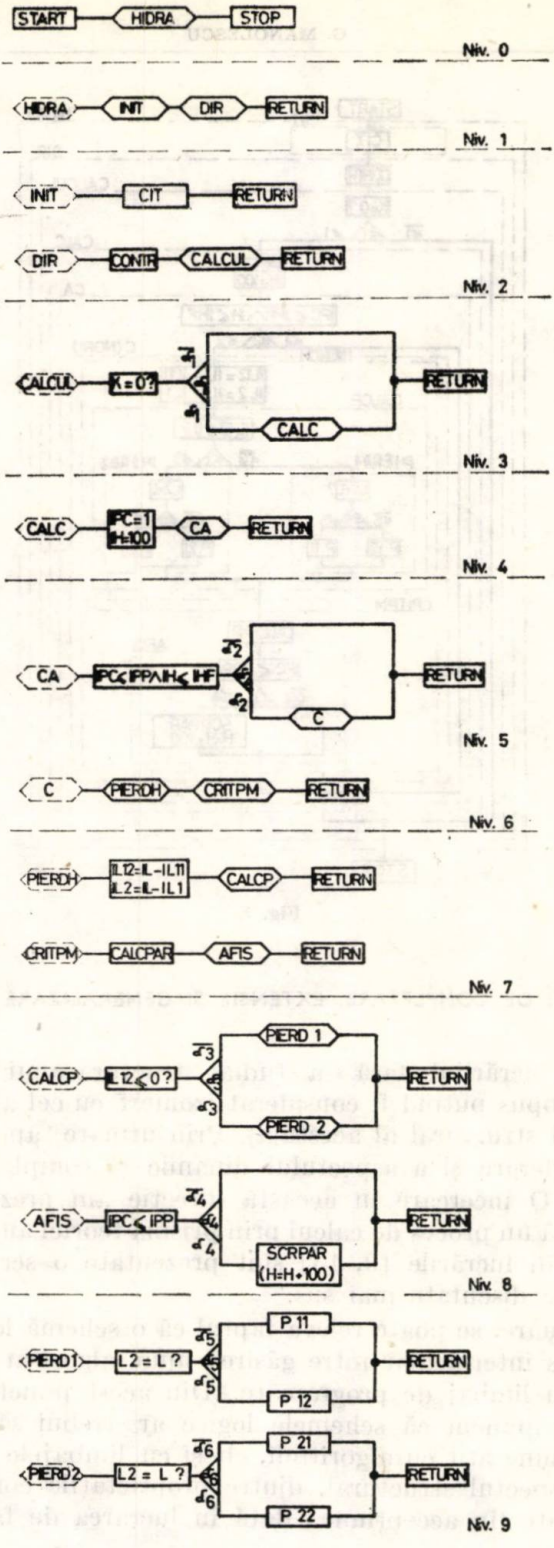

START
HIDRA
STOP
Niv. 0
HIDRA
INIT
DIR
RETURN
Niv. 1
INIT
CIT
RETURN
DIR
CONTR
CALCUL
RETURN
Niv. 2
CALCUL
X=0?
RETURN
CALC
Niv. 3
CALC
IPC=1
H=100
CA
RETURN
Niv. 4
CA
IPC≤IPPA H≤HF
RETURN
C
Niv. 5
C
PIERDH
CRITPM
RETURN
Niv. 6
PIERDH
IL12=IL-IL11
IL2=IL-IL1
CALCP
RETURN
CRITPM
CALCPAR
AFIS
RETURN
Niv. 7
CALCP
IL12≤0?
PIERD 1
RETURN
PIERD 2
AFIS
IPC≤IPP
RETURN
SCRPAR
(H=H+100)
Niv. 8
PIERD1
L2=L?
P 11
RETURN
P 12
PIERD2
L2=L?
P 21
RETURN
P 22
Niv. 9

Fig. 7

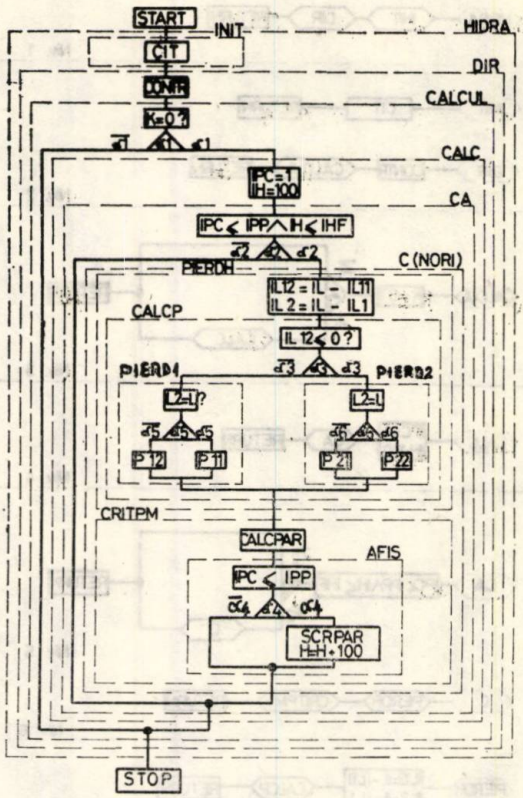


Fig. 8

4. POSIBILITĂȚI DE COMPLETARE, EXTENSIE ȘI GENERALIZARE A MODELULUI

În cadrul lucrării de față s-a studiat structura unui produs informatic, modelul propus putînd fi considerat izomorf cu cel al unui proces de calcul (aspectul structural al acestuia). Prin urmare apare posibilitatea luării în considerare și a aspectului dinamic și completarea modelului în acest sens. O încercare în această direcție am prezentat-o în [19], unde se studiază un proces de calcul prin prisma teoriei automatelor finite. De asemenea, în lucrările [9, 13] sînt prezentate o serie de sugestii în legătură cu cele discutate mai sus.

În continuare, se poate releva faptul că o schemă logică constituie, de fapt, un pas intermediar între găsirea unui algoritm și transpunerea acestuia într-un limbaj de programare. Din acest punct de vedere este normal să presupunem că schemele logice ar trebui să prezinte unele proprietăți comune atît cu algoritmii, cît și cu limbajele de programare. Revenind la aspectul structural, dintre proprietățile comune schemelor logice structurate (în accepțiunea dată în lucrarea de față acestui con-

cept) și limbajelor de programare se poate întrevedea structura tip arborescență, ceea ce ne sugerează ideia studiului schemelor logice structurale prin intermediul arborilor de deducție tratați în cadrul limbajelor libere de context (care modelează limbajele de programare). În acest sens, sugestii pot fi obținute din [3, 7]. Un alt aspect, legat tot de structuralitate, ce poate fi întrevăzut, este studierea unei scheme logice nestructurate ca o „abatere" de la o schemă logică structurată echivalentă, similar cu modul de studiu din [24] (utilizînd unele proprietăți ale arborescențelor) pentru a compara limbajul poetic cu limbajul științific.

În ceea ce privește posibilitățile de generalizare ale modelului, trebuie mai întîi arătat că modelul propus a încercat să trateze aspectul structural al unui proces (de calcul) caracterizat, în principal, printr-o singură intrare și o singură ieșire. Se poate emite ipoteza că unele procese similare din industrie ar putea fi descrise de asemenea prin tipul de model respectiv. O generalizare deosebit de interesantă, sugerată de

```
C       SISTEM:      TEST TDS
C       PROGRAM:     HIDRA
C       INPUT:       DATE SONDA FORAJ
C       OUTPUT:      PARAMETRII REGIM HIDRAULIC
C       PRELUCRARE:  SE CALCULEAZA DIN SUTA IN SUTA DE METRII
C                    REGIMUL HIDRAULIC OPTIM PENTRU CRITERIUL
C                    PRESIUNII MINIME LA POMPE DACA PUTEREA
C                    HIDRAULICA CALCULATA DEPASESTE PUTEREA
C                    POMPEI DE FORAJ SE OPRESTE PROGRAMUL .
C                    INAINTE DE ATINGEREA ADINCIMII FINALE
C       ***************************************************
C       *                                                 *
C       *            SECTINUE DIRECTOARE                  *
C       *                                                 *
C       ***************************************************
C             INIT        PROCEDURA DE INITIALIZARE
C             DIR         PROCEDURA DIRECTOARE
C             CIT         PROCEDURA DE CITIRE
C             CONTR       PROCEDURA DE CONTROL DATE
C             CALCUL      PROCEDURA DE CALCUL DE NIVEL 2
C             CALC        PROCEDURA DE CALCUL DE NIVEL 3
C             CA          PROCEDURA DE CALCUL DE NIVEL 4
C             C           PROCEDURA DE CALCUL DE NIVEL 5
C             PIERDH      PROCEDURA CALCUL PIERDERI HIDR NIV 6
C             CRITPM      PROCEDURA CALCUL REGIM HIDR NNV 6
C             CALCPM      PROCEDURA CALCUL PIERDERI HIDR NIV 7
C             CALCPAR     PROCEDURA CALCUL REGIM HIDR NIV 7
C             AFIS        PROCEDURA AFISARE REZULTATE
C             PIERD1      PROCEDURA CALCUL PIERDERI HIDR NIV 8
C             PIERD2      PROCEDURA CALCUL PIERDERI HIDR NIV 8
C             SCRPAR      PROCEDURA SCRIERE PARAM REG HIDR
C             P11...P22   PROCEDURA CALCUL PIERDERI HIDR NIV 9
C       ***************************************************
C       *                                                 *
C       *            SECTIUNE DATE                        *
C       *                                                 *
C       ***************************************************
C             IL      LUNGIME COL SIMPLA MINUS LPG
C             IL11    LUNGIME ULTIMA COL TUBATA INAINTE LINER
C             IL12    LUNGIME LINER MINUS LPG
C             ILPG    LUNGIME PRAJINI GRELE
C             IL2     LUNGIME PRAJINI DIAM MINIM
C             IL1     LUNGIME PRAJINI DIAM MAXIM
C             K       CONTOR ERORI DATE
C             IPC     PUTEREA HIDRAULICA CALCULATA
C             IH      ADINCIMEA CURENTA
C             IPP     PUTEREA HIDRAULICA POMPA

                                        TDS          11/01/79  15.

C             IHF     ADINCIME FINALA
C       ***************************************************
```

```
C
      CALL INIT(IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      CALL DIR (IL,IL11,IL1,IL2,IHF,IPP)
      STOP
      END
                                        TDS         11/01/79  15.54.57

C
      SUBROUTINE INIT(IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      CALL CIT (IL,IL11,IL1,IL2,IHF,IPP)
      RETURN
      END
                                        TDS         11/01/79  15.55.05

C
      SUBROUTINE DIR(IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      CALL CONTR(K)
      CALL CALCUL(K,IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      RETURN
      END
                                        TDS         11/01/79  15.55.10

C
      SUBROUTINE CIT(IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      IL=1000
      IL11=500
      IL1=400
      ILPG=200
      IHF=1600
      IPP=200
      RETURN
      END
                                        TDS         11/01/79  15.55.16

C
      SUBROUTINE CONTR(K)
      K=0
      RETURN
      END
                                        TDS         11/01/79  15.55.21

C
      SUBROUTINE CALCUL(K,IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      IF (K.EQ.0) GO TO 1
      CALL CALC(IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
    1 RETURN
      END
                                        TDS         11/01/79  15.55.25

C
      SUBROUTINE CALC(IL,IL11,IL1,IHF,IPP)
      IPC=1
      CALL CA(IL,IL11,IL1,IHF,IPP,IPC)
      RETURN
      END
                                        TDS         11/01/79  15.55.29
```

```
C
      SUBROUTINE CA(IL,IL11,IL1,IHF,IPP,IPC)
      DO 2 IH =100,100,7000
      IF((IPC.GT.IPP).AND.(IH.GE.IHF)) GO TO 1
      CALL C(IL,IL11,IL1,IPP,IPC)
    2 CONTINUE
    1 RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.33

C
      SUBROUTINE C(IL,IL11,IL1,IPP,IPC)
      CALL PIERDH(IL,IL11,IL1,IPP,IPC)
      CALL CRITPM(IPC,IPP)
      RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.37

C
      SUBROUTINE PIERDH(IL,IL11,IL1,IPP,IPC)
      IL12=IL-IL11
      IL2=IL-IL1
      CALL CALCP(IL,IL12,IL2)
      RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.37

                                    TDS          11/01/79   15.55.42

C
      SUBROUTINE CRITPM(IPC,IPP)
      CALL CALCPAR(IPC)
      CALL AFIS (IPC,IPP)
      RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.46

C
      SUBROUTINE CALCP(IL,IL12,IL2)
      IF (IL12.LE.0) GO TO 1
      CALL PIERD1(IL2,IL)
    1 CALL PIERD2(IL2,IL)
      RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.50

C
      SUBROUTINE CALCPAR(IPC)
      IPC=150
      RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.53

C
      SUBROUTINE AFIS(IPC,IPP)
      IF (IPC.LE.IPP) GO TO 1
      CALL SCRPAR
    1 RETURN
      END
                                    TDS          11/01/79   15.55.57

C
      SUBROUTINE PIERD1(IL2,IL)
      IF (IL2.EQ.IL) GO TO 1
      CALL P1
    1 CALL P1
      RETURN
      END
```

```
                                        TDS          11/01/79  15.56.01

C
                    SUBROUTINE PIERD2(IL2,IL)
                    IF (IL2.EQ.IL) GO TO 1
                    CALL P1
    1               CALL P1
                    RETURN
                    END
                                        TDS          11/01/79  15.56.05

C
                    SUBROUTINE SCRPAR
                    WRITE (108,1)
    1               FORMAT (5X,'PARAMETRII')
                    RETURN
                    END
                                        TDS          11/01/79  15.56.09

C
                      SUBROUTINE P1
                      WRITE (108,1)
    1                 FORMAT (5X,'PIERDERI HIDR')
                      RETURN
                      END
                                        TDS          11/01/79  15.56.09


MODULE    F%MDATA      TYPE   P    LONGUEUR    0128 (00296)
MODULE    INIT         TYPE   P    LONGUEUR    00A8 (00168)
MODULE    DIR          TYPE   P    LONGUEUR    0058 (00184)
MODULE    CIT          TYPE   P    LONGUEUR    0070 (00112)
MODULE    CONTR        TYPE   P    LONGUEUR    0030 (00048)
MODULE    CALCUL       TYPE   P    LONGUEUR    00A8 (00168)
MODULE    CALC         TYPE   P    LONGUEUR    00B0 (00176)
MODULE    CA           TYPE   P    LONGUEUR    00E0 (00224)
MODULE    C            TYPE   P    LONGUEUR    00C8 (00200)
MODULE    PIERDH       TYPE   P    LONGUEUR    0080 (00128)
MODULE    CRITPM       TYPE   P    LONGUEUR    0080 (00128)
MODULE    CALCP        TYPE   P    LONGUEUR    00A0 (00160)
MODULE    CALCPAR      TYPE   P    LONGUEUR    0030 (00048)
MODULE    AFIS         TYPE   P    LONGUEUR    0050 (00080)
MODULE    PIERD1       TYPE   P    LONGUEUR    0058 (00088)
MODULE    PIERD2       TYPE   P    LONGUEUR    0058 (00088)
MODULE    SCRPAR       TYPE   P    LONGUEUR    0040 (00064)
MODULE    P1           TYPE   P    LONGUEUR    0040 (00064)
```

lucrarea [12], pare să fie posibilitatea aplicării modelului la procesul (abstract) de proiectare tehnică și tehnologică. Trebuie să arătăm că unele încercări ale autorului în această direcție au dat rezultate promițătoare.

Primită la redacție la 17 ianuarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. R. M. Armstrong, *Modular programming in COBOL*, John Wiley and sons, New York (1973).
2. S. A. Basarab, *Formalizarea conceptului de program*, Seminarul de inteligență artificială, ICI, apr. (1978).
3. M. T. Bertini, Y. Tallineau, *Le COBOL structuré*, Ed. D'informatique, Paris (1974).
4. C. Böhm, G. Jacopini, *Flow diagrams, turing machines and languages with only two formation rules*, Com. of the ACM, May (1966).
5. R. Bosak ș.a., *An informational algebra*, System analysis techniques, John Wiley and Sons, New York (1974).
6. A. Celentano ș.a., *Indentification of syntax — directed translation schems*, A Günter (eds.) International computing symposium, North-Holland Pub. Co. (1971).
7. I. Creanga, C. Reischer, D. Simovici, *Introducere în algebra informatică — limbaje formale*, Ed. Junimea, Iași (1974).
8. O. J. Dahl, E. W. Dijkstra, C. A. R. Hoare, *Structured programming*, Academic Press, London and New York (1972).
9. J. B. Denis, *On the desing and specification of a common base language*, Symposium of computer and automata Polytechnic Institute of Brooklyn, apr. (1971).
10. E. W. Dijkstra, *The humble programmer*, Com. of the ACM, oct. (1972).
11. M. Drăgănescu, *Eficiența globală a utilizării calculatoarelor electronice în economia națională*, Sesiunea științifică ICI (1978).
12. I. Georgescu, *Cercetări privind elaborarea unui sistem de proiectare tehnică, asistată de calculator*, ICI (1978).
13. J. A. Gougen, Jr., *On homomorphisms, correctness, termination, unfoldments and equivalence of flow diagram programs*, Academic Press, Inc. (1974).
14. M. Guran, *Asupra strategiei și politicii în informatică, în raport cu dezvoltările tehnologice actuale*, Sesiunea științifică ICI (1978).
15. C. A. R. Hoare, *An axiomatic basis for computer programming*, Com. of the ACM. oct. (1969).
16. H. J. Hoffman, *Programming by selection*, A Günter (eds.) International computing symposium 1973, North-Holland Publ. Co. (1974).
17. K. Jensen, N. Wirth, *Pascal — user manual and report*, Springer-Verlag, New York—Heidelberg—Berlin (1975).
18. G. Manolescu, *Stabilirea regimului hidraulic optim la sondele în foraj* (dosar de programare), Centrul de calcul al Ministerului Minelor, Petrolului și Geologiei (1973).
19. — , *Proceduri de înlănțuiri pentru exploatarea sistemelor software*, Colocviul de informatică, Univ. Al. Cuza, Iași (1977).
20. — , *O încercare de formalizare a abordării top-down-structure, cu aplicare în informatică*, Sesiunea de comunicări științifice, ICI (1978).
21. — , *Sisteme informatice și analiză economică*, suport de curs, Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești (1978).
22. — , *Metode și tehnici moderne de proiectare și realizare a sistemelor informatice*, suport de curs, ICI-BNP (1978).
23. G. Manolescu, D. Olariu, *Determinarea regimului hidraulic optim al sondelor în foraj, pentru criteriul prsiunii minime la pompe, pe baza unui model de programare polinimial-convexă*, St. cerc. mec. apl., **37**, *5* și *6* (1978).

24. S. MARCUS, *Poetica matematică*, Edit. Academiei, 1970.
25. C. L. MCGOVAN, J. R. KELLY, *Top-down structured programming techniques*, Petrocelli and Charter, New York, (1975).
26. G. J. MYERS, *Reliable software through composite design*, Petrocelli and Charter, New York (1975).
27. W. W. PETERSON, *On the capabilites of while, repeal, and exit statements*, Com of the ACM, Aug. (1973).
28. T. RUS, *Structuri de date și sisteme operative*, Edit. Academiei 1974.
29. I. VĂDUVA, V. BALTAC, V. FLORESCU, I. FLORICICA, *Programarea structurată*, Edit. tehnică, 1978.
30. B. TEODORESCU, *Programarea structurată*, suport de curs, ICI (1977).
31. E. WAGNER, *Tree-structured programs*, Com. of the ACM, Nov. (1973).
32. N. WIRTH, *Program development by stepwise refinement*, Com of the ACM, Apr. (1971).
33. — , *For programming techniques to programming methods*, A Günter (eds.) International Computing Symposium 1973, North-Holland Publ. Co. (1974).
34. E. YOURDON, *Techniques of program structure and design*, Prentice Hall Inc., New Jersey (1975).

RECENZII

ILIE CONSTANTINESCU, CIPRIAN BOLOG, Mecanica, Buc., Edit. didactică şi pedagogică, 1979, 341 p., cu fig. şi tab.

Lucrarea conţine materialul capitolelor cursului de mecanică prevăzute de programa analitică pentru secţiile de inginerie mecanică structurat într-o nouă ordine mai unitară decît aceea pe care o permite succesiunea clasică Statică-Cinematică-Dinamică utilizată de autorii cursurilor de Mecanică publicate pînă în prezent la noi în ţară.

Mecanica punctului material, mecanica solidului rigid şi mecanica sistemelor de puncte materiale şi de solide rigide sînt tratate complet în cadrul a trei capitole separate.

Celelalte trei capitole ale cărţii tratează respectiv complemente de matematică, teoremele fundamentale ale mecanicii şi mecanica analitică.

O altă particularitate a lucrării constă în faptul că fenomenele ce prezintă discontinuităţi în timp sau în spaţiu sînt tratate cu ajutorul teoriei distribuţiilor ceea ce permite menţinerea structurii relaţiilor matematice utilizate pentru studierea fenomenelor care nu prezintă discontinuităţi.

Nivelul ştiinţific ridicat, terminologia adecvată şi figurile clare şi complete caracterizează această lucrare.

Două importante teoreme ale dinamicii şi anume teorema momentului cinetic şi teorema energiei cinetice au fost extinse la toate cazurile de aplicabilitate posibile, în ce priveşte polul de referinţă.

Calculul vibraţiilor liber sau forţate a sistemelor mecanice cu masă continuă, considerate nedisipative sau disipative, a fost realizat prin utilizarea unor operatori autoadjuncţi ceea ce conferă procedeului un mare grad de generalitate.

Utile sînt construcţiile grafice ce permit stabilirea poziţiei polului acceleraţiilor în cadrul mişcării plan-paralele a solului rigid.

Metoda echilibrului nodurilor şi metoda secţiunilor, curent utilizate pentru calculul eforturilor în zăbrelele unui sistem articulat plan, au fost adaptate pentru a permite calculul eforturilor în zăbrelele sistemelor articulate spaţiale.

Contribuţiile originale aduse de cei doi autori, atît în ce priveşte fondul ştiinţific cît şi forma de prezentare a lucrării, conferă acesteia o valoare deosebită.

Cele douăsprezece lucrări ştiinţifice ale autorilor menţionate la bibliografie şi care au fost utilizate la elaborarea prezentei cărţi scot în evidenţă amploarea contribuţiilor ştiinţifice originale de conţinut aduse de cei doi autori ai cărţii.

Prin publicarea mecanicii de prof. dr. doc. ing. Ilie Constantinescu şi şef de lucrări ing. Ciprian Bolog, Editura Didactică şi Pedagogică a pus la dispoziţia studenţilor din învăţămîntul tehnic superior, inginerilor şi cercetătorilor din ţara noastră o lucrare utilă şi preţioasă.

Andrei Ripianu

I. SETEANU, R. POPA, A. MARINOV

AMORTIZAREA UNDELOR DE SUPRAFAȚĂ ÎN ALBII DESCHISE

În lucrare se analizează curgerea nepermanentă cu suprafață liberă, în albii deschise, cu referire la undele de stăvilire în canalele de aducțiune ale U.H.E. Amortizarea regimului nestaționar produs în modelele experimentale se studiază în cadrul curgerii laminare cu sistemul de ecuații Navier-Stokes.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 619—627
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

I. CREȚU

MODELĂRI NUMERICE ALE MIȘCĂRII PETROLULUI ȘI GAZELOR ÎN MEDII POROASE, ÎN CONDIȚIILE TRANSFERULUI MASIC INTERFAZIC

În lucrare sînt prezentate aspectele de bază referitoare la modelările numerice ale mișcării fluidului bifazic petrol-gaze în medii poroase, cu ajutorul modelelor matematice volumice și a celor compoziționale.

După ce sînt expuse caracteristicile esențiale ale modelelor volumice și compoziționale, în cadrul a două scheme logice de ansamblu sînt discutate principalele aspecte ale unor modelări numerice relative la utilizarea unui model matematic volumic, respectiv compozițional. O atenție mai deosebită este acordată stabilirii datelor de intrare și utilizării criteriilor de alegere a valorilor treptei de timp.

Pentru modelarea numerică a mișcării bifazice cu ajutorul unui model compozițional este descris, prin intermediul unei scheme logice de ansamblu, un algoritm al comportării de fază.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p.629—635
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

AL. D. STAN

CURGEREA LAMINARĂ A FLUIDELOR ÎN SPAȚII INELARE

În tehnică se întîlnesc frecvent situații în care un fluid curge printr-un spațiu inelar. Acesta este, în majoritatea cazurilor, excentric sau cu excentricitate variabilă. Pentru spațiul inelar fără excentricitate, precum și pentru cel cu excentricitate în cazul unei curgeri laminare a unui fluid newtonian se indică formula de calcul a pierderii de presiune, elementul cel mai important în aplicațiile practice.

Relațiile obținute acoperă toate situațiile întîlnite în tehnica de șantier și concordă foarte bine cu cele din literatura de spcialitate.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 637—648
Redacția: București, Str. Const. Mile nr. 15

MIHAI POPESCU

STUDIUL MANEVRELOR OPTIME ALE VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN APROPIEREA PUNCTELOR DE LIBRAȚIE DIN SISTEMUL PĂMÎNT-LUNĂ

În lucrare se studiază problema manevrelor optime cu minimum de combustibil în apropierea punctelor coliniare de librație din sistemul Pămînt-Lună.

După un studiu asupra naturii extremumului care demonstrează că funcționala consumului de combustibil este într-adevăr minimă de-a lungul extremalei, se determină apoi soluțiile riguroase ale sistemului de ecuații diferențiale ale extremalelor care generalizează pentru cazul $\omega \neq 0$ soluțiile din [1].

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 649—660
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA MUNTEANU

ASUPRA UNEI PROBLEME PLANE DE CONTACT

Lucrarea se ocupă de studiul contactului dintre o piesă cu contur exterior simetric oarecare, conținînd o gaură în care intră un bolț cu sau fără joc. Încărcarea se face prin intermediul bolțului, problema considerîndu-se plană. Se studiază două situații : unghi de contact mic, caz care se poate rezolva cu ajutorul rezultatelor problemei Boussinesq în plan ; și unghi de contact mare, caz în care se ține cont și de influența conturului exterior al celor două piese în contact.

Se dă o metodă de rezolvare numerică, originală plecînd de la ecuațiile teoriei elasticității în coordonate polare, autorul elaborînd mai multe programe de calculator în FORTRAN. În încheiere sînt discutate cîteva rezultate numerice obținute prin rularea programelor în cazul unor exemple, rezultate date sub formă de diagrame.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 661—680
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ALEXANDRU NICOLAU, MIRCEA IEREMIA

STUDIUL VOALĂRII PLĂCILOR PLANE PRIN METODE ITERATIVE DE CALCUL

Lucrarea abordează problema voalării plăcilor plane dreptunghiulare în domeniul elastic, acționate oarecum în planul lor median, folosind o metodă iterativă de calcul.

Se studiază ecuația diferențială a suprafeței medii deformate a plăcii ușor voalate, cu anumite condiții la limită și se determină soluția aproximativă pe cale analitică sau numerică. Problema se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații integrale printr-un procedeu iterativ.

Se efectuează calculul primelor două aproximații ale procedeului rapid convergent și rezultă săgețile plăcii voalate.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 681—694
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN FRANGOPOL

CONCEPTE PROBABILISTE ÎN OPTIMIZAREA STRUCTURILOR. II

Lucrarea tratează problema optimizării structurilor prin prisma conceptelor moderne probabilistice. În prima parte a lucrării (I) se propune o ierarhizare a problemelor de optimizare și se analizează o serie de aspecte specifice procesului optimizării. Partea a doua a lucrării (II) este consacrată concepției probabilistice de optimizare a structurilor, ținîndu-se seama de criteriile de optimizare specifice și de metodele matematice necesare pentru evaluarea siguranței structurilor. După ce se prezintă exemple de optimizare probabilistică, lucrarea se încheie cu concluzii privind stadiul actual al aplicării conceptelor probabilistice în optimizarea structurilor, indicîndu-se și obiectivele spre care trebuie orientată cercetarea în viitor.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 695—715
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ALECSANDRU PAVEL

PRETENSIONAREA TENDOANELOR REZERVOARELOR SFERICE. I

Se expune rezolvarea originală a problemei pretensionării tendoanelor rezervoarelor sferice și deci a determinării caracteristicilor de pretensionare care să asigure conlucrarea spațială a sistemului de rezemare al rezervoarelor date. Rezolvarea respectivă privește cazurile specifice cînd se fac diferențieri din punctul de vedere al schemelor de solicitare a tendoanelor, studiindu-se detaliat și distinct sau combinat efectele solicitărilor de natură mecanică și termică.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 5, 1979, p. 717—730
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

AUREL OPREAN, CONSTANTIN CODREANU

CERCETĂRI PRIVIND DINAMICA SISTEMELOR HIDRAULICE DE ACȚIONARE CU ACUMULATOR

În lucrare se elaborează modelul matematic generalizat al sistemelor de acționare hidrostatică cu acumulator pneumohidraulic utilizat ca sursă de energie. Sistemul hidraulic de acționare considerat se referă la mișcarea circulară, iar ecuația diferențială de funcționare, dedusă în forma sa generală, s-a rezolvat pentru cazul evoluției izotermice a încărcăturii de gaz din acumulator.

Metoda de calcul propusă permite determinarea vitezei unghiulare a motorului hidraulic precum și timpul de acționare a acestuia.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 5, 1979, p. 731—739
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

GORUN MANOLESCU

O ÎNCERCARE DE FORMALIZARE A ABORDĂRII TOP-DOWN-STRUCTURATE A PRODUSELOR INFORMATICE CU APLICARE LA CERCETAREA, PROIECTAREA TEHNICĂ ȘI TEHNOLOGICĂ

Se prezintă o modalitate de concepere și realizare a unui produs informatic (sistem de programe) ce se poate aplica în domeniul cercetării, proiectării tehnice și tehnologice. La baza decelării acestei modalități se află un model matematic propus de autor. În lucrare se prezintă și un exemplu de aplicare din cadrul cercetării științifice și al proiectării regimului hidraulic pentru o sondă de foraj.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 5, 1979, p. 741—760
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

F 2557

6
TOMUL 38
noiembrie —
decembrie
1979

1980 MAR 12

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*

Membri :

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. RADU PRIŞCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. DAN PANTAZOPOL,
Ing. I. CRIŞAN,
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, redactor responsabil

Membri :

Acad. I. ANTON
Acad. D. MATEESCU,
Ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa : ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70 116, str. 13 Decembrie nr. 3, P. O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei **70 701,** str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
71 021, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38, nr. 6 noiembrie—decembrie 1979

SUMAR

STUDII

MIHAI D. STAN, Asupra ecuaţiilor de mişcare într-un mediu poros micropolar deformabil 765

CONSTANTIN STERE, DAN STEMATIU, Modelarea prin metoda elementelor finite a oscilaţiilor libere ale suprafeţelor de apă 773

MIRCEA ORĂŞANU, Asupra mişcării printr-un baraj permeabil omogen şi izotrop 791

CONSTANTIN GH. POPA, Asupra condiţiilor la limită şi iniţiale în dezlocuirea imiscibilă a ţiţeiului cu un amestec bifazic gaze-apă 807

H. DUMITRESCU, O familie biparametrică de profile laminare de viteză 817

ALECSANDRU D. STAN, Mişcări turbulente prin spaţii inelare 825

N. MACOVEI, Mişcarea unui fluid binghamian la deplasarea axială relativă a doi cilindri circulari coaxiali. Situaţii posibile 839

NICULAE MANAFI, SERGIU CONONOVICI, Algoritme pentru calculul cinetostatic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale binare, utilizate în programul general CINCINET 847

ECATERINA BORCIA, Modelarea comportării mecanice a masivelor de pământ în sensul teoriei curgerii plastice 863

N. CALOTĂ, Cercetări privind dinamica procesului de introducere a materialului tubular în sondă 873

N. POSEA, N. TATU, GH. ZECHERU, AL. ANGHEL, GH. HOTEA, Criterii şi metode pentru calculul corpurilor prevenitoarelor de erupţie orizontale duble 885

CONSTANTIN ACKER, Model mecanic al solicitărilor statice pentru motorul liniar cu piston în care cursa pistoanelor este verticală 901

LUCIAN CĂPITANU, Influenţa deformaţiei elastice a elementului cilindric, asupra calculului uzurii elementului plan al unei cuple de frecare de tip Timken 907

VOICU SAFTA, TIBERIU SCHULZ, IOAN ARGHIRIADE, Influenţa concentrării şi amplitudinii tensiunii asupra propagării fisurii la solicitări ciclice la un oţel cu un conţinut sub 0,04% carbon 915

INDEX 923

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 6 noiembrie–decembrie 1979

SUMAR

STUDII

MIHAI D. STAN, Asupra ecuatiilor de mişcare într-un mediu poros micropolar deformabil 765

CONSTANTIN STERE, DAN STEMATIU, Modelarea prin metoda elementelor finite a oscilatiilor libere ale suprafeţelor de apă 773

MIRCEA ORĂŞANU, Asupra mişcării printr-un baraj permeabil omogen şi izotrop 791

CONSTANTIN GH. POPA, Asupra condiţiilor la limită şi iniţiale în dezlocuirea imiscibilă a ţiţeiului cu un amestec bifazic gaze-apă 807

H. DUMITRESCU, O familie biparametrică de profile laminare de viteză 817

ALECSANDRU D. STAN, Mişcări turbulente prin spaţii inelare 825

N. MACOVEI, Mişcarea unui fluid binghamian la deplasarea axială relativă a doi cilindri circulari coaxiali. Situaţii posibile 839

NICOLAE MAKAFI, SERGIU CONONOVICI, Algoritme pentru calculul elastoplastic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale binare, utilizate la programul general CENCINET 847

ECATERINA BORCIA, Modelarea comportării mecanice a masivelor de pământ în sensul teoriei curgerii plastice 863

N. CALOTĂ, Cercetări privind dinamica procesului de introducere a materialului tubular în sondă 875

N. POSEA, N. TATU, GH. ZECHERU, AL. ANGHEL, GH. HOTEA, Criterii şi metode pentru calculul corpurilor preventoarelor de erupţie orizontale duble 885

CONSTANTIN ACKER, Model mecanic al solicitărilor statice pentru motorul liniar cu piston în care cursa pistoanelor este verticală 901

LUCIAN CĂPITANU, Influenţa deformaţiei elastice a elementului cilindric, asupra calculului uzurii elementului plan al unei cuple de frecare de tip Timken 907

VOICU SAFTA, TIBERIU SCHULZ, IOAN ARGHIRIADE, Influenţa concentrării şi amplitudinii tensiunii asupra propagării fisurii la solicitări ciclice la un oţel cu un conţinut sub 0,04% carbon 915

INDEX 923

ST. CERC. MEC. APL., TO 138, NR. 6, 1979, P. 763–926

ASUPRA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE ÎNTR-UN MEDIU POROS MICROPOLAR DEFORMABIL

MIHAI D. STAN
Institutul de cercetări textile, București

Folosindu-se un procedeu de mediere bazat pe teoria distribuțiilor se construiește un model al curgerii unui fluid viscos printr-un mediu poros micropolar deformabil.

1. INTRODUCERE

Mecanica mediului poros deformabil saturat cu un fluid, teorie cunoscută sub numele de teoria consolidației constituie o teorie relativ nouă cu multe aplicații în diferite domenii cu caracter tehnic : geofizică, seismologie, mecanica pământurilor, dinamica construcțiilor, industria petrolieră etc.

Primul model mai consistent al teoriei consolidației îl datorăm lui K. Terzaghi [21]. O tratare într-o manieră clasică a problemelor de teoria consolidației o datorăm lui M.A. Biot [3—7] și V.N. Nicolaevski [20].

După 1957, odată cu abordarea modernă a teoriei mixturilor, au apărut primele încercări de tratare modernă a mediilor poroase deformabile. Primele încercări în acest sens sînt cele ale lui A.E. Green și R.J. Stell [15], M. Crochet și Naghdi P. [8], cărora le urmează o serie întreagă de lucrări : J.D. Ingram și A. Bedford [2], I. Karagnacz [17], D. Kenyon [18—19], H. Ene [10], W. Derski și H. Ene [9] etc. În legătură cu bibliografia consacrată acestei probleme amintim articolele de sinteză [1], [20].

O manieră originală de tratare a ecuațiilor de mișcare ale mediilor poroase deformabile este cea expusă în [10] în care se folosește un procedeu de mediere bazat pe aparatul matematic al teoriei distribuțiilor.

În cele ce urmează folosind același procedeu de mediere și teoria mediilor micropolare, teorie fundamentată de A.C. Eringen [11], vom încerca să construim un model al curgerii unui fluid vîscos printr-un mediu poros micropolar deformabil.

2. DESCRIEREA PROCEDEULUI DE MEDIERE

Procedeul este pe larg expus în [12]. Vom aminti aici esența metodei. Dacă $\alpha(x, t)$ este o funcție integrabilă în întreg spațiul, avînd proprie-

tatea

$$\int \alpha(x, t)\, dx\, dt = 1, \tag{1}$$

vom defini mărimea macroscopică $a_m(x, t)$ a mărimii microscopice $a(x, t)$ prin relaţia

$$a_m(x, t) = (a - \bar{\alpha})(x, t), \tag{2}$$

unde

$$\bar{\alpha}(x, t) = \alpha(-x, -t).$$

Derivatele mărimii macroscopice $a_m(x, t)$ sînt date de

$$\frac{\partial a_m}{\partial x} = \left\{\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right) + [a]\, n_x\, \delta_{f_s}\right\} * \bar{\alpha}(x, t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial a_m}{\partial t} = \left\{\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right) + [a]\, \vec{n}\, \vec{v}\, \delta_{f_s}\right\} * \bar{\alpha}(x, t), \tag{4}$$

unde δ_{f_s} este distribuţia Dirac, $\vec{V}$ — viteza de deplasare a interfeţei, $[a]$ saltul mărimii a la interfaţă, $\vec{n}$ normala la interfaţă.

3. ECUAŢIILE LA NIVEL MICROSCOPIC

Ne situăm în ipoteza unui fluid vîscos newtonian care saturează poriu unui mediu poros elastic micropolar, neglijăm de asemenea efectele termice.

Aşadar, pentru faza fluidă la nivel microscopic avem :

— ecuaţia de continuitate :

$$v_{i,i} = 0, \tag{5}$$

— ecuaţiile de mişcare :

$$\rho_f \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_f v_i v_j + p\, \delta_{ij} - \tau_{ij}) = \rho_f f_{fi}, \tag{6}$$

— ecuaţiile constitutive :

$$\tau_{ij} = \lambda v_{k,k}\, \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{i,j}), \tag{7}$$

unde ρ_f este densitatea fluidului, v_i — viteza relativă ($v_i = u_{fi} - u_{si}$) a fluidului, p — presiunea fluidului, τ_{ij} — tensorul tensiune, f_{fi} — forţa masică, δ_{ij} — tensorul lui Kronecker, λ, μ — coeficienţi de materiale.

Pentru mediul poros micropolar vom presupune că la nivel microscopic sînt adevărate ecuaţiile :

— ecuaţiile de mişcare :

$$\sigma_{ji,j} + \rho_s f_{si} = \rho_s \ddot{u}_i, \tag{8}$$

$$m_{ji,j} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \rho_s \tilde{f}_{si} = I_{ij}\ddot{\Phi}_i, \tag{9}$$

— ecuaţiile constitutive :

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\, e_{kl} + B_{ijkl}\, \varkappa_{kl}, \tag{10}$$

$$m_{ij} = B_{klij}\, e_{kl} + C_{ijkl}\, \varkappa_{kl}, \tag{11}$$

— ecuaţiile geometrice :

$$e_{ij} = u_{j,i} + \varepsilon_{ijk}\Phi_k, \tag{12}$$

$$\varkappa_{ij} = \Phi_{j,i}, \tag{13}$$

unde σ_{ij} este tensorul tensiune, m_{ij} — tensorul micromoment densitatea solidului, f_{si}, $\tilde{f}_{si}$ — forţa masică, respectiv moment masic, u_i — vectorul deplasare, e_{ij} — tensorul deformaţie, tensorul curbură-torsiune, Φ_k —vectorul rotaţiilor libere, I_{ij} — tensorul moment de inerţie, ε_{ijk} — tensorul lui Ricci, A_{ijkl}, B_{ijkl}, C_{ijkl} constante de materiale.

Vom impune următoarele condiţii la interfaţa solid-fluid :

$$v_i = u_i = V_i, \tag{14}$$

$$\sigma_{ji} n_j = -(p\delta_{ij} - \tau_{ij})\, n_j, \tag{15}$$

$$m_{ji}\, n_j = 0, \tag{16}$$

$$\Phi_i = 0, \tag{17}$$

Primele condiţii sînt bine cunoscute la interfaţa solid-fluid, condiţiile (16) — (17) sînt condiţii caracteristice mediilor micropolare. Asupra lor există opinii diferite, noi le-am acceptat sub această formă pentru că fluidul newtonian nu prezintă microrotaţii locale, nici micromomente locale ca în cazul fluidelor micropolare.

4. ECUAŢIILE LA NIVEL MACROSCOPIC

Vom aplica procedeul de mediere amintit pentru a trece de la ecuaţiile la nivel miroscopic (ecuaţiile locale) la ecuaţiile valabile în tot spaţiul.

Fie $\omega(x)$ funcţia caracteristică a mediului

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 \text{ pentru } x \in P \\ 0 \text{ pentru } x \in \subset P, \end{cases} \tag{18}$$

unde am notat cu P mulțimea porilor, iar cu C_P — complementarea sa. Se introduce porozitatea prin

$$m = \omega * \overline{\alpha}. \tag{19}$$

Vom media ecuațiile (4—17). Obținem

$$v_{mi,i} = 0, \tag{20}$$

$$\rho_{fm} \frac{\partial v_{mi}}{\partial t} + \rho_{fm}[v_i \vec{n} \vec{V} \delta_{fs}] * \vec{\alpha} + [\rho_{fm} v_{mi} v_{mj} + p_m \delta_{ij} -$$

$$- M_{ij} - \tau_{mij}]_{,j} = \rho_{fm} f_{fi} + F_i. \tag{21}$$

Am folosit notațiile :

$$F_i = [\rho \delta_{ij} - \tau_{ij} n_j \delta_{fs}] * \overline{\alpha}, \tag{22}$$

$$\rho_{fm} = \rho_f * \overline{\alpha}, \tag{23}$$

$$\rho_m = \rho * \overline{\alpha}, \tag{24}$$

$$\tau_{mij} = \tau_{ij} * \overline{\alpha}, \tag{25}$$

$$M_{ij} = - [\rho_f (v_i - v_{mi})(v_j - v_{mj})] * \overline{\alpha}, \tag{26}$$

$$v_{mi} = \frac{(\rho_f v_i) * \overline{\alpha}}{\rho_{fm}}. \tag{27}$$

S-a folosit ipoteza f_{fi} variază lent în spațiu. Pentru mediul micropolar prin mediere sîntem conduși la următoarele relații :

$$\sigma_{mji,j} + [\sigma_{ij} n_j \delta_{fs}] * \overline{\alpha} + \rho_{sm} f_{si} = \rho_{sm} \ddot{u}_{mi} - \rho_{sm} [\ddot{u}_i \vec{n} \vec{v} \delta_{fs}] * \overline{\alpha}, \tag{28}$$

$$m_{mji,j} + \varepsilon_{ijk} \sigma_{mjk} + \rho_{sm} \tilde{f}_{si} = I_{mij} \ddot{\Phi}_{mi}, \tag{29}$$

$$\sigma_{mij} = A_{ijkl} e_{mkl} + B_{ijkl} \varkappa_{mkl}, \tag{30}$$

$$m_{mij} = B_{klij} e_{mkl} + C_{ijkl} \varkappa_{mkl}, \tag{31}$$

$$e_{mij} = u_{mj,i} + \varepsilon_{ijk} \Phi_{mk}, \tag{32}$$

$$\varkappa_{mij} = \Phi_{mj,i}, \tag{33}$$

cu notaţiile :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{mij} \\ m_{mij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{ij} \\ m_{ij} \end{pmatrix} * \overline{\alpha}, \tag{34}$$

$$\rho_s{}^m = \rho_s * \overline{\alpha}, \tag{35}$$

$$u_{mi} = u_i * \overline{\alpha}, \tag{36}$$

$$I_{mij} = I_{ij} * \overline{\alpha}, \tag{37}$$

$$\Phi_{mi} = \frac{(I_{ij}\,\Phi_j) * \overline{\alpha}}{I_{mij}}. \tag{38}$$

De asemenea, am folosit ipoteza că f_{si} şi $\tilde{f}_{si}$ variază lent în spaţiu Relaţiile (20—38) ne determină complet mărimile necunoscute, care descriu comportamentul unui astfel de mediu (mediu poros micropolar deformabil — M.P.M.D.). Întrucît ecuaţiile date sînt complicate, vom face o serie de simplificări.

Vom presupune că fluidul este incompresibil, avînd o curgere macroscopică lentă. Folosind consideraţiile din §4, găsim că $\sigma_{mij} = 0$, $M_{ji,j} = 0, F_i = m \cdot P_i$, $V'_i = m \cdot v_{mi}$, $V'_i = -\frac{k_{ij}}{\mu} m \cdot P_j$ cu $P_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(p - \rho_f f_i x_i)$. Ecuaţiile macroscopice pentru fluid devin :

$$V'_{i,i} = 0, \tag{39}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial V_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{fm}}(p_{m,i} - \rho_{fm} f_{fi}) - \frac{\mu}{\rho_{fmkij}} V'_j. \tag{40}$$

S-au mai neglijat termenii $\rho_m v_{mi} v_{mij}$ şi $\rho_m[v_i \vec{n} \vec{v} \delta_{fs}] * \overline{\alpha}$ ca mărimi de ordinul doi. După cum se vede şi în cazul mediului micropolar am pus în evidenţă legea lui Darcy.

Să ne ocupăm acum de ecuaţia de mişcare a mediului elastic.

Dacă neglijăm produsul $\rho_s{}^m[\dot{u}_i \vec{n} \vec{v} \delta_{fs} * \overline{\alpha}$ ca mărime de ordinul doi şi dacă ţinem cont că $[\sigma_{ij} n_j \delta_{fs}] * \overline{\alpha} = -[(p\,\delta_{ij} - \tau_{ij}) n_j] * \overline{\alpha} = -m p_i$, găsim că ecuaţia (28) se transformă în

$$\sigma_{mji,i} - m p_i + \rho_s{}^m f_{si} = \rho_s{}^m \ddot{u}_i, \tag{41}$$

adică de aceeaşi formă ca în [10].

Prin urmare ecuaţiile simplificate, care ne descriu comportamentul unui mediu poros micropolar, sînt următoarele :

$$V'_{i,i} = 0, \tag{42}$$

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial v_i'}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_{fm}}(p_{m,i}-\rho_{fm}f_{fi})-\frac{\mu}{\rho_{mkij}}V_j', \tag{43}$$

$$\sigma_{mji,j}-m\,p_i+\rho_{sm}f_{si}=\rho_{sm}\ddot{u}_{mi}, \tag{44}$$

$$m_{mji,j}+\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{mjk}+\rho_{sm}\tilde{f}_{si}=I_{mij}\ddot{\Phi}_{mi}, \tag{45}$$

$$\sigma_{mij}=A_{ijkl}+B_{ijkl}\,\varkappa_{mkl}, \tag{46}$$

$$m_{ij}=B_{klij}\,e_{mkl}+C_{ijkl}\,\varkappa_{mkl}, \tag{47}$$

$$e_{mij}=u_{mj,i}+\varepsilon_{ijk}\,\Phi_{mk}, \tag{48}$$

$$\varkappa_{mij}=\Phi_{mj,i}. \tag{49}$$

Ecuația (44) se mai poate scrie și astfel :

$$\sigma_{mji,j}-p_{m,i}+\rho_{fm}f_{fi}+\rho_{sm}f_{si}=\rho_{sm}\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t}$$

sau

$$\sigma_{mji,j}-p_{m,i}+\rho_m f_i=\rho_{sm}\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t}, \tag{44'}$$

unde am folosit notația $\rho_m f_i=\rho_{fm}f_{fi}+\rho_{sm}f_{si}$.

5. CAZUL UNUI MEDIU MICROPOLAR IZOTROP

Vom considera acum că mediul poros micropolar este izotrop. În acest caz particular ecuațiile (42—49) se simplifică și mai mult. Vom avea

$$V_{i,i}=0, \tag{50}$$

$$\frac{1}{m}\frac{\partial V_i}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_{fm}}p_{m,i}+f_{fi}-\frac{\mu}{\rho_{fmk}}v_i,\quad k_{ij}=k\delta_{ij}, \tag{51}$$

$$\sigma_{mji,j}-p_{m,i}+\rho_{sm}f_{si}=\rho_{sm}\frac{\partial\dot{u}_i}{\partial t}, \tag{52}$$

$$m_{mji,j}+\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{mj,k}+\rho_{sm}\tilde{f}_{si}=I_{mij}\ddot{\Phi}_{mi}, \tag{53}$$

$$\sigma_{mij}=\alpha_1 e_{mrr}\,\delta_{ij}+(\alpha_2+\alpha_3)e_{mij}+\alpha_2 e_{mji}, \tag{54}$$

$$m_{mij} = p_1 x_{mrr}\delta_{ij} + \beta_2 x_{ij} + \beta_3 x_{ij}, \tag{55}$$

$$e_{mij} = u_{mi,j} + \varepsilon_{i,jk}\Phi_{mk}, \tag{56}$$

$$x_{mij} = \Phi_{mj,i}. \tag{57}$$

Primită la redacție la 16 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. R. J. Atkin, R. E. Craine, *Continuum theories of mixtures Applications.* Jour. Inst. Math. Appl., 1976, **17**, 2, 153—207.
2. A. Bedford, J. D. Ingram, *A continuum theory of fluid saturated porous media*, J. Appl. Mech., 1971, *1*, 1—7.
3. M. A. Biot *General theory of three dimensional consolidation*, J. Appl. Phys. 1941, 155—164.
4. — *Theory of elasticites and consolidation for a porous anizotropic solid*, J. Appl. Phys., 1955, **26**, 182—185.
5. — *Theory of propagation of elastic waves in fluid saturated porous solid. Law frequeney range*, J. Acoust. Soc. America, 1956, **28**, *2*.
6. — *Theory of finite deformation of porous solid.* Math. Journ. Indiana Univ., 1972, **21**, 7.
7. — *Variational irreversibile«thermodynamics of heat and mass transfer in porous elastic solid: new concepts and methods*, Quat. Appl. Math., 1978, **XXXVI**, *1*.
8. M. J. Crochet, P. M. Naghdi, *On constitutive equations for flow of fluid through and elastic solid*, Int. J. Eng. Sci., 1966, 4, 483—500.
9. W. Derski H. Ene, *Les equations du mouvement dans les milieux poreux*, sub tipar.
10. H. Ene, *Sur les equations du mouvement dans les milieux poreux deformable*, Rev. Roum. Math. Pure et Appl., 1978, **XXIII**, *3*, 405—410.
11. A. C. Eringen, *Linear theory of micropolar elasticites*, J. Math. Mech., 1966, **15**, 909—924.
12. H. Ene, S. Gogonea, *Probleme de teoria filtrației*, Edit. Academiei, București, 1975.
13. Șt. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, București, 1966.
14. — *Introducere în hidrodinamica mediilor poroase*, Edit. Academiei, București, 1969.
15. A. E. Green, R. J. Steel, *Constitutive equations for interacting.* Int. J. Eng. Sci., 1966, *4*, 483—500.
16. D. Ieșan, N. Șandru, *Probleme actuale în mecanica solidelor*, Edit. Academiei, București, 1975.
17. I. Karanjac, *Contribution to the formulation of the theory of grandwater flow through an elastic acquifer*, Jour. of Hidr., 1972, **17**, 331—351.
18. D. Kenyon, *Thermostatics of solid — fluid mixtures*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1976, **62**, 117—129.
19. — *The theory of an incompresibile solid — fluid mixture*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1976, **62**, 131—147.
20. V. N. Nicolaevski, C. S. Basniev și alții *Mehanica nasîşcionth poristth sred*, Izd. Nedra, Moskva, 1970.
21. K. Terzaghi, *Mecanicque theoritique des sols*, Ed. Dunod, Paris, 1951.

MODELAREA PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE A OSCILAȚIILOR LIBERE ALE SUPRAFEȚELOR DE APĂ

de CONSTANTIN STERE, DAN STEMATIU

Facultatea de hidrotehnică, Institutul de construcții București.

Calculul stării de oscilație proprie a suprafețelor de apă, de forme și adîncimi oarecare, reprezintă o problemă cu aplicabilitate inginerească deosebită. Evaluarea răspunsului dinamic al unor volume de apă, în stare de excitație forțată — constituită practic de acțiunea cutremurelor, a valurilor sau a altor factori perturbatori — , se face pe baza cunoașterii acestei stări de oscilație liberă sau naturală. În lucrare se prezintă un model matematic și algoritm de calcul al acestei stări de oscilație liberă, dezvoltate pe baza metodei energetice variaționale Ritz-Galerkin, cu o discretizare a cîmpului suprafeței libere în elemente finite. Metoda permite abordarea suprafețelor cu contururi închise sau deschise, care acoperă practic toată gama construcțiilor hidrotehnice.

Problema oscilațiilor libere ale suprafețelor de apă reprezintă o veche preocupare a cercetătorilor din domeniul hidraulicii aplicate. Inspirată inițial, metodologic și fenomenologic, din teoria acusticii elaborată de Rayleigh [1], această problemă a căpătat în ultimii 20 de ani valențe practice deosebite, legate de numeroasele tipuri de amenajări sau construcții hidrotehnice care implică prezența funcțională a unor suprafețe de apă de întinderi variate (lacuri de acumulare, bazine portuare, castele de apă, ecluze, rezervoare etc.). Latura practică, de mare importanță inginerească, a acestui fenomen al oscilațiilor libere, caracteristic oricărui volum de apă conturat de anumite condiții de contur și de o suprafață liberă, se constituie din faptul că natura și unele activități ale omului produc — în anumite condiții — excitații periodice care pot induce fenomene nedorite, uneori rezonante, ce afectează negativ buna funcționare a unor asemenea construcții sau amenajări. Aceste mecanisme de excitație a suprafețelor de apă pot fi constituite din cutremure (importante, în special, pentru lacuri de acumulare, rezervoare, ecluze, castele de apă), valuri de hulă, de furtună sau curenți marini (importante, în special, pentru bazine portuare), vînturi de intensitate variabilă (importante, în special, pentru lacuri, ecluze și canale de navigație) etc.

Contribuțiile teoretico-analitice valoroase aduse în timp de personalități de seamă ale fizicii matematice ca Poisson, Cauchy, Rayleigh, Lamb și alții [1] nu au depășit însă cadrul unor ipoteze simplificatoare care — în virtutea rezolvărilor analitice propuse — introduceau limitări serioase domeniului de aplicabilitate a problemei oscilațiilor libere. Unele

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 38, NR. 6, 1979 P. 773—789

dintre restricțiile imposibile de depășit pe cale analitică au fost constituite, pînă în ultimii 8...10 ani, de forma oarecare a planului suprafeței libere a apei și de adîncimea variabilă a volumului de apă corespunzător. Aceasta reprezintă însă, din punct de vedere ingineresc, o limitare foarte serioasă a domeniului tocmai datorită faptului că principalele amenajări și construcții hidrotehnice sînt caracterizate de adîncimi și forme în plan oarecari ale acestor volume de apă.

Articolul de față își propune să prezinte — bazat pe metoda elementelor finite — un algoritm și o metodologie de modelare numerică a proceselor de oscilație liberă a suprafețelor de apă caracterizate de forme și adîncimi oarecari.

1. MODELUL MATEMATIC

Se consideră pentru început o suprafață plană de apă de adîncime uniformă h. Prin neglijarea accelerațiilor verticale, toate particulele de apă aliniate vertical pe o aceeași ordonată vor înregistra aceeași mișcare orizontală. Mișcarea într-un punct (x, y) al suprafeței de apă va fi caracterizată de componentele orizontale ale vitezei particulei (u, v) și de ridicarea η a suprafeței de apă de-asupra nivelului liniștit mediu (fig. 1 *a*).

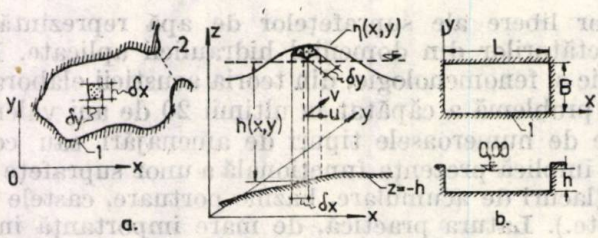


Fig. 1. — Schema de calcul: *a* — suprafață de apă de formă plană oarecare și de adîncime variabilă, *b* — bazin rectangular închis pentru soluția analitică; 1 — contur închis impermeabil, 2 — contur deschis permeabil.

Prin evaluarea cantității de mișcare ce intră într-o coloană elementară de lichid $\delta x \cdot \delta y$ și neglijînd termenii de ordinul II, se poate formula ecuația de continuitate

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \cdot h \cdot \delta y)\,\delta x + \frac{\partial}{\partial y}(v \cdot h \cdot \delta x)\,\delta y = -\frac{\partial}{\partial t}\{(\eta + h)\,\delta x\,\delta y\}, \quad (1)$$

care, în urma simplificărilor admise, capătă forma

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right). \quad (2)$$

În absența unor forțe perturbatoare și prin neglijarea termenilor convectivi și a frecării pe conturul solid (inclusiv fundul bazinului), ecua-

ţiile de mişcare se pot scrie sub forma cunoscută,

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{3}$$

Conform ipotezei micilor oscilaţii anterior admisă, presiunea p va satisface ecuaţia hidrostatică :

$$p = p_0 + \rho \cdot g\,(z_0 + \eta - z), \tag{4}$$

aceasta conducînd la exprimarea ecuaţiilor dinamice (3) sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y}. \tag{5}$$

Prin eliminarea componentelor u şi v ale vitezei orizontale a particulei se obţine cunoscuta ecuaţie de tip hiperbolic a undelor :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right), \tag{6}$$

unde apare mărimea celerităţii, $c^2 = gh$.

Pentru mişcarea simplu armonică, introducînd factorul temporal complex $e^{i(\sigma t + \varepsilon)}$ şi renunţînd la termenii imaginari (cadrul ecuaţiilor linearizate a undelor), se obţine din (6) ecuaţia Helmholtz [1] :

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + k^2 \cdot \eta = 0 \tag{7}$$

în care coeficientul $k^2 = \sigma^2/c^2$ reprezintă numărul de undă, iar $\sigma = 2 \cdot \pi / T$ reprezintă frecvenţa circulară a mişcării. Sub o formă restrînsă, ecuaţia (7) devine :

$$(\nabla^2 + k^2) \cdot \eta = 0. \tag{8}$$

Condiţiile la limită impuse mişcării de vibraţie liberă a suprafeţei de apă, guvernată de ecuaţia (8), sînt (fig. 1) :

— la conturul lateral solid (pereţi verticali), $\dfrac{\partial \eta}{\partial n} = 0$;

— la suprafaţa apei ($z = \eta$), $p = 0$ şi $w = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}$;

— la fundul bazinului ($z = -h$), $w = 0$.

Din punct de vedere analitic, integrala ecuaţiei (8) nu este posibilă decît pentru o suprafaţă de apă de formă regulată (rectangulară, circulară, eliptică). Prin modul ei de definire ecuaţia (8) este valabilă numai pentru o adîncime constantă a domeniului. Dintre soluţiile analitice sînt cunoscute soluţiile lui Lamb [1], bazate pe serii duble Fourier, ale lui Ippen [3] Wiegel [2], bazate pe separarea variabilelor.

În final, pentru un bazin rectangular de dimensiuni $L \times B$ (fig. 1 *b*),

$$\eta = \Sigma\Sigma\, a_{m,n} \cdot \cos \frac{m \cdot \pi}{L} x \cdot \cos \frac{n\pi}{B} y, \tag{9}$$

în care suma dublă este extinsă asupra tuturor valorilor integrale ale lui m, n (m, $n \in [0, \infty)$). Mărimile naturale m şi n semnifică nodalitatea longitudinală şi transversală a mişcării vibratorii a suprafeţei apei, fiecare combinaţie (m, n) corespunzînd unui mod de vibraţie. Prin substituirea soluţiei (9) în ecuaţia (8), se obţine perechea valorilor $m = 1$ şi $n = 0$, care corespunde modului fundamental; în acest caz $L > B$, mişcarea orizontală admisă a particulelor de apă va fi — pe toată întinderea suprafeţei de apă — paralelă cu dimensiunea lungă a bazinului rectangular [1]. Conform aceleiaşi abordări, perioadele rezonante ale mişcării de oscilaţie liberă sînt date de formula:

$$T_{m,n} = \frac{2L}{\sqrt{gh}\left\{m^2 + \left(\dfrac{L}{B} n\right)^2\right\}^{1/2}}. \tag{10}$$

Din păcate însă, majoritatea cazurilor practice (de interes ingineresc) de suprafeţe de apă au o formă în plan oarecare şi sînt caracterizate de adîncimi variabile. Din acest motiv, soluţiile (9) şi (10) nu sînt aplicabile. Ippen arată [3], spre exemplu, că aplicînd aceste soluţii pentru evaluarea modului fundamental de oscilaţie a lacului Geneva, avînd o formă în plan aproximativ rectangulară, s-a obţinut o perioadă de 59 minute, valoarea măsurată a acesteia fiind de 83,50 minute. În general, erorile de calcul al perioadelor modurilor proprii variază, pentru asemenea soluţii, în gama $\pm$ (45...170%).

În anul 1961, Defant propune un procedeu de evaluare a procesului de vibraţie liberă a suprafeţelor de apă, avînd forma în plan $B(x)$ şi adîncimea $h(x)$ definite de o lege în funcţie de axa longitudinală x a domeniului [4]. Metoda aceasta, de tip iterativ, conduce la evaluări exacte ale perioadelor proprii $T_{m,n}$ şi a liniilor nodale (m, n), dar valorile configuraţiilor modale ale deplasărilor verticale $\eta(x, y)$ şi orizontale $\xi(x, y)$ sînt relativ dependente de cantităţi iniţiale $\eta(t = 0)$ şi $\xi\,(t = 0)$, precizate într-un punct al domeniului (x, y) analizat. Astfel, deşi rapid convergentă, metoda Defant conduce la rezultate incerte pentru situaţiile necunoaşterii corecte a unor deplasări iniţiale $\eta(x_0, y_0, t = 0)$ ale suprafeţei de apă, în general greu de definit analitic [3].

Depășirea acestor dificultăți s-a putut realiza prin adoptarea unor principii caracteristice metodei elementelor finite [5] la examinarea și integrarea ecuației Helmholtz care generează fenomenul de oscilație liberă. Astfel, în 1969, Taylor și Zienkiewitz prezintă o abordare a acestui fenomen prin tennica elementelor finite de tip triunghiular [6]. Rezolvarea respectivă, ale cărei principale neajunsuri vor fi comentate critic în paragraful următor, are meritul de a fi semnalat posibilitatea rezolvării numerice prin elemente finite a ecuației Helmholtz.

Admițînd pentru fenomenul de oscilație transversală a suprafeței de apă o mișcare de tip armonic,

$$\eta(x, y, t) = \eta(x, y) \cdot \cos \sigma t, \tag{11}$$

determinată prin relațiile caracteristice mișcării în apă de adîncime redusă

$$L_* = cT, \tag{12}$$
$$c^2 = gh,$$

și considerînd de această dată variabiiitatea adîncimii $h(x, y)$, ecuația Helmholtz poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)+\lambda^2\cdot\eta=0, \tag{13}$$

în care coeficientul $\lambda^2 = \sigma^2/g$ include perioada T a configurației staționare, caracteristică stării de oscilație liberă a suprafeței de apă. Problema fizică reprezentată de ecuația (13) este o problemă de valori proprii. Condițiile la limită ale ecuației (13) rămîn de tipul celor menționate anterior, în principal constituite din contur solid impermeabil (la care $\partial\eta/\partial n = 0$) și contur permeabil, avînd o linie nodală impusă [3], [4] (la care $(\partial\eta/\partial\eta)_{bazin} = -(\partial\eta/\partial n)_{ext}$).

În acord cu principiul variațional al metodei elementelor finite, rezolvarea ecuației (13), cu condițiile la limită prezentate, poate fi substituită prin găsirea unei funcții $\eta(x\ y)$ care conduce la minimul unei funcționale de forma [6] :

$$\chi = \iint_A \frac{1}{2}\left\{h\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + h\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 - \lambda^2\cdot\eta^2\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{14}$$

extinsă pe întreg domeniul A al suprafeței libere a apei.

2. ABORDAREA ÎN ELEMENTE FINITE

În conformitate cu principiul metodei elementelor finite, mișcarea planului de apă $\eta(x, y)$ se consideră descrisă printr-un număr finit de valori $\{\eta\}$, definite în nodurile unei rețele de discretizare (fig. 2 *a*). În interiorul unui subdomeniu, denumit element finit, ridicarea suprafeței de apă

deasupra nivelului liniştit mediu este aproximată în funcţie de valorile nodale $\{\eta\}^e$ sub forma

$$\eta^e(x, y) = [N(x, y)]\,\{\eta\}^e, \tag{15}$$

unde $[N\ (x, y)]$ sînt funcţii de aproximare, aceleaşi pentru toate elementele din discretizare.

Pentru a obţine o precizie mai bună şi o variabilitate mai mare în alcătuirea discretizării s-au adoptat elementele finite izoparametrice [7].

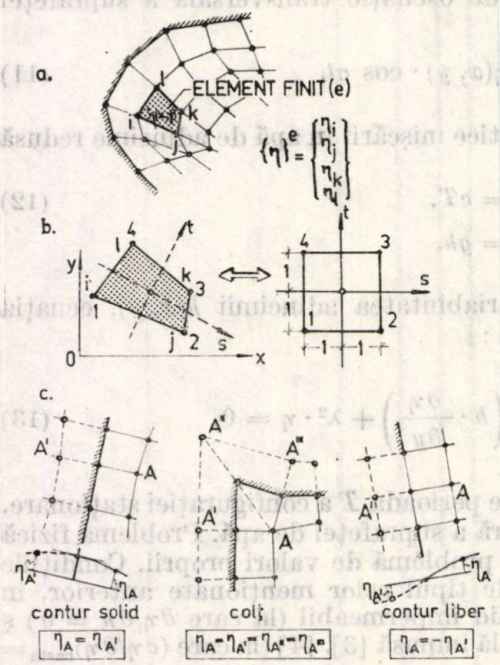


Fig. 2. — Rezolvarea prin metoda elementelor finite : *a* — discretizare, *b* — elementul finit izoparametric, *c* — condiţii de margine.

Acestea sînt formulate într-un sistem de coordonate intrinsec (s, t), definit de geometria elementului şi nu de orientarea lui în raport cu sistemul global (x, y) — (fig. 2 *b*). Coordonatele s, t sînt ataşate elementului şi sînt astfel scalate încît fiecare dintre laturi se găseşte la $s, t = \pm 1$ Relaţia dintre sistemul intrinsec şi sistemul global depinde de elementul finit respectiv :

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i\, x_i = [N]\,\{x\}, \tag{16}$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i\, y_i = [N]\,\{y\},$$

în care funcţiile $N_i(s, t)$ care asigură transformarea sînt :

$$N_1 = 1/4\ (1 - s)\ (1 - t), \qquad N_2 = 1/4\ (1 + s)\ (1 - t),$$
$$N_3 = 1/4\ (1 + s)\ (1 + t), \qquad N_4 = 1/4\ (1 - s)\ (1 + t). \tag{17}$$

Prin această transformare, elementul finit din figura 2 *b* este generat de un pătrat de latură 2 în sistemul intrinsec.

Cîmpul deplasărilor planului de apă din interiorul elementului se definește utilizînd aceleași funcții de interpolare (17), denumite în acest caz funcții de aproximare :

$$\eta = [N]\{\eta\}^e. \tag{18}$$

Deoarece în expresia funcționalului (14) intervin derivatele deplasărilor în raport cu coordonatele globale x și y, pentru evaluarea acestora se ține seama de transformarea făcută :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \end{aligned} \tag{19}$$

Considerînd $\eta_s = \partial\eta/\partial s$, $\eta_x = \partial\eta/\partial x$ etc., relațiile (19) capătă forma condensată :

$$\begin{Bmatrix} \eta_s \\ \eta_t \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{Bmatrix}, \tag{20}$$

în care $[J]$ este matricea iacobianului transformării :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1s} & N_{2s} & N_{3s} & N_{4s} \\ N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} & N_{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix}, \tag{21}$$

Matricea $[J]$ și determinantul acesteia pot fi evaluate cu ușurință pentru orice punct din domeniu, cu valori cunoscute s și t, perechile (x_i, y_i) fiind coordonatele nodale.

La rîndul lor, derivatele lui η față de sistemul global se găsesc prin simpla inversare a relației (20) :

$$\begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \eta_s \\ \eta_t \end{Bmatrix}. \tag{22}$$

Ținînd seama de relația de definire (18), derivatele η_s și η_t au forma :

$$\begin{Bmatrix} \eta_s \\ \eta_t \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} N_{1s} & N_{2s} & N_{3s} & N_{4s} \\ N_{1t} & N_{2t} & N_{3t} & N_{4t} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{Bmatrix} = [N']\{\eta\}, \tag{23}$$

de unde

$$\begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \end{Bmatrix} = [J]^{-1}[N']\{\eta\} = [F]\{\eta\}. \tag{24}$$

Din relaţia (24) se pot deduce atît expresiile derivatelor, cît şi a pătratelor acestora care intervin în funcţionalul (14) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = [F_x]\{\eta\}, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = [F_y]\{\eta\}, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 = \{\eta\}^T[F_x]^T[F_x]\{\eta\}, \quad \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \{\eta\}^T[F_y]^T[F_y]\{\eta\}.$$

Făcînd înlocuirile necesare şi ţinînd seama că prin transformarea de coordonate elementul de integrare $dxdy$ devine $dsdtx$ [det J], se obţine expresia generală a funcţionalului :

$$X^e = \frac{1}{2}\iint_e h\,[\{\eta\}^T[F_x]^T[F_x]\{\eta\} + \{\eta\}^T[F_y]^T[F_y]\{\eta\}]\,|\det J|\,ds dt -$$

$$-\frac{1}{2}\lambda^2 \iint_e \{\eta\}^T[N]^T[N]\{\eta\}\,|\det J|\,ds\,dt. \tag{26}$$

Condiţia de minimizare a acestui funcţional, echivalează integrării ecuaţiilor Helmholtz, se realizează prin simpla anulare a derivatelor parţiale de ordinul 1 în raport cu valorile nodale η_i :

$$\frac{\partial X^e}{\partial \eta_i} = 0 \Big|_{i=1,\ldots,4}, \tag{27}$$

ceea ce conduce la

$$([K]^e - \lambda^2[M]^e)\{\eta\}^e = 0. \tag{28}$$

Matricele $[K]^e$ şi $[M]^e$, referitoare la un element, au expresiile :

$$[K]^e = \iint_e h([F_x]^T[F_x] + [F_y]^T[F_y])\,|\det J|\,ds dt,$$

$$[M]^e = \iint_e [N]^T[N]\,|\det J|\,ds dt. \tag{29}$$

Pentru întreg domeniul analizat se definesc matricele globale $[K]$ și $[M]$ prin simpla adunare a contribuțiilor nodale ale tuturor elementelor :

$$[K] = \sum_1^n{}_e [K]^e, \quad [M] = \sum_1^n{}_e [M]^e, \tag{30}$$

iar ecuația (28) are de această dată expresia :

$$([K] - \lambda^2[M])\{\eta\} = 0. \tag{31}$$

Matricele $[K]$ și $[M]$ sînt matrice pătrate și simetrice. Abordarea variațională reduce problema oscilațiilor libere la o formă clasică de valori proprii, cu un număr finit de valori, egal cu numărul de grade de libertate din discretizare.

Reducerea ecuației (31) la forma canonică :

$$[M]^{-1}[K] = \lambda^2 \tag{32}$$

are dezavantajul că matricea rezultată $[M]^{-1}[K]$ nu este deobicei o matrice simetrică și deci determinarea valorilor și formelor proprii nu se poate face prin algoritmele clasice din domeniu. Acest dezavantaj se poate elimina efectuînd transformările [6] :

— descompunerea Cholevski a inversei matricei $[K]$:

$$[K]^{-1} = [R]^T[R], \tag{33}$$

în care $[R]$ este o matrice triunghiulară superioară ;

— rescrierea ecuației (31) în funcție de această descompunere și multiplicarea succesivă cu $[R]^T$ și $[R]$:

$$-\lambda^2[R]^{-1}\left([R][M][R]^T - \frac{1}{\lambda^2}\right)\{[R]^T\}^{-1}\{\eta\} = 0, \tag{34}$$

— rezolvarea problemei de valori proprii :

$$[H] = \beta^2(\eta),$$

în care $[H] = [R][M][R]^T$ este de această dată o matrice simetrică, pozitiv definită, iar $\beta(\eta) = 1/\lambda$.

Specificarea condițiilor de margine este esențială pentru rezolvarea ecuației (31). În lucrarea amintită [6], Taylor și Zienkievicz sesizează faptul că în condițiile contururilor închise, la care valorile de graniță η se consideră fără nici o restricție, matricea $[K]$ este singulară și deci inversarea nu este posibilă. În această lucrare [6] eliminarea singularității se face prin adăugarea arbitrară a unui termen diagonal, a cărui pondere era astfel aleasă încît să nu afecteze precizia rezultatelor. În abordarea de

față respectarea condițiilor de margine precizate :

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = 0 \qquad \text{— contur solid impermeabil,}$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial n}\right)_{\text{bazin}} = -\left(\frac{\partial \eta}{\partial n}\right)_{\text{ext}} \qquad \text{— contur permeabil,}$$

asigură atît pozitiv definirea matricei $[K]$, cît și precizia numerică cerută de rezolvare. Aceste condiții de margine se introduc printr-un artificiu de calcul permis de elementele izoparametrice patrulatere adoptate, extinzînd rețeaua de discretizare în afara conturului domeniului. Extinderea se face printr-un rînd suplimentar de noduri, simetric dispuse față de cele interioare, obținîndu-se un contur fictiv. Se poate demonstra că în condițiile dispunerii simetrice a elementelor față de conturul real, condițiile de margine sînt cele din figura 2 *c*. În cadrul algoritmului de rezolvare, aceste condiții se introduc cu ușurință, atribuind același număr de ordine ecuației nodului exterior cu numărul ecuației aferente nodului interior simetric și adăugînd după caz contribuția matriceală $[M]^e$ și $[K]^e$ a elementului fictiv cu semnul (+), în cazul conturului solid, și cu semnul (—), în cazul conturului permeabil.

3. PERIOADE PROPRII

Gradele de libertate ale unui sistem sînt definite ca fiind numărul coordonatelor independente necesare a descrie mișcarea sistemului. Din punct de vedere teoretic, mișcarea fiecărei particule din volumul de apă considerat este definită într-un număr infinit de coordonate, deci mișcarea vibratorie a sistemului respectiv este caracterizată de un număr infinit de grade de libertate, avînd — în consecință — un număr infinit de moduri de oscilație și frecvențe proprii. Din rațiuni de ordin practic însă, starea de oscilație liberă a sistemului suprafeței libere va fi admisă în limitele unui număr finit de grade de libertate, obținute ca urmare a discretizării domeniului analizat în elemente finite. Teste speciale, efectuate în raport cu bazinul rectangular $L \times B$ închis și perioadele sale fundamentale de oscilație, au pus în evidență că un număr minim de 20...30 grade de libertate sînt suficiente pentru descrierea corectă a oscilației libere a sistemului suprafeței libere. În limitele acestui număr recomandat, eroarea de calcul al perioadelor proprii fundamentale calculate T_1^c față de cele obținute pe cale analitică exactă T_1^a [1] — pentru diferite forme L/B ale bazinelor — nu va depăși 1,6...2,4% (fig. 3). Este de așteptat totuși ca, pentru bazinele de formă plană oarecare și cu adîncimi variabile, numărul necesar al gradelor de libertate să crească, în funcție de complexitatea de formă a acestora.

Rezultatele prezentate în continuare, bazate pe algoritmul în elemente finite elaborat, sînt obținute pentru sisteme modelate cu 82 grade de libertate dinamică. Corectitudinea acestor rezultate este validată prin

compararea perioadelor fundamentale de oscilație liberă a unei suprafețe rectangulare închisă, obținute prin analiza cu element finit și prin calcul analitic cu formula (10). Din figura 4*a* se observă o foarte bună concordanță a acestora.

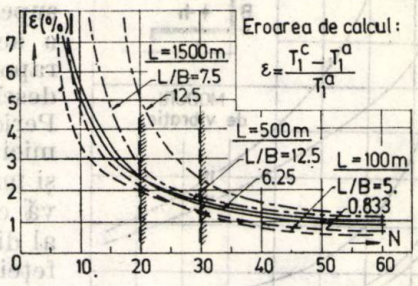
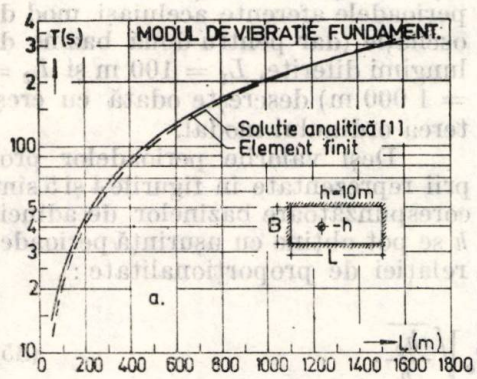


Fig. 3. — Eroarea de calcul al perioadei fundamentale în funcție de numărul modurilor proprii admis în analiză.



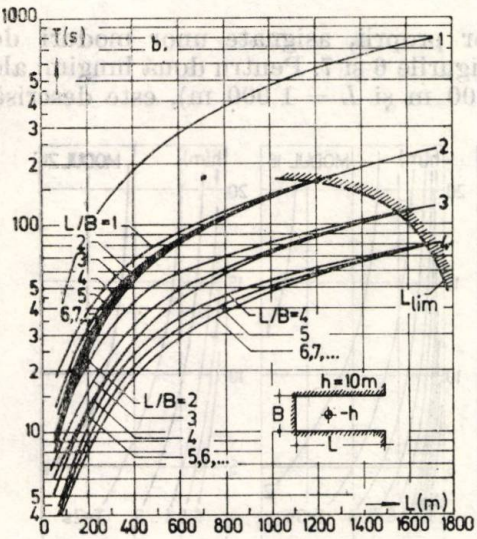


Fig. 4. — Variația perioadelor calculate ale primelor moduri de oscilație cu forma bazinului : *a* — bazin rectangular închis, *b* — bazin rectangular deschis.

Referind în special la cazul suprafețelor de apă avînd o parte a conturului de tip permeabil, caz des întîlnit în practica inginerească și totodată foarte dificil de abordat analitic, în figura 4 *b* se prezintă evoluția perioadelor primelor patru moduri de oscilație în raport cu forma plană a bazinului deschis, avînd diferite lungimi. Valorile perioadelor proprii la asemenea bazine sînt mai mari decît cele corespunzătoare bazinelor închise, pentru aceleași dimensiuni în plan ale suprafeței de apă. Cu excepția perioadei fundamentale, celelalte perioade proprii de oscilație sînt influențate de forma bazinului ; această influență este cu atît mai puternică cu cît crește ordinul formei de oscilație și cu cît bazinul este mai scurt. Se observă totuși că fiecare dintre modurile de oscilație prezentate este sensibil față de forma plană L/B a suprafeței apei pînă la o anumită valoare, peste care perioada de oscilație modală rămîne invariantă față de raportul L/B. De asemenea, se poate defini o curbă limită L_{lim} a lungimilor de bazine peste care perioadele corespunzătoare primelor 4...6 moduri

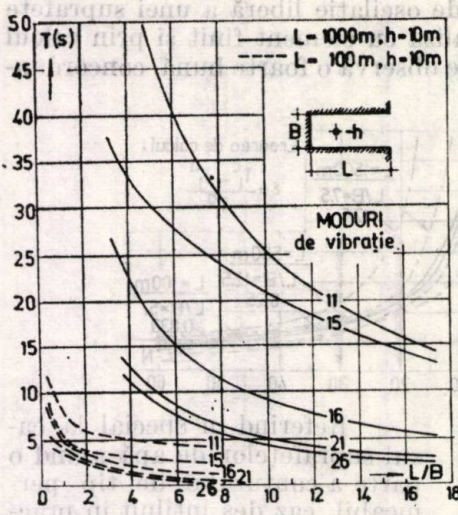


Fig. 5. — Variația perioadelor calculate ale modurilor superioare de oscilație cu forma bazinului rectangular deschis.

de oscilație liberă sînt total invariante în raport cu forma plană L/B a bazinului.

În ceea ce privește modurile superioare de oscilație, perioada T a acestora variază semnificativ în raport cu forma în plan a bazinelor deschise și cu lungimea L a acestora. Perioadele proprii sînt cu atît mai mici cu cît bazinele sînt mai scurte și mai alungite. Din figura 5 se observă că pentru un același raport L/B al dimensiunilor din plan ale suprafeței de apă, diferența relativă dintre perioadele aferente aceluiași mod de oscilație (dar pentru două bazine de lungimi diferite, $L_1 = 100$ m și $L_2 = 1\,000$ m) descrește odată cu creșterea ordinului modal.

Deși valorile perioadelor proprii reprezentate în figurile 4 și 5 sînt corespunzătoare bazinelor de adîncime $h_0 = 10$ m, pentru alte adîncimi h se pot obține cu ușurință perioadele de oscilație respective T, pe baza relației de proporționalitate :

$$T = T_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}}. \tag{35}$$

Tablouri ale gamei perioadelor proprii, asignate unor moduri de oscilație diferite, sînt prezentate în figurile 6 și 7. Pentru două lungimi ale bazinelor deschise analizate ($K = 100$ m și $L = 1\,000$ m), este descrisă

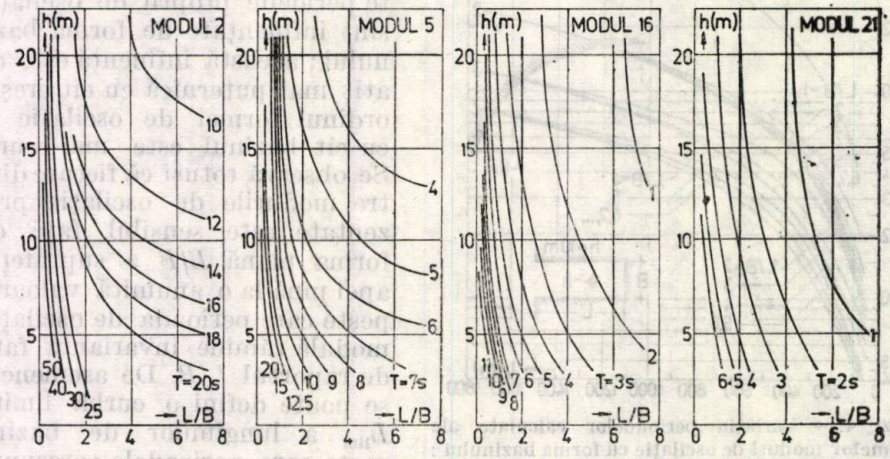


Fig. 6. — Perioadele calculate ale unor moduri de oscilație în funcție de adîncimea și forma bazinului rectangular deschis, avînd lungimea $L = 100$ m.

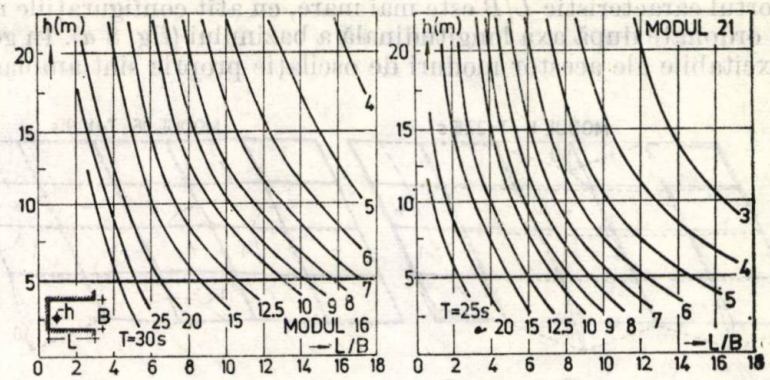


Fig. 7. — Perioadele calculate ale unor moduri de oscilație în funcție de adîncimea și forma bazinului rectangular deschis, avînd lungimea $L = 1000$m

influența parametrilor principali — adîncime h și forma în plan L/B — asupra gamei valorice a perioadelor de oscilație.

Prin intermediul curbelor de egală valoare a perioadelor proprii se poate remarca faptul că banda valorilor de perioade atașate unei aceluiași mod de oscilație este mai largă sau mai redusă în funcție de lungimea L a bazinului deschis. De asemenea, se observă că în zona valorilor $L/B\,2$ ale formei în plan a unui bazin deschis, adîncimea h influențează slab valorile perioadelor, și doar în gama adîncimilor reduse.

Cunoașterea tendințelor de variație a perioadelor de oscilație liberă, în funcție de parametrii constructivi specificați ai domeniului, reprezintă un obiectiv însemnat al analizei stării de oscilație liberă a suprafețelor de apă. Confruntarea ulterioară a acestora cu mecanisme excitatoare cu diferite caracteristici spectrale de timp este în măsură a explica sau preveni sensibilitatea sau insensibilitatea dinamică a sistemelor respective.

4. FORME DE OSCILAȚIE ȘI DEPLASĂRI ÎN PLANUL DE APĂ

Stările de oscilație liberă ale suprafețelor de apă înregistrează, în egală măsură, configurații plane extrem de regulate — dezvoltate axial după direcții normale la doi pereți vecini —, sau configurații lipsite de o ordine aparentă în plan, semnificînd oscilația simultană a particulelor de apă între toți pereții de contur. De obicei, configurațiile stărilor de oscilație sînt extrem de complexe, neexistînd o alternanță regulată între liniile nodale și ventrele suprafeței libere oscilante; aceasta depinde în cea mai mare măsură de forma bazinului respectiv și de tipul condițiilor de contur ale acestuia.

Rezultatele obținute pe baza algoritmului în elemente finite prezentat permit o serie de concluzii interesante în raport cu configurațiile modale ale stării de oscilație liberă.

Pentru bazinul rectangular închis, deplasările verticale ale suprafeței de apă depind calitativ de forma bazinului. Cu cît bazinul este mai alungit,

deci raportul caracteristic L/B este mai mare, cu atît configurațiile modale sînt mai ordonate după axa longitudinală a bazinului (fig. 8 *a*). În general, zonele excitabile ale acestor moduri de oscilație proprie sînt amplasate în

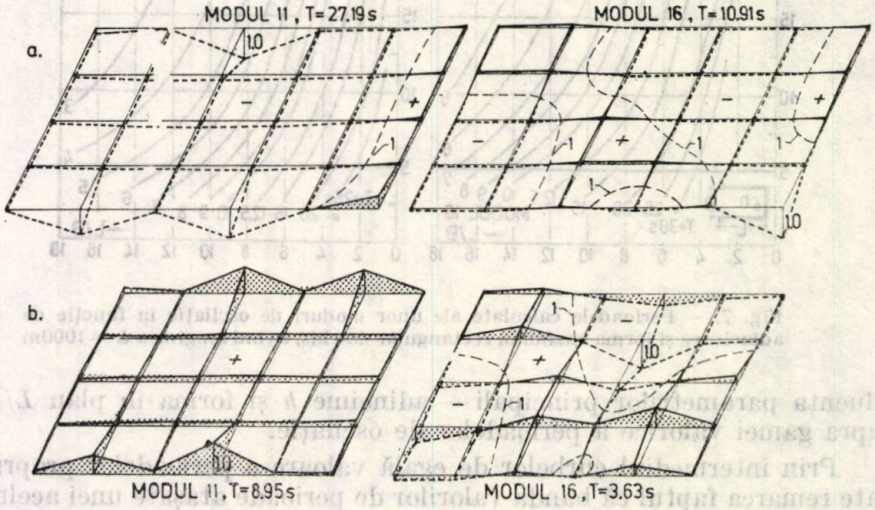


Fig. 8. — Bazin închis : configurații modale ale deplasărilor verticale ale suprafeței de apă de forma $L/B = 12{,}5$: *a* — $L = 1\,500$ m, *b* — $L = 500$ m ; 1 — linii nodale.

vecinătatea pereților de contur reflectanți sau la colțurile domeniului. Prin scurtarea bazinului (fig. 8 *b*), configurațiile modale ale deplasărilor verticale capătă un aspect mai puțin ordonat după o anumită direcție, reflectînd prin aceasta creșterea generală a ponderii stării de oscilație după direcția transversală. De asemenea, este interesant de remarcat faptul că prin scurtarea lungimii L a bazinului devin excitabile zone din cîmpul suprafeței de apă. În mod aparent, nu există o corespondență valorică și calitativă între configurațiile modale de același ordin, aferente unor bazine închise de aceeași formă L/B, dar de lungimi diferite.

În cazul bazinelor rectangulare deschise, configurațiile modale ale deplasărilor verticale prezintă, în general, un „relief" ceva mai neregulat. În cadrul unor aceleași dimensiuni în plan ale bazinelor, modurile proprii ale bazinelor ce au o latură permeabilă sînt valoric mai ample. În acest fel, bazinele deschise pun în evidență o stare de excitabilitate mult mai pronunțată. Pentru bazine lungi (fig. 9 *a*), organizarea modală a suprafeței apei denotă o preponderență a deplasărilor verticale de același semn, pozitiv sau negativ ; în majoritatea modurilor superioare de oscilație, ventrele de semn contrar sînt organizate singular, sub forma unor insule de colț sau din cîmpul suprafeței de apă. Este interesant de remarcat faptul că pentru bazine mai scurte, dar caracterizate de același coeficient de formă L/B, configurațiile modale de același ordin sînt cvasiidentice (fig. 9 *b*).

Zonele maxim excitabile corespunzătoare fiecărui mod de oscilație a bazinelor deschise se înregistrează atît în cîmpul suprafeței, cît și la pereții de contur. O secvență integrală a modurilor proprii de oscilație con-

ține cu atît mai puține puncte maxim excitabile pe contur, cu cît dimensiunile bazinului sînt mai reduse. În figura 10 se prezintă o secvență de moduri superioare de oscilație aferente unui bazin de lungime redusă,

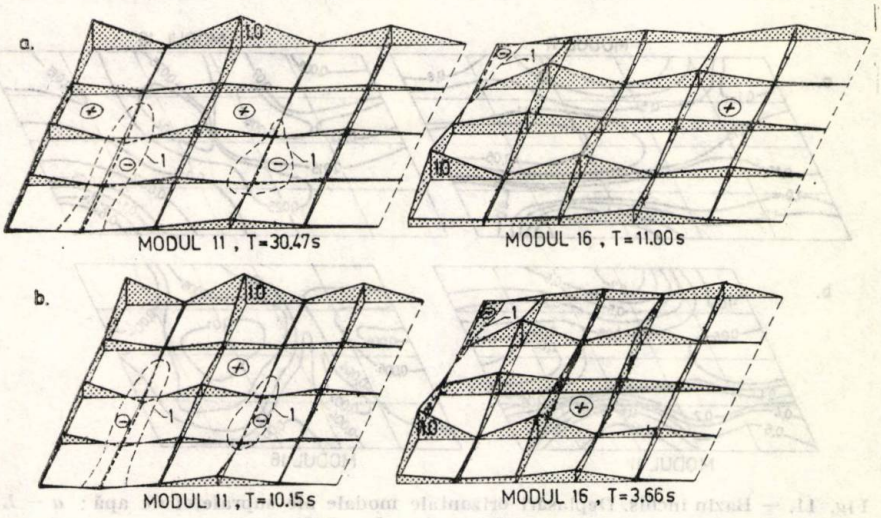


Fig. 9. — Bazin deschis : configurații modale ale deplasărilor verticale ale suprafeței de apă de forma $L/B = 12{,}5$: a — $L = 1\,500$ m, b — $L = 500$ m ; 1 — linii nodale.

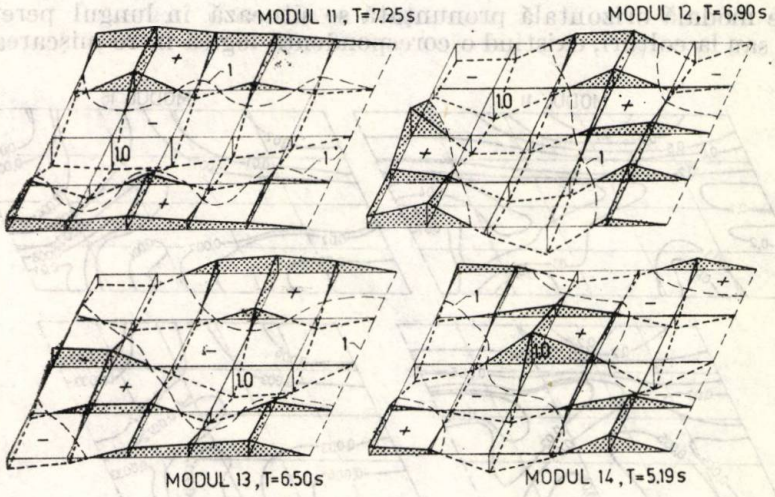


Fig. 10. — Bazin deschis: secvențe de configurații modale ale deplasărilor verticale ale suprafeței de apă de lungime $L = 100$ m, și formă $L/B = 1{,}25$: 1 — linii nodale.

$L = 100$ m. Zonele maxime excitate se înregistrează atît pentru ventre pozitive (ridicări ale suprafeței de apă), cît și pentru ventre negative (coborîri ale suprafeței de apă).

Unele concluzii interesante se pot desprinde — într-o primă etapă — și referitor la deplasările orizontale ale particulelor de apă, din cîmpul bazinelor. În figura 11 este reprezentată comparativ, prin intermediul unor linii de egală valoare, distribuția acestor deplasări orizontale (în mărimea

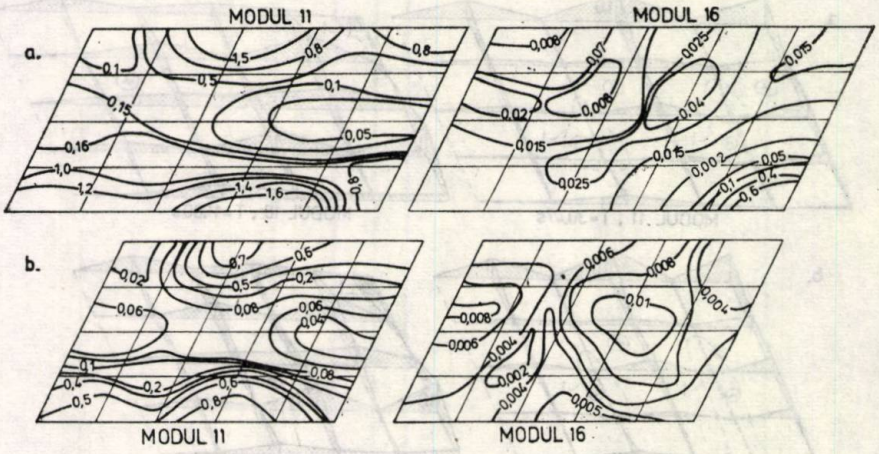


Fig. 11. — Bazin închis. Deplasări orizontale modale ale suprafeței de apă : $a - L = 1500$ m, $b - L = 500$ m.

lor absolută) pentru două bazine închise de lungimi diferite, dar avînd același coeficient de forma $L/B = 12{,}5$. În general, zonele de apă cu instabilitate modală orizontală pronunțată se situează în lungul pereților de contur sau la colțuri, existînd o corespondență logică între mișcarea pe ori-

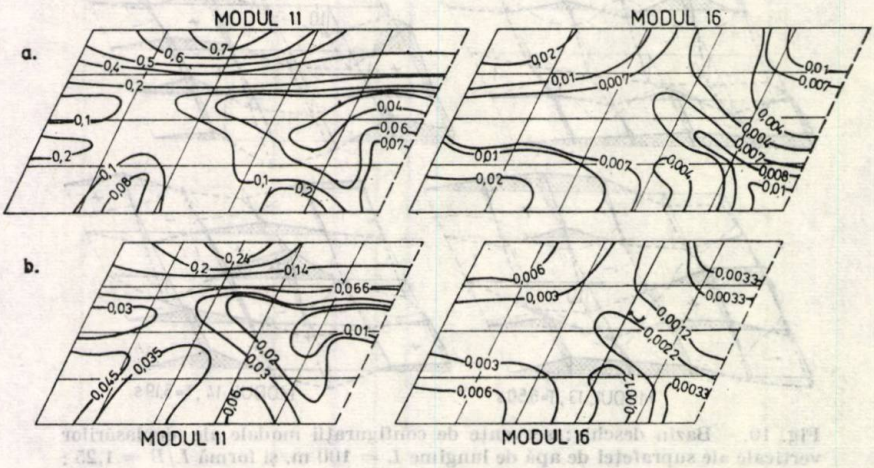


Fig. 12. — Bazin deschis. Deplasări orizontale modale ale suprafeței de apă : $a - L = 1500$ m, $b - L = 500$ m.

zontală și cea pe verticală. Mișcările orizontale sînt cu atît mai ample cu cît bazinul este mai lung; pentru un raport dintre lungimile bazinelor (fig. 11) de $L_1/L_2 = 10$, raportul deplasărilor maxime orizontale variază

în gama 2...5. În general, contribuțiile modale în deplasări orizontale sînt din ce în ce mai reduse pe măsură ce crește ordinul modului de oscilație liberă.

În cazul bazinelor rectangulare deschise pe o direcție, distribuția modală a deplasărilor orizontale este identică pentru bazinele cu același coeficient de formă L/B (fig. 12). Valoric, deplasările orizontale ale unui bazin mai scurt L_2 vor fi mai reduse decît deplasările orizontale ale bazinului lung L_1, cu raportul dintre lungimile bazinelor L_1/L_2.

Creșterea adîncimii h a bazinului deschis conduce la diminuarea valorică a oscilațiilor orizontale modale; modificarea acestora se face cu raportul $2\sqrt{h/h_0}$, unde h_0 este adîncimea pentru care este cunoscută starea de oscilație liberă.

5. CONCLUZII

Rezultatele obținute pe baza modelului matematic în elemente finite corespund calitativ fenomenului de oscilație liberă din bazinele rectangulare închise și deschise. Sînt redate corect, ca perioade de oscilație și configurații modale ale deplasărilor verticale și orizontale, atît modul fundamental, cît și modurile superioare de oscilație liberă. Abordarea respectivă permite studiul stării de vibrație liberă a suprafețelor de apă de formă oarecare și adîncime variabilă.

Primită la redacție la 8 iunie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932.
2. R. Wiegel, *Oceanografical Engineering*, Mc Graw-Hill, 1965.
3. A. Ippen, *Estuary and Coastline Hydrodynamics*, McGraw-Hill, 1966.
4. A. Defant, *Physical Oceanography*, vol. II, Pergamon Press, New York, 1961.
5. O. Zienkiewicz, *The Finite Element Method in Engineering Science*, Mcraw-Hill, London, 1971.
6. C. Taylor, B. Patil, O. Zienkiewicz, *Harbour oscillation: a numrical treatment for undamped natural modes*, Proc. Inst. Civ. Engrs, 1969, nr. 43.
7. D. Stematiu, *Analiza statică prin metoda elementelor finite*, I.C.B., 1977.

ASUPRA MIŞCĂRII PRINTR-UN BARAJ PERMEABIL OMOGEN ŞI IZOTROP

de MIRCEA ORĂŞANU
Liceul Nr. 3 industrial Bucureşti

Studiul mişcărilor de filtraţie cu suprafaţă liberă şi umedă prezintă dificultăţi deosebite din punct de vedere matematic. Ele conduc la probleme limită de tip sistem pentru două funcţii analitice pe porţiuni [1]. Dificultăţile provin din faptul că nu avem o metodă generală de a găsi efectiv soluţia problemei amintite. Există cazuri cînd astfel de probleme au fost rezolvate prin utilizarea teoriei analitice a ecuaţiilor diferenţiale [2].
În lucrarea de faţă ne propunem să studiem mişcarea de filtraţie către un masiv poros cu talpa impermeabilă orizontală, situată la adîncime finită.

1. Considerăm secţiunea plană a domeniului mişcării (fig. 1) o parte a masivului poros care separă lichidul în două bazine : cel din amonte şi cel din aval. Fluidul din ambele bazine vine în contact cu mediul poros prin intermediul frontierelor de alimentare. Dacă prin k desemnăm coeficientul de filtraţie al mediului poros menţionat, iar prin $f = \varphi + i\psi$ potenţialul complex corespunzător, atunci condiţiile la limită sînt :

$$\begin{aligned}
&\varphi + ky = 0, \\
&y - T = +(x - S)\,\mathrm{tg}\pi\alpha, && \text{pe } GF; \\
&\varphi + ky = 0, \\
&\psi = q, && \text{pe } FD; \\
&\varphi = -kH_1, \\
&y - T = x \cdot \mathrm{tg}\pi\beta; && \text{pe } DB, \\
&\varphi = -kH_1, \\
&y = (x + S_1)\,\mathrm{tg}\pi\gamma, && \text{pe } BA; \\
&\psi = 0, \\
&y = 0, && \text{pe } AL, \qquad (1)
\end{aligned}$$

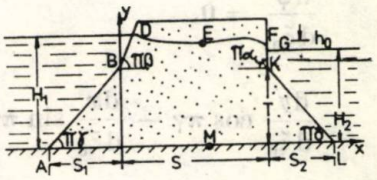


Fig. 1

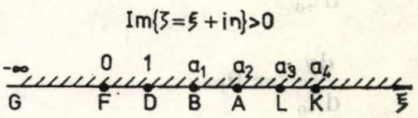


Fig. 2

$$\begin{aligned}
&\varphi = -kH_2, \\
&y = +(x - S - S_1)\,\mathrm{tg}\pi\delta, && \text{pe } LK.
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
&\varphi = -kH_2, \\
&y - T = +(x - S)\,\mathrm{tg}\pi\alpha, && \text{pe } KG.
\end{aligned}$$

Introducem semiplanul superior de variabilă ζ (fig. 2) şi urmărim să determinăm funcţiile olomorfe $z = z(\zeta)$, $f = f(\zeta)$ ale căror părţi reale şi imaginare satisfac condiţiile limită (4.1). Desemnînd prin ξ_0 coordonata curbilinie în lungul axei $O\xi$ prin derivarea relaţiilor (1) în raport cu ξ_0, obţinem :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{d\xi_0} + k\frac{dy}{d\xi_0} = 0, \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0),\\
&\frac{dy}{d\xi_0}\cos\pi\alpha - \frac{dx}{d\xi_0}\sin\pi\alpha = 0;\\
&\frac{d\varphi}{d\xi_0} + k\frac{dy}{d\xi_0} = 0, \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (0, 1),\\
&\frac{d\varphi}{d\xi_0} = 0;\\
&\frac{d\varphi}{d\xi_0} = 0, \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (1, a_1),\\
&\frac{dy}{d\xi_0}\cos\pi\beta - \frac{dx}{d\xi_0}\sin\pi\beta = 0;\\
&\frac{d\varphi}{d\xi_0} = 0, \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_1, a_2), \qquad (2)\\
&\frac{dy}{d\xi_0}\cos\pi\gamma - \frac{dx}{d\xi_0}\sin\pi\gamma = 0;\\
&\frac{d\psi}{d\xi_0} = 0, \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_2, a_3)\\
&\frac{dy}{d\xi_0} = 0,\\
&\frac{d\varphi}{d\xi_0} = 0, \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_3, a_4),\\
&\frac{dy}{d\xi_0}\cos\pi\delta - \frac{dx}{d\xi_0}\sin\pi\delta = 0;
\end{aligned}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0} = 0,$$

pentru $(a_4, +\infty)$.

$$\frac{dy}{d\xi_0}\cos\pi\alpha - \frac{dx}{d}\sin\pi\alpha = 0,$$

Ţinînd seama de identităţile

$$\frac{d\varphi}{d\xi_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{df}{d\xi_0} + \frac{\overline{df}}{d\xi_0}\right]; \quad \frac{d\psi}{d\xi_0} = \frac{1}{2i}\left[\frac{df}{d\xi_0} - \frac{\overline{df}}{d\xi_0}\right], \tag{3}$$

$$\frac{dx}{d\xi_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{dz}{d\xi_0} + \frac{\overline{dz}}{d\xi_0}\right]; \quad \frac{dy}{d\xi_0} = \frac{1}{2i}\left[\frac{dz}{d\xi_0} - \frac{\overline{dz}}{d\xi_0}\right]$$

şi introducînd funcţiile olomorfe pe porţiuni

$$F(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{df}{d\zeta} & \text{pentru } \zeta \in \operatorname{Im}\{\zeta\} > 0\,;\ S^+ = \operatorname{Im}\{\zeta\} > 0, \\ \dfrac{\overline{df}}{d\zeta} & \text{pentru } \zeta \in \operatorname{Im}\{\zeta\} < 0\,;\ S^- = \operatorname{Im}\{\zeta\} < 0, \end{cases} \tag{4}$$

$$Z(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{dz}{d\zeta} & \text{pentru } \zeta \in \operatorname{Im}\{\zeta\} > 0, \\ \dfrac{\overline{dz}}{d\zeta} & \text{pentru } \zeta \in \operatorname{Im}\{\zeta\} < 0, \end{cases} \tag{5}$$

care satisface egalităţile [3]

$$\begin{aligned} F^+(\xi_0) &= \overline{F^-(\xi_0)},\ F^-(\xi_0) = \overline{F^+(\xi_0)}, \\ Z^+(\xi_0) &= \overline{Z^-(\xi_0)},\ Z^-(\xi_0) = \overline{Z^+(\xi_0)}, \end{aligned} \tag{6}$$

deducem, în locul condiţiilor (2), următoarele :

$$Z^+(\xi_0) = e^{+2\pi i\alpha}\, Z^-(\xi_0), \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0),$$
$$F^+(\xi_0) = -2ke^{+\pi i\alpha}\sin\pi\alpha\, Z^-(\xi_0) - F^-(\xi_0);$$

$$Z^+(\xi_0) = Z^-(\xi_0) - \frac{2i}{k}\, F^-(\xi_0),$$

$$F^+(\xi_0) = F^-(\xi_0); \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (0, 1),$$

$$
\begin{aligned}
&Z^+(\xi_0) = e^{2\pi i\beta}\, Z^-(\xi_0), \\
&F^+(\xi_0) = -F^-(\xi_0);
\end{aligned}
\qquad \text{pentru } \xi_0 \in (1, a_1),
$$

$$
\begin{aligned}
&Z^+(\xi_0) = e^{2\pi i\gamma}\, Z^-(\xi_0), \\
&F^+(\xi_0) = -F^-(\xi_0);
\end{aligned}
\qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_1, a_2), \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&Z^+(\xi_0) = Z^-(\xi_0), \\
&F^+(\xi_0) = F^-(\xi_0);
\end{aligned}
\qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_2, a_3),
$$

$$
\begin{aligned}
&Z^+(\xi_0) = e^{+2\pi i\delta} Z^-(\xi_0), \\
&F^+(\xi_0) = -F^-(\xi_0);
\end{aligned}
\qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_3, a_4),
$$

$$
\begin{aligned}
&Z^+(\xi_0) = e^{+2\pi i\alpha}\, Z^-(\xi_0), \\
&F^+(\xi_0) = -F^-(\xi_0),
\end{aligned}
\qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_4, +\infty).
$$

Introducem vectorul olomorf $\Phi = (Z, F)$ și matricea coeficienților $G(\xi_0)$ de forma

$$
G(\xi_0) = \begin{cases}
\begin{Vmatrix} e^{+2\pi i\alpha} & 0 \\ 2ke^{+\pi i\alpha} \sin \pi\alpha & -1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (-\infty, 0), \\
\begin{Vmatrix} 1 & -\dfrac{2i}{k} \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (0, 1), \\
\begin{Vmatrix} e^{2\pi i\beta} & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (1, a_1), \\
\begin{Vmatrix} e^{2\pi i\gamma} & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (a_1, a_2), \\
\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (a_2, a_3), \\
\begin{Vmatrix} e^{+2\pi i\delta} & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (a_3, a_4), \\
\begin{Vmatrix} e^{+2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}, & \xi_0 \in (a_4, +\infty).
\end{cases} \tag{8}
$$

Atunci vom avea de rezolvat problema Riemann-Hilbert omogenă în semiplan, pentru un sistem de două funcții olomorfe pe porțiuni : [3]

$$\Phi^{+}(\xi_0) = G(\xi_0) \cdot \Phi^{-}(\xi_0) \qquad \text{pentru} \qquad \xi_0 \in 0\xi - E, \tag{9}$$

unde E este mulțimea discontinuităților de prima speță pentru G. Reducem problema (9) la una cu coeficienți continui. În acest scop, calculăm produsul

$$\overset{\infty}{\gamma} = G^{-1}(\infty + 0) \cdot G(\infty - 0), \tag{10}$$

unde

$$G(\infty - 0) = \begin{Vmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}; \quad G(\infty + 0) = \begin{Vmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ -2ke^{\pi i\alpha} \sin\pi\alpha & -1 \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$$\bar{G}'(\infty + 0) = \begin{Vmatrix} e^{-2\pi i\alpha} & 0 \\ 2ke^{\pi i\alpha} \sin\pi\alpha & -1 \end{Vmatrix}.$$

Din (10) și (11) deducem

$$\overset{\infty}{\gamma} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ +2ke^{+\pi i\alpha} \sin\pi\alpha & 1 \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

Ecuația caracteristică

$$\left|\overset{\infty}{\gamma} - \rho E\right| = \begin{vmatrix} 1-\rho & 0 \\ +2ke^{+\pi i\alpha} \sin\pi\alpha & 1-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

arată că $\rho_1 = \rho_2 = 1$, deci funcțiile F și Z au valori continue în punctul de la infinit. Repetînd acest procedeu [3] pentru punctele $\xi_0 = 0, 1, a_1, a_2, a_3, a_4$, obținem, succesiv,

$$\rho_1 = -e^{+2\pi\alpha}, \qquad \rho_2 = 1 \qquad \text{pentru } \xi_0 = 0, \tag{14}$$

$$\rho_1 = e^{-2\pi i\beta}, \qquad \rho_2 = -1 \qquad \text{pentru } \xi_0 = 1, \tag{15}$$

$$\rho_1 = e^{2\pi i(\beta-\gamma)}, \qquad \rho_2 = 1 \qquad \text{pentru } \xi_0 = a_1, \tag{16}$$

$$\rho_1 = e^{2\pi i\gamma}, \qquad \rho_2 = -1 \qquad \text{pentru } \xi_0 = a_2 \tag{17}$$

$$\rho_1 = e^{2\pi i\delta}, \qquad \rho_2 = -1 \qquad \text{pentru } \xi_0 = a_3 \tag{18}$$

$$\rho_1 = e^{2\pi i(\alpha-\delta)}, \qquad \rho_2 = +1 \qquad \text{pentru } \xi_0 = a_4. \tag{19}$$

Să punem acum

$$Z(\zeta) = (\zeta - a_1)^{\beta-\gamma}(\zeta - a_2)^{\gamma-\frac{1}{2}}(\zeta - a_3)^{\delta-\frac{1}{2}}(\zeta - a_4)^{\alpha-\delta} \times$$

$$\times \zeta^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-\zeta)^{-\beta+\frac{1}{2}} Z^*(\zeta). \tag{20}$$

Funcțiile olomorfe pe porțiuni Z^*, F au în jurul punctelor $\zeta = 0$, 1, a_2, a_3, ∞ exponenții $\overset{0}{\rho}_1 = \overset{0}{\rho}_2 = 0$; $\overset{1}{\rho}_1 = \overset{1}{\rho}_2 = -\frac{1}{2}$; $\overset{a_2}{\rho}_1 = -\frac{1}{2}$, $\overset{a_2}{\rho}_2 = \frac{1}{2}$; $\overset{a_3}{\rho}_1 = -\frac{1}{2}$, $\overset{a_3}{\rho}_2 = \frac{1}{2}$; $\overset{\infty}{\rho}_1 = \overset{\infty}{\rho}_2 = 2$ [2].

Le vom desemna prin tabloul :

$$P\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & a_2 & a_3 & \infty \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2\,;\ \zeta \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right\}, \tag{21}$$

numit și simbolul lui Riemann. Conform unei proprietăți acesta se mai scrie încă :

$$P\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & a_2 & a_3 & \infty \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2\ ;\ \zeta \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right\} =$$

$$= (1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(\zeta - a_2)^{-\frac{1}{2}}(\zeta - a_3)^{-\frac{1}{2}} \times$$

$$\times P_1\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & a_2 & a_3 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\ ;\ \zeta \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right\}. \tag{22}$$

Cum [2] a_2 şi a_3 sînt puncte obişnuite pentru funcţiile olomorfe definite prin simbolul P_1, deducem din (22):

$$P\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & a_2 & a_3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\begin{array}{c} \infty \\ 2 \\ 2 \end{array}; \zeta\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta)(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}} P_1\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}; \zeta\right\}. \quad (23)$$

Punînd

$$U(\zeta) = P\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}; \zeta\right\}, \quad (24)$$

să observăm că funcţia olomorfă U în tot planul verifică ecuaţia diferenţială

$$\zeta(1-\zeta)U'' + (1-2\zeta)U' - \frac{1}{4}U = 0, \quad (25)$$

ale cărei soluţii în jurul lui $\zeta = 0$ sînt

$$U_1(\zeta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\zeta\sin^2\theta}} = K(\zeta) \quad (26)$$

şi

$$U_2(\zeta) = K(1-\zeta) = K'(\zeta), \quad (27)$$

unde K şi K' sînt integralele eliptice complete de prima speţă de modul $\chi^2 = \zeta$, respectiv $\chi'^2 = 1 - \zeta$.

Atunci, pentru $0 < \zeta < 1$, pentru Z şi F avem soluţiile

$$Z(\zeta) = \zeta^{\alpha-\frac{1}{2}}(1-\zeta)^{-\beta}(\zeta-a_1)^{\beta-\gamma}(\zeta-a_2)^{\gamma-1}(\zeta-a_3)^{\delta-1}\times$$

$$\times(\zeta-a_4)^{\alpha-\delta}[CK(\zeta)+DK(1-\zeta)], \tag{28}$$

$$F(\zeta) = (1-\zeta)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-a_2)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-a_3)^{-\frac{1}{2}}[AK(\zeta)+BK(1-\zeta)], \tag{29}$$

iar viteza complexă dată de egalitatea $W(\zeta) = \dfrac{F(\zeta)}{Z(\zeta)}$ are forma

$$W(\zeta) = \frac{\zeta^{\frac{1}{2}-\alpha}(1-\zeta)^{\beta-\frac{1}{2}}(\zeta-a_2)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_3)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(\zeta-a_1)^{\beta-\gamma}(\zeta-a_4)^{\alpha-\delta}}\times$$

$$\times\frac{AK(\zeta)+BK(1-\zeta)}{CK(\zeta)+DK(1-\zeta)}. \tag{30}$$

Introducem funcţia

$$W_1(\zeta) = \frac{AK(\zeta)+BK(1-\zeta)}{CK(\zeta)+DK(1-\zeta)}, \tag{31}$$

care este tocmai transformarea conformă modulară a triunghiului din planul W_1 (fig. 3) pe semiplanul superior din figura 2.

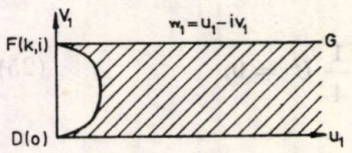


Fig. 3

Impunînd corespondenţele : $\zeta = 0$ pentru $W_1 = k_1 i$, $\zeta = 1$ pentru $W = 0$, $\zeta = \dfrac{1}{2}$ pentru $w_1 = \dfrac{k_1}{2} + \dfrac{k_1 i}{2}$, găsim pentru constantele A, B, C, D valorile

$$A = 0,\ B = k_1,\ C = 1,\ D = -i. \tag{32}$$

De aici şi din (31) deducem (33)

$$W_1(\zeta) = k_1\frac{K(1-\zeta)}{K(\zeta)-iK(1-\zeta)} \quad 0 < \zeta < 1.$$

Atunci, cu (33) în (30) rezultă

$$W(\zeta) = k_1 \frac{\zeta^{\frac{1}{2}-\alpha}(1-\zeta)^{\beta-\frac{1}{2}}(a_2-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(\zeta-a_1)^{\beta-\gamma}(a_4-\zeta)^{\alpha-\delta}} \times$$

$$\times \frac{K(1-\zeta)}{K(\zeta) - \mathrm{i}\,K(1-\zeta)}. \tag{34}$$

În continuare, cînd $-\infty < \zeta < 0$ [2]
avem

$$W_1(\zeta) = k_1 \mathrm{i}\, \frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) - \mathrm{i}K\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)}{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)}, \tag{35}$$

iar cînd $1 < \zeta < \infty$

$$W_1(\zeta) = k_1 \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{36}$$

şi formula corespunzătoare pentru W.

2. a) Luînd în (30), (34), (35), (36)

$\alpha = \beta = \gamma = \delta - \frac{1}{2}$, obţinem mişcarea printr-un baraj poros plasat pe un pat impermeabil orizontal (Problema lui Davison) ($k_1 = k$).

b) Să luăm $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, iar δ, γ deocamdată oarecare.

Atunci din formulele amintite găsim

$$W(\zeta) = k_1 \frac{(a_2-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(a_1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}} \cdot \frac{K(1-\zeta)}{K(\zeta) - \mathrm{i}K(1-\zeta)} \tag{37}$$

pentru $0 < \zeta < 1$,

$$W(\zeta) = k_1 \mathrm{i}\, \frac{(a_2-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(a_1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}} \quad \frac{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) - \mathrm{i}K\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)}{K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)} \tag{38}$$

pentru $-\infty < \zeta < 0$,

$$W(\zeta) = ik_1 e^{-\pi i\gamma} \frac{(a_2-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}} \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{39}$$

pentru $a_1 < \zeta < a_2$,

$$W(\zeta) = k_1 \frac{(a_2-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(a_1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}} \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{40}$$

pentru $1 < \zeta < a_1$,

$$W(\zeta) = k_1 \frac{(\zeta-a_2)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}} \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{41}$$

pentru $a_2 < \zeta < a_3$,

$$W(\zeta) = -k_1 ie^{\pi i\delta} \frac{(\zeta-a_2)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_3)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}} \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{42}$$

pentru $a_3 < \zeta < a_4$,

$$W(\zeta) = k_1 \frac{(\zeta-a_2)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_3)^{\frac{1}{2}-\delta}}{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_4)^{\frac{1}{2}-\delta}} \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{K\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \tag{43}$$

pentru $a_4 < \zeta < \infty$.

Cînd $\zeta = 0$, atunci $w = ki$, iar din (37) găsim

$$k = k_1 \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \left(\frac{a_3}{a_4}\right)^{\frac{1}{2}-\delta}, \tag{44}$$

care reprezintă legătura dintre coeficientul de filtraţie dat k şi mărimea k_1. Dacă $\gamma = \delta = 0$, din (44) avem în particular :

$$k = k_1 \sqrt{\frac{a_2 a_3}{a_1 a_4}}. \tag{45}$$

În continuare, din (28), (29) şi (37) — (47) avem

$$Z(\zeta) = -Ai \frac{(a_1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_3-\zeta)^{\delta-1}(a_2-\zeta)^{\gamma-1}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{1-\zeta} K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)$$

$$\text{pentru } -\infty < \zeta < 0, \tag{46}$$

$$F(\zeta) = \frac{k_1 A}{(1-\zeta)\sqrt{(a_2-\zeta)(a_3-\zeta)}}\left[K\left(\frac{1}{1-\zeta}\right) - iK\left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)\right]$$

$$Z(\zeta) = -A \frac{(a_1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\zeta)^{\gamma-1}(a_3-\zeta)^{\delta-1}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{1-\zeta}} \times$$

$$\times [K(\zeta) - iK(1-\zeta)]$$

$$\text{pentru } 0 < \zeta < 1, \tag{47}$$

$$F(\zeta) = -k_1 A \frac{K(1-\zeta)}{\sqrt{(1-\zeta)(a_2-\zeta)(a_3-\zeta)}}$$

$$Z(\zeta) = -Ai \frac{(a_1-\zeta)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\zeta)^{\gamma-1}(a_3-\zeta)^{\delta-1}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}} K\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

$$\text{pentru } 1 < \zeta < a_1, \tag{48}$$

$$F(\zeta) = -k_1 Ai \frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a_2-\zeta)(a_3-\zeta)}}$$

$$Z(\zeta) = -Ae^{\pi i\gamma}\frac{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\zeta)^{\gamma-1}(a_3-\zeta)^{\delta-1}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}K\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

pentru $a_1 < \zeta < a_2$, (49)

$$F(\zeta) = -k_1 Ai\frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(a_2-\zeta)(a_3-\zeta)}}$$

$$Z(\zeta) = A\frac{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_2)^{\gamma-1}(a_3-\zeta)^{\delta-1}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}K\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

pentru $a_2 < \zeta < a_3$, (50)

$$F(\zeta) = k_1 A\frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a_2)(a_3-\zeta)}}$$

$$Z(\zeta) = Ae^{\pi i(1-\delta)}\frac{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_2)^{\gamma-1}(\zeta-a_3)^{\delta-1}(a_4-\zeta)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}\times K\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

pentru $a_3 < \zeta < a_4$ (51)

$$F(\zeta) = k_1 iA\frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}}$$

$$Z(\zeta) = Ai\frac{(\zeta-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\zeta-a_2)^{\gamma-1}(\zeta-a_3)^{\delta-1}(\zeta-a_4)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)}}K\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

pentru $a_4 < \zeta < \infty$, (52)

$$F(\zeta) = k_1 iA\frac{K\left(\frac{\zeta-1}{\zeta}\right)}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}}.$$

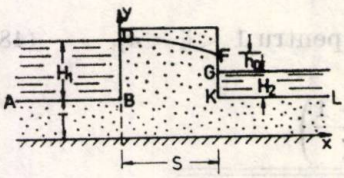


Fig. 4

În cazul *b*), pentru $\gamma = \delta = 0$ domeniul mișcării este reprezentat în figura 4. Cum

$$Z^+(\zeta) = \frac{dz}{d\zeta},\quad F^+(\zeta) = \frac{df}{d\zeta}, \qquad (53)$$

rezultă că pe 0ξ avem

$$Z^{+}(\xi_0)=\begin{cases}\dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } -\infty<\xi_0<0,\\ \dfrac{dx}{d\xi_0}+i\dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } 0<\xi_0<1,\\ \dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } 1<\xi_0<a_1,\\ \dfrac{dx}{d\xi_0}\dfrac{e^{\pi i\gamma}}{\cos\pi\gamma} & \text{pentru } a_1<\xi_0<a_2,\\ \dfrac{dx}{d\xi_0} & \text{pentru } a_2<\xi_0<a_3,\\ \dfrac{dx}{d\xi_0}\dfrac{e^{-\pi i\delta}}{\cos\pi\delta} & \text{pentru } a_3<\xi_0<a_4,\\ \dfrac{dy}{d\xi_0} & \text{pentru } a_4<\xi_0<\infty.\end{cases} \tag{54}$$

$$F^{+}(\xi_0)=\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{d\xi_0}+i\dfrac{d\psi}{d\xi_0} & \text{pentru } -\infty<\xi_0<0,\\ \dfrac{d\varphi}{d\xi_0} & \text{pentru } 0<\xi_0<1,\\ i\dfrac{d\psi}{d\xi_0} & \text{pentru } 1<\xi_0<a_2,\\ \dfrac{d\varphi}{d\xi_0} & \text{pentru } a_2<\xi_0<a_3,\\ i\dfrac{d\psi}{d\xi_0} & \text{pentru } a_3<\xi_0<\infty.\end{cases} \tag{55}$$

Integrînd egalităţile (46) — (52) şi ţinînd seama de (1), (54), (55), obţinem

$$\begin{aligned}h_0&=-A\int_{-\infty}^{0}\frac{(a_1-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\xi_0)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{1-\zeta_0}K\left(\frac{1}{1-\xi_0}\right)d\xi_0,\\ kh_0&=-k_1A\int_{-\infty}^{0}\frac{K\left(\dfrac{\xi_0}{1-\xi_0}\right)}{(1-\xi_0)\sqrt{(a_2-\xi_0)(a_3-\xi_0)}}\,d\xi_0;\end{aligned} \tag{56}$$

$$S = A \int_0^1 \frac{(a_1-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\xi_0)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{1-\xi_0}} K(\xi_0)\,d\xi_0, \tag{57}$$

$$H_1-H_2-h_0=A\int_0^1 \frac{(a_1-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\xi_0)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{1-\xi_0}} K(1-\xi_0)\,d\xi_0;$$

$$\psi_G = q + k_1 A \int_{-\infty}^0 \frac{K(1-\xi_0)}{(1-\xi_0)\sqrt{(a_2-\xi_0)(a_3-\xi_0)}}\,d\xi_0, \tag{58}$$

$$k(H_1-H_2-h_0) = k_1 A \int_0^1 \frac{K(1-\xi_0)}{(1-\xi_0)\sqrt{(a_2-\xi_0)(a_3-\xi_0)}}\,d\xi_0;$$

$$H_1-T=A\int_1^{a_1} \frac{(a_1-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\xi_0)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)}} K\left(\frac{1}{\xi_0}\right)d\xi_0,$$

$$q = A \int_1^{a_2} \frac{K\left(\frac{\xi_0-1}{\xi_0}\right)}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(a_2-\xi_0)(a_3-\xi_0)}}\,d\xi_0, \tag{59}$$

$$S_1=A\cos\pi\gamma\cdot\int_{a_1}^{a_2} \frac{(\xi_0-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\xi_0)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)}} K\left(\frac{1}{\xi_0}\right)d\xi_0;$$

$$S_1+S+S_2=A\int_{a_2}^{a_3} \frac{(\xi_0-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\xi_0-a_2)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)}} K\left(\frac{1}{\xi_0}\right)d\xi_0,$$

$$k(H_1-H_2)=k_1 A \int_{a_2}^{a_3} \frac{K\left(\frac{\xi_0-1}{\xi_0}\right)}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-a_2)(a_3-\xi_0)}}\,d\xi_0; \tag{60}$$

$$T=\begin{cases} A\sin\pi\gamma\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} \frac{(\xi_0-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(a_2-\xi_0)^{\gamma-1}(a_3-\xi_0)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)}} K\left(\frac{1}{\xi_0}\right)d\xi_0, \\ A\sin\pi\delta\displaystyle\int_{a_3}^{a_4} \frac{(\xi_0-a_1)^{\frac{1}{2}-\gamma}(\xi_0-a_2)^{\gamma-1}(\xi_0-a_3)^{\delta-1}(a_4-\xi_0)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)}} K\left(\frac{1}{\xi_0}\right)d\xi_0, \end{cases} \tag{61}$$

ştiind că

$$\frac{S_1}{T} = \operatorname{ctg} \pi\gamma, \quad \frac{S_2}{T} = \operatorname{ctg} \pi\delta. \tag{62}$$

Ecuaţiile suprafeţei libere au forma :

$$x(\xi_0) - S = -A \int_0^{\xi_0} \frac{(a_1 - \xi_0)^{\frac{1}{2}-\gamma} (a_2 - \xi)^{\gamma-1} (a_3 - \xi)^{\delta-1} (a_4 - \xi)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{1 - \xi}} K(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{63}$$

$$y(\xi_0) - H_2 - h_0 = A \int_0^{\xi_0} \frac{(a_1 - \xi)^{\frac{1}{2}-\gamma} (a_2 - \xi)^{\gamma-1} (a_3 - \xi)^{\delta-1} (a_4 - \xi)^{\frac{1}{2}-\delta}}{\sqrt{(1 - \xi)}} \times$$

$$\times K(1 - \xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

Pentru a cunoaşte valorile mărimilor din (56), (61) este necesar să se precizeze valorile lui a_1, a_2, a_3, a_4, γ, δ şi apoi să se utilizeze maşinile electronice de calcul.

Primită la redacţie la 4 aprilie 1979

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

1. P. Ia. Polubarinova-Kocina, *Primenenie teorii lineinih differenţialnih uravnenii k nekotorim sluciaiam dvijenia gruntovoi vod*, A N S S S R, seria mat., *3* (1938).
2. P. Ia. Polubarinova-Kocina, *Teoria dvijenia gruntovih vod*, Moska (1952).
3. I. N. Vekua, *Sistemi singuliarnih integralnih uravnenii i nekotorie granicinie zadaci*, Izdatelstvo „Nauka", Moskva (1970).

STUDII

ASUPRA CONDIȚIILOR LA LIMITĂ ȘI INIȚIALE ÎN DEZLOCUIREA IMISCIBILĂ A ȚIȚEIULUI CU UN AMESTEC BIFAZIC GAZE-APĂ

de CONSTANTIN GH. POPA
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Lucrarea tratează problema curgerii multifazice prin mediile poroase în cazul dezlocuirii țițeiului cu un amestec bifazic gaze-apă. În acest scop la teoria prezentată într-o lucrare anterioară se fac modificările care privesc condițiile la limită și cele inițiale. Soluția este aflată tot prin metoda caracteristicilor, prezentîndu-se pentru exemplificare și o aplicație concretă.

INTRODUCERE

În lucrarea [1] a fost prezentată teoria curgerii multifazice prin mediile poroase cu o aplicație pentru cazul dezlocuirii unui amestec apă-țiței de către gaze. Această teorie este apoi utilizată în [2] pentru cazul dezlocuirii unui amestec gaze-țiței de către apă, situație întîlnită în exploatarea zăcămintelor de țiței depletate supuse unui proces de injecție de apă, în vederea creșterii factorului de recuperare. În fiecare din aceste cazuri teoria a condus la o descriere exactă a fenomenului și a permis să se tragă o serie de concluzii interesante asupra procesului de dezlocuire.

În ultimul timp, în producție, au apărut o serie de procese noi pentru creșterea factorului de recuperare a țițeiului din zăcăminte, cum sînt combustia subterană și injecția alternantă de apă și gaze. Aceste procese au condus la o serie de aspecte noi ale proceselor de dezlocuire imiscibilă. Lucrarea de față are drept scop aplicarea teoriei curgerii multifazice prin mediile poroase în vederea descrierii fenomenului de dezlocuire a țițeiului de către un amestec bifazic apă-gaze. Procesul este similar celui care are loc la combustia subterană, într-o zonă din fața frontului de combustie, unde temperatura este apropiată de temperatura inițială de zăcămînt, și țițeiul este dezlocuit de către gazele degajate din combustie și apa rezultată prin condensare. Avînd în vedere complexitatea fenomenului, se pune un accent deosebit pe descrierea condițiilor la limită și a celor inițiale, metoda de rezolvare a problemei fiind în rest similară cu cea folosită în [1, 2].

ECUAȚIILE DE CURGERE

Se consideră un mediu poros unidimensional, omogen și izotrop de porozitate m și permeabilitate absolută K, saturat uniform cu o saturație în țiței $S_{t0} = 1 - S_{ai}$. Pe la un capăt al mediului poros de secțiune A și

lungime L se injectează un amestec bifazic format din apă și gaze, cu un debit $Q_a + Q_g = Q_{inj}$, iar pe la celălalt capăt se extrage un debit $Q_{extr} = Q_{inj}$. Menținîndu-se bilanțul de fluide extrase și injectate la o presiune medie constantă pe tot timpul procesului, se poate considera că fluidele sînt incompresibile.

Fluidele fiind imiscibile, neglijînd forțele gravitaționale și cele capilare, într-o secțiune oarecare x, se poate defini fracția de fluid în curent, respectiv :

$$f_a = \frac{\dfrac{k_a}{\mu_a}}{\dfrac{k_a}{\mu_a} + \dfrac{k_t}{\mu_t} + \dfrac{k_g}{\mu_g}}, \tag{1'}$$

$$f_g = \frac{\dfrac{k_g}{\mu_g}}{\dfrac{k_a}{\mu_a} + \dfrac{k_t}{\mu_t} + \dfrac{k_g}{\mu_g}}, \tag{1''}$$

$$f_t = 1 - f_a - f_g, \tag{1'''}$$

unde k_a, k_t, k_g sînt, respectiv, permeabilitățile relative în curgerea trifazică pentru apă, țiței și gaze, care sînt funcție de saturațiile S_a, S_t, S_g existente în secțiunea x.

Deoarece

$$S_a + S_t + S_g = 1, \tag{2}$$

rezultă că

$$f_a = f_a(S_a, S_g), \tag{3'}$$

$$f_g = f_a(S_a, S_g). \tag{3''}$$

În secțiunea x, ecuațiile de continuitate sînt :

$$\frac{\partial q_a}{\partial x} = -m \cdot A \cdot \frac{\partial S_a}{\partial t}, \tag{4'}$$

$$\frac{\partial q_g}{\partial x} = -m \cdot A \cdot \frac{\partial S_g}{\partial t}. \tag{4''}$$

Ținînd seama că în această secțiune debitele se pot scrie sub forma :

$$q_a = Q_{inj} \cdot f_a, \tag{5'}$$

$$q_g = Q_{inj} \cdot f_g, \tag{5''}$$

ecuațiile (4) devin :

$$\frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial x} = - \frac{\partial S_a}{\partial t}, \tag{6'}$$

$$\frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \frac{\partial f_g}{\partial x} = - \frac{\partial S_g}{\partial t} \tag{6''}$$

sau, avînd în vedere relațiile (3),

$$\frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \left(\frac{\partial f_a}{\partial S_a} \cdot \frac{\partial S_a}{\partial x} + \frac{\partial f_a}{\partial S_g} \cdot \frac{\partial S_g}{\partial x} \right) = - \frac{\partial S_a}{\partial t}, \tag{7'}$$

$$\frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_g}{\partial S_a} \cdot \frac{\partial S_a}{\partial x} + \frac{\partial f_g}{\partial S_g} \cdot \frac{\partial S_g}{\partial x} \right) = - \frac{\partial S_g}{\partial t}. \tag{7''}$$

Pentru aflarea soluției, sistemului (7), plecînd de la condițiile inițiale și la limită date, se poate utiliza metoda caracteristicilor [3, 4]. Rezultă astfel vitezele de deplasare a saturațiilor S_a și S_g din secțiunea x, la momentul t :

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)_{S_a(x,t)} = \frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_a}{\partial S_a} + \frac{\partial f_a}{\partial S_g} \cdot \frac{\partial S_g / \partial x}{\partial S_a / \partial x} \right)_{\substack{S_a(x,t) \\ S_g(x,t)}}, \tag{8'}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right)_{S_g(x,t)} = \frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \left(\frac{\partial f_g}{\partial S_g} + \frac{\partial f_g}{\partial S_a} \cdot \frac{\partial S_a / \partial x}{\partial S_g / \partial x} \right)_{\substack{S_a(x,t) \\ S_g(x,t)}} \tag{8''}$$

În cazul apariției șocurilor, vitezele la front sînt date de [1] :

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{S_a^+} = \frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \frac{f_a^+ - f_a^-}{S_a^+ - S_a^-}, \tag{9'}$$

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{S_g^+} = \frac{Q_{inj}}{m \cdot A} \cdot \frac{f_g^+ - f_g^-}{S_g^+ - S_g^-}, \tag{9''}$$

unde S_a^+, S_a^- și S_g^+, S_g^- sînt saturațiile în apă și, respectiv, gaze în zona frontului de apă, și, respectiv, gaze, iar

$$f_a^{\pm} = f_a(S_a^{\pm}, S_g'), \tag{10'}$$

$$f_g^{\pm} = f_g(S_a', S_g^{\pm}), \tag{10''}$$

S_g' și S_a' fiind saturația în gaze în zona frontului de apă și, respectiv, saturația în apă în zona frontului de gaze.

Plecînd de la anumite profile date de saturație, $S_a(x_i, t_n)$ și $S_g(x_i, t_n)$ cu relațiile (8) și (9) se pot determina noile profile de saturație $S_a(X_j, t_{n+1})$ și $S_g(X_k, t_{n+1})$, unde

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \tag{11}$$

iar

$$x_j = x_i + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{S_a(x_i, t_n)} \cdot \Delta t\,, \tag{12'}$$

$$x_k = x_i + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{S_g(x_i, t_n)} \cdot \Delta t. \tag{12''}$$

Din aproape în aproape, plecînd de la aceste noi profile de saturație, va fi posibilă descrierea întregului proces de dezlocuire.

CONDIȚII INIȚIALE ȘI LA LIMITĂ. APLICAȚIE

Fie cazul unui zăcămînt liniar, saturat uniform, cu $S_{ai} = 0{,}2$ și deci $S_{to} = 0{,}8$. La fața de intrare se injectează un amestec de apă și gaze cu un debit total care se menține constant în tot timpul procesului :

$$Q_{inj} = Q_a + Q_g. \tag{13}$$

De asemenea, la fața de intrare se menține constantă rația de injecție gaze-apă :

$$R = \frac{Q_g}{Q_a}. \tag{14}$$

Exprimînd pe Q_g și Q_a cu ajutorul relațiilor (5) și ținînd seama de relațiile (1), relația (14) se poate scrie sub forma

$$R = \frac{k_g}{k_a} \cdot \frac{\mu_a}{\mu_g}. \tag{15}$$

Amestecul injectat va dezlocui țițeiul din mediul poros și pentru descrierea procesului de dezlocuire este necesară cunoașterea curbelor de permeabilitate relativă în funcție de saturație în mișcarea trifazică. Fie acestea :

$$k_a = \left(\frac{S_a - S_{ai}}{1 - S_{ai}}\right)^3; \quad k_g = \left(\frac{S_g}{1 - S_{ai} - S_{tir}}\right)^3, \tag{16}$$

$$k_t = \sqrt{\left(\frac{S_t - S_{tir}}{1 - S_{ai} - S_{tir}}\right)^3},$$

unde se consideră $S_{tir} = 0{,}18$.

De asemenea, trebuie cunoscute vîscozitățile dinamice ale fluidelor injectate și a celui dezlocuit. Fie acestea $\mu_g = 0{,}01$ cP, $\mu_a = 0{,}5$ cP, $\mu_t = 2$ cP.

Avînd în vedere relațiile (16), din (15) rezultă că $R = R(S_a, S_g)$. Dar din (2) :

$$S_g = 1 - S_a - S_t, \tag{17}$$

așadar

$$R = R\,(S_a,\ 1 - S_a - S_t). \tag{18}$$

Prin specificarea unei valori pentru saturația în țiței, S_t, din (15) cu (16) și (17) se poate deduce o pereche de valori (S_a, S_g) care să satisfacă relația (18).

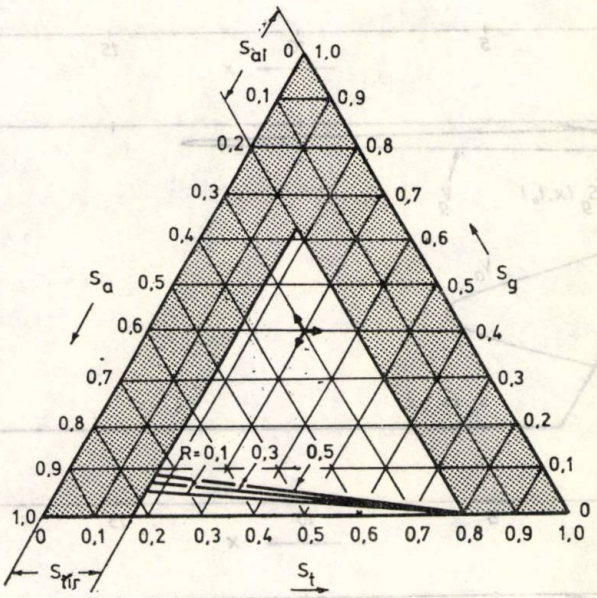


Fig. 1

Aplicînd un procedeu de încercare și eroare, a fost posibil să se determine seturile de puncte de saturație reprezentate în figura 1 pentru cîteva valori constante ale rației R de injecție apă-gaze.

Este interesant de remarcat că la valoare dată pentru S_t, rezultă o singură pereche de valori (S_a, S_g) care satisface relația R = constant. De asemenea, se mai remarcă faptul că R rămîne constant pentru orice valoare a saturației S_t cuprinsă între S_{tir} și $(1 - S_{ai})$. Aceste remarci conduc la concluzia că pentru un R dat, distribuția inițială de saturație nu poate fi luată oricum, ci trebuie avut în vedere că la o valoare dată pentru S_t corespunde o pereche bine determinată de valori (S_a, S_g). De asemenea, avînd în vedere că în adîncul mediului poros saturația $S_t = 1 - S_{ai}$, și că distribuția inițială de saturație este continuă, rezultă și condițiile la limită și anume că la fața de intrare saturația în țiței este egală cu S_{tir}, iar saturațiile în gaze și apă sînt cele corespunzătoare condiției R = constant (fig. 1)

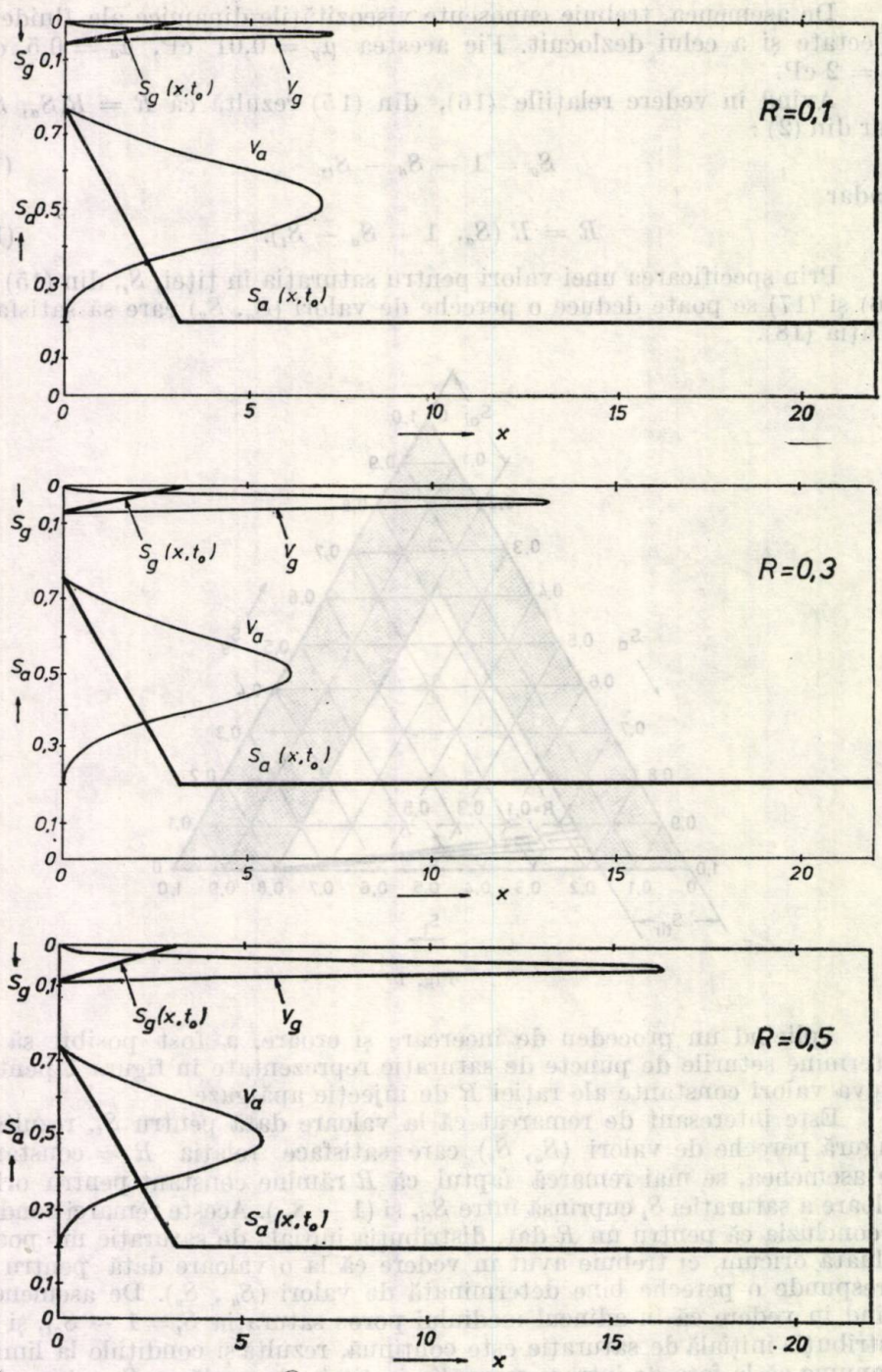


Fig. 2

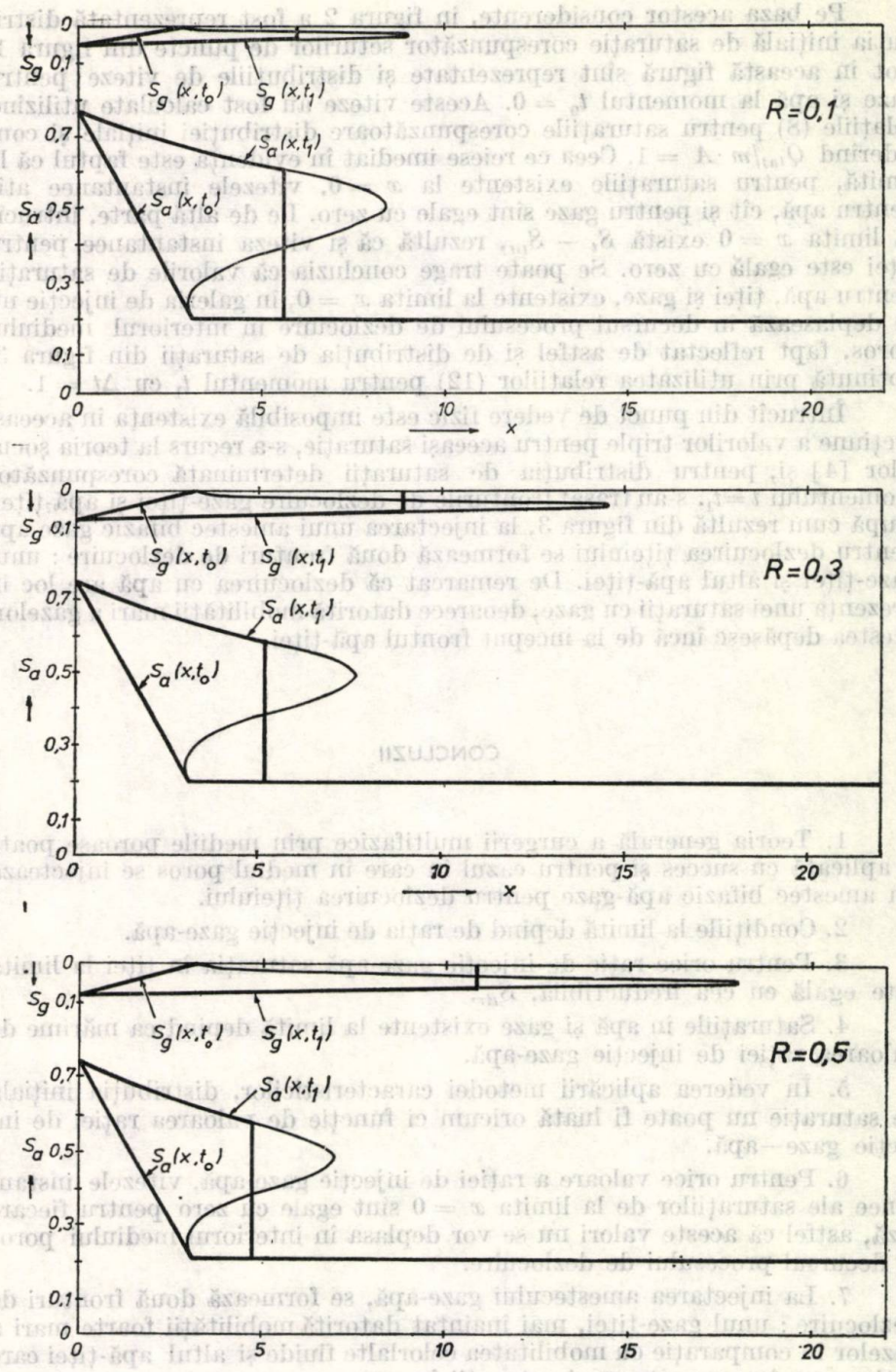

R=0,1
R=0,3
R=0,5
S_g
S_a
$S_g(x,t_0)$
$S_g(x,t_1)$
$S_a(x,t_1)$
$S_a(x,t_0)$
0
0,1
0,3
0,5
0,7
5
10
15
20
x

Fig. 3

Pe baza acestor considerente, în figura 2 a fost reprezentată distribuţia iniţială de saturaţie corespunzător seturilor de puncte din figura 1. Tot în această figură sînt reprezentate şi distribuţiile de viteze pentru gaze şi apă la momentul $t_0 = 0$. Aceste viteze au fost calculate utilizînd relaţiile (8) pentru saturaţiile corespunzătoare distribuţiei iniţiale şi considerînd $Q_{inj}/m \cdot A = 1$. Ceea ce reiese imediat în evidenţă este faptul că la limită, pentru saturaţiile existente la $x = 0$, vitezele instantanee atît pentru apă, cît şi pentru gaze sînt egale cu zero. Pe de altă parte, întrucît la limita $x = 0$ există $S_t - S_{tir}$, rezultă că şi viteza instantanee pentru ţiţei este egală cu zero. Se poate trage concluzia că valorile de saturaţie pentru apă, ţiţei şi gaze, existente la limita $x = 0$, în galeria de injecţie nu se deplasează în decursul procesului de dezlocuire în interiorul mediului poros, fapt reflectat de astfel şi de distribuţia de saturaţii din figura 3, obţinută prin utilizatea relaţiilor (12) pentru momentul t_1 cu $\Delta t = 1$.

Întrucît din punct de vedere fizic este imposibilă existenţa în aceeaşi secţiune a valorilor triple pentru aceeaşi saturaţie, s-a recurs la teoria şocurilor [4] şi, pentru distribuţia de saturaţii determinată corespunzător momentului $t = t_1$, s-au trasat fronturile de dezlocuire gaze-ţiţei şi apă-ţiţei. După cum rezultă din figura 3, la injectarea unui amestec bifazic gaze-apă pentru dezlocuirea ţiţeiului se formează două fronturi de dezlocuire : unul gaze-ţiţei şi altul apă-ţiţei. De remarcat că dezlocuirea cu apă are loc în prezenţa unei saturaţii cu gaze, deoarece datorită mobilităţii mari a gazelor, acestea depăşesc încă de la început frontul apă-ţiţei.

CONCLUZII

1. Teoria generală a curgerii multifazice prin mediile poroase poate fi aplicată cu succes şi pentru cazul în care în mediul poros se injectează un amestec bifazic apă-gaze pentru dezlocuirea ţiţeiului.

2. Condiţiile la limită depind de raţia de injecţie gaze-apă.

3. Pentru orice raţie de injecţie gaze-apă saturaţia în ţiţei la limită este egală cu cea ireductibilă, S_{tir}.

4. Saturaţiile în apă şi gaze existente la limită depind ca mărime de valoarea raţiei de injecţie gaze-apă.

5. În vederea aplicării metodei caracteristicilor, distribuţia iniţială de saturaţie nu poate fi luată oricum ci funcţie de valoarea raţiei de injecţie gaze—apă.

6. Pentru orice valoare a raţiei de injecţie gaze-apă, vitezele instantanee ale saturaţiilor de la limita $x = 0$ sînt egale cu zero pentru fiecare fază, astfel că aceste valori nu se vor deplasa în interiorul mediului poros în decursul procesului de dezlocuire.

7. La injectarea amestecului gaze-apă, se formează două fronturi de dezlocuire : unul gaze-ţiţei, mai înaintat datorită mobilităţii foarte mari a gazelor în comparaţie cu mobilitatea celorlalte fluide şi altul apă-ţiţei care acţionează în prezenţa unei saturaţii în gaze.

NOTAŢII

A — secţiunea mediului poros;
f — fracţia de fluid în curent;
k — permeabilitate relativă de fază;
m — porozitate;
Q — debitul de fluid la limita mediului poros;
q — debitul de fluid în secţiunea x;
R — raţia de injecţie gaze-apă;
S — saturaţia;
t — timpul;
V — viteze instantanee;
μ — vîscozitatea dinamică;

INDICI

a — apă;
ai — apă interstiţială;
$extr$ — extracţie;
g — gaze;
inj — injecţie;
t — ţiţei
tir — ţiţei ireductibil;
$+$ — amonte;
$-$ — aval.

Primită la redacţie la 30 mai 1979

BIBLIOGRAFIE

1. C. Gh. Popa. *Generalizarea teoriei lui Buckley şi Leverett asupra dezlocuirii amestecului a două fluide imiscibile oarecare de către un al treilea imiscibil cu ele*, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, **29**, 5, 1235—1246, (1970).
2. C. Gh. Popa. *La théorie de l'écoulement polyphasique des fluides imiscibles dans les milieux poreux, appliquée au déplacement du mélange gas-huile par l'eau*, Rezue de l'Inst. Français du Pétrole, Janv—febr., 1973, p. 67.
3. J. W. Sheldon, B. Zondek, W. T. Cardvell, *One Dimensional, Incompressible, Noncapillary, Two — Phase Fluid Flow in a Porous Medium*, Trans AIME, **216**, p. 290.
4. W. T. Cardwell. *The Meaning of the Triple Valuein a Noncapillary, Buckley — Leverett Theory*, Trans AIME, **216**, 1959, p. 27.

O FAMILIE BIPARAMETRICĂ DE PROFILE LAMINARE DE VITEZĂ

de H. DUMITRESCU
Institutul Național pentru Creație Științifică și Tehnică

În lucrare se propune pentru stratul limită laminar incompresibil, bidimensional, o familie de profile, care depinde de doi parametrii : parametrul binecunoscut al lui „Pohlhausen", $\lambda = \delta^2/\nu \frac{dU_e}{dx}$, care ține seama de gradientul longitudinal de presiune și un al doilea parametru, $\zeta = \frac{\delta^3}{\mu U_e}\left(\frac{\partial^2 \tau_l}{\partial x^2}\right)$, care ține seama de gradientul transversal de presiune, la perete. Această familie de profile acoperă o mare varietate de situații de curgere, accelerate și frînate pînă la desprindere.

1. INTRODUCERE

În această lucrare se propune o metodă indirectă de calcul a stratului limită, de tip „Pohlhausen", adecvată, însă, și pentru curgerile cu gradient pozitiv de presiune puternic. Metoda lui „Pohlhausen" (1), care folosește numai ecuația cantității de mișcare, nu dă întotdeauna o descriere precisă a evoluției stratului limită, în special în apropierea punctului de desprindere. Prezenta metodă pare să fie mai precisă și este desemnată să elimine complicația utilizării hărților de profile ale lui Head (2), prin utilizarea în forma integrală a ecuațiilor cantității de mișcare și energiei cinetice a unei familii biparametrice de profile, de care ne vom ocupa în cele ce urmează.

2. CONDIȚII DE COMPATIBILITATE ALE ECUAȚIILOR STRATULUI LIMITĂ

Curgerile bidimensionale ale unui fluid vîscos incompresibil sînt guvernate de ecuațiile Navier—Stokes și ecuația de continuitate, care, în ipoteza că presiunea fluidului este egală cu componentele normale ale tensiunii (adică, se neglijează termenii de frecare ai componentelor normale ale tensiunii), se scriu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_l}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_l}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{3}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 6, 1979, P. 817—824

BIBLIOTECA MOȘZAKI

în care componenta tangențială a tensiunii de frecare τ_l are expresia :

$$\tau_l = -\tau_{yx} = -\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \simeq \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4}$$

În exteriorul stratului limită, din condițiile limită la marginea lui,

$$y = \delta: \quad u = U_e, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0, \tag{5}$$

și pentru cazul curgerii staționare, considerată în cele ce urmează, ecuația (1) se reduce la

$$U_e \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{6}$$

Dacă condițiile limită la perete,

$$y = 0: \quad u = 0; \quad v = 0, \tag{7}$$

sînt substituite în ecuația (1), se obține următorul rezultat :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 = -\frac{U_e}{\nu}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}, \tag{8}$$

unde indicele „0" desemnează valorile la perete ($y = 0$).

Ecuația (8) este numită prima condiție de compatibilitate la perete : ea leagă curbura profilului de viteză la perete cu gradientul longitudinal de presiune. Condiții de compatibilitate, de ordin mai mare, pot fi obținut, prin diferențierea repetată a ecuațiilor (1) și (2) și, ținînd seama de (3) (4) și (7). A doua condiție de compatibilitate obținută astfel, după eliminarea presiunii, se scrie :

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)_0 = \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 \tau_{l0}}{\partial x^2}. \tag{9}$$

Această ecuație reprezintă, în realitate, o legătură între profilul de viteză și gradientul transversal de presiune la perete, care în zona desprinderii nu mai poate fi neglijat.

3. FAMILIA DE PROFILE DE VITEZĂ

De precizia cu care este reprezentată familia de profile de viteză, ca soluție a ecuațiilor de mișcare, depinde precizia oricărui procedeu integral,

care utilizează ecuații de multiimpuls (sau mai clar, ecuații de impuls formal de diferite ordine) ale ecuațiilor stratului limită (ecuațiile (1) și (3)) de forma :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[U_e^{k+2}\delta_{k+2}\right] = (k+1)\ U_e \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}\int_0^\delta \frac{u}{U_e}\left[1-\left(\frac{u}{U_e}\right)^{k-1}\right]\mathrm{d}y - \\ - \nu\,(k+1)\int_0^\delta u^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y, \tag{10}$$

în care

$$\delta_{k+2} = \int_0^\delta \frac{u}{U_e}\left[1-\left(\frac{u}{U_e}\right)^{k+1}\right]\mathrm{d}y\,. \tag{11}$$

Se poate observa ușor că ecuația (10) se reduce la ecuația de impuls, a lui Kármán, pentru $k = 0$ și la ecuația energiei cinetice, pentru $k = 1$.

Metoda lui Pohlhausen (1), care utilizează un profil monoparametric λ, în legătură cu ecuația de impuls, $k = 0$, deși oferă rezultate destul de precise pentru gradienți de presiune negativi ($\lambda > 0$), totuși pentru gradienți pozitivi ($\lambda < 0$) prezice desprinderea prea tîrziu.

Metoda propusă de Van Ingen (2), care folosește tot ecuația de impuls, însă cu un profil format ca o combinație de profile de viteză din cazuri particulare (stratul limită pe placa plană, profilul de desprindere din metoda lui Timman) legate prin parametrul λ, dă în general pentru desprindere poziții mai în amonte și valori prea mari ale grosimii stratului limită.

În metoda prezentă, la fel ca în metoda lui Pohlhausen grosimea stratului limită δ este presupusă finită, iar profilul de viteză este aproximat prin următorul polinom de gradul 6, în variabila adimensională $\eta_0 = y/\delta$:

$$u_a = \frac{u}{U_e} = \sum_{i=0}^{6} a_i\,\eta_0^i \qquad \text{pentru } 0 \leqslant \eta_0 \leqslant 1,$$

$$u_a = 1 \qquad \text{pentru } \eta_0 > 1. \tag{12}$$

Coeficienții a_i sînt funcții de x, care se determină din următoarele relații :

— prima condiție de compatibilitate la perete (8), care se scrie :

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial \eta_0^2} = \delta^2/\nu\ \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}, \tag{13}$$

— a doua condiție de compatibilitate la perete (9), care se scrie :

$$\frac{\partial u_a^3}{\partial \eta_0^3} = \delta^3/\mu U_e \frac{\partial^2\ \tau_{l_0}}{\partial x^2}, \tag{14}$$

— condiţiile limită :

$$\eta_0 = 0: \quad u_a = 0,$$

$$\eta_0 = 1: \quad u_a = 1, \quad \frac{\partial u_a}{\partial \eta_0} = \frac{\partial^2 u_a}{\partial \eta_0^2} = \frac{\partial^3 u_a}{\partial \eta_0^3} = 0. \tag{15}$$

Folosind condiţiile (13), (14) şi (15), coeficienţii a_i pot fi exprimaţi în funcţie de parametrii λ şi ζ definiţi ca :

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}, \quad \zeta = \frac{\delta^3}{\mu U_e} \frac{\partial^2 \tau_l}{\partial x^2}. \tag{16}$$

Acum ecuaţia (12) pentru profilul de viteză poate fi scrisă sub forma :

$$u_a = F_1(\eta_0) + \lambda G_1(\eta_0) + \zeta H_1(\eta_0) \tag{17}$$

în care pentru $0 \leqslant \eta \leqslant 1$

$$F_1(\eta_0) = 2\eta_0 - 5\eta_0^4 + 6\eta_0^5 - 2\eta_0^6,$$

$$G_1(\eta_0) = \frac{1}{10}(2\eta_0 - 5\eta_0^2 + 10\,\eta_0^4 - 10\eta_0^5 + 3\eta_0^6), \tag{18}$$

$$H_1(\eta_0) = \frac{1}{60}(\eta_0 - 10\eta_0^3 + 20\eta_0^4 - 15\eta_0^5 + 4\,\eta_0^6).$$

Formula (17) arată că influenţa gradienţilor de presiune, longitudinal şi transversal, asupra formei profilului de viteze este caracterizată de parametrii λ şi ζ, care pot fi consideraţi ca nişte factori de formă. Pentru $\lambda = 0$; $\zeta = 0$ se regăseşte profilul de gradul 6 al lui Pohlhausen, care practic se confundă cu profilul lui Blasius.

Întrucît importanţa fizică a parametrului ζ este mai puţin evidentă se caută să se înlocuiască acesta printr-un nou parametru, care apare şi în ecuaţia globală a impulsului. Acest nou parametru, format cu coeficientul de frecare la perete, se deduce din panta la origină a profilului de viteză.

$$\varphi = \left(\frac{\partial u_a}{\partial \eta_0}\right)_0 = \frac{1}{2} C_f \frac{U_e \delta}{\nu} = 2 + \frac{\lambda}{5} + \frac{\zeta}{60}. \tag{19}$$

Folosind parametrii λ şi φ, expresia (17) a profilului de viteze devine :

$$u_a = F(\eta_0) + \lambda G(\eta_0) + \varphi H(\eta_0), \tag{20}$$

în care, pentru

$$0 \leqslant \eta_0 \leqslant 1,$$

$$F(\eta_0) = 20\eta_0^3 - 45\,\eta_0^4 + 36\eta_0^5 - 10\eta_0^6,$$

$$G(\eta_0) = \frac{1}{2}(-\eta_0^2 + 4\eta_0^3 - 6\eta_0^4 + 4\eta_0^5 - \eta_0^6), \tag{21}$$

$$H(\eta_0) = \eta_0 - 10\eta_0^3 + 20\eta_0^4 - 15\eta_0^5 + 4\eta_0^6.$$

Este atractivă această reprezentare (20), întrucît parametrii λ și φ, avînd o semnificație fizică reală, pot fi determinați simplu prin calcul sau experimental. Pentru determinarea parametrilor λ și φ, ca funcții de x, se vor utiliza ecuațiile integrale ale impulsului și ale energiei cinetice, caracteristicile stratului limită, grosimea δ și frecarea la perete τ_{l_0}, rezultînd apoi simplu.

Funcțiile $F(\eta_0)$, $G(\eta_0)$ și $H(\eta_0)$ definite de ecuațiile (21), care împreună formează funcția distribuției de viteze dată în ecuația (20), sînt reprezentate în figura 1. Profilele de viteză obținute pentru diferite valori ale lui λ și φ sînt arătate în figura 2. Profilul care corespunde lui $\lambda = 0$ și $\varphi = 2$ ($\xi = 0$) este obținut cînd $dU_e/dx = 0$, adică pentru stratul limită fără gradient longitudinal de presiune (placa plană fără incidență), sau pentru punctul în care viteza curgerii potențiale are o valoare minimă sau maximă. În acest caz profilul de viteze devine identic cu profilul de gradul 6, al lui Pohlhausen. Profilul la desprindere cu $\varphi = 0$ se produce pentru $\lambda = (-7{,}8) \div (-8{,}4)$.

Profilul în punctul de impact corespunde lui

$$\lambda = 8{,}218 \text{ și } \varphi = 3{,}423.$$

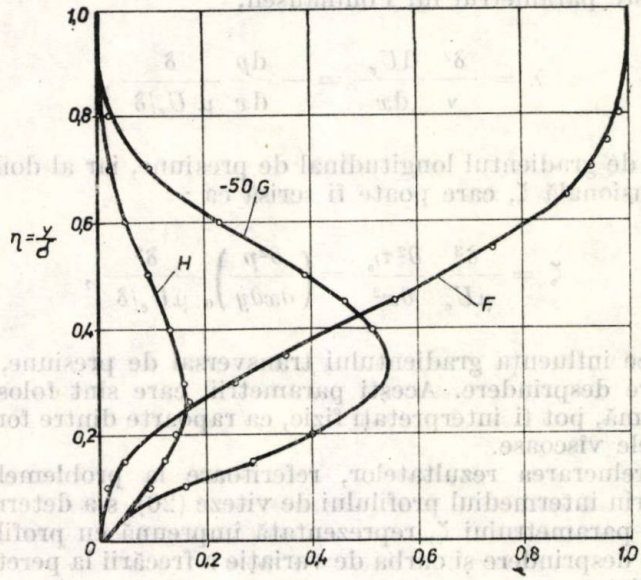


Fig. 1

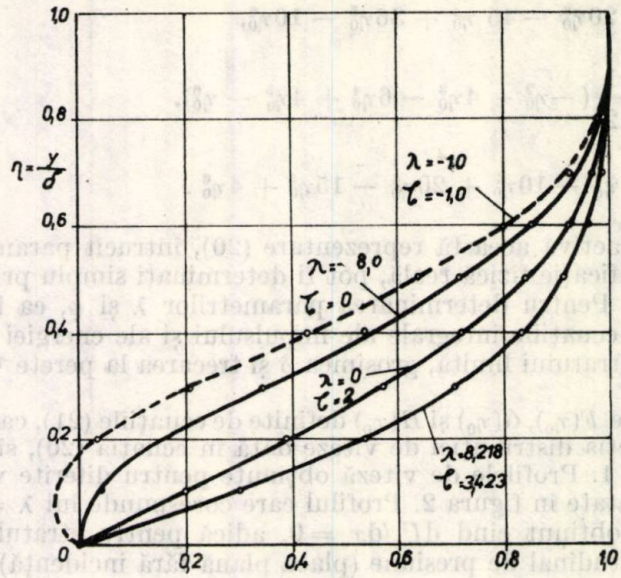


Fig. 2

4. CONCLUZII

În lucrarea prezentă s-a dedus pentru stratul limită laminar incompresibil, bidimensional, o familie biparametrică de profile, care acoperă o mare varietate de situaţii de curgere, accelerate şi frînate pînă la desprindere, şi chiar după.

Unul este parametrul lui Pohlhausen,

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\delta}{\mu\, U_e/\delta},$$

care depinde de gradientul longitudinal de presiune, iar al doilea este mărimea adimensională ζ, care poate fi scrisă ca :

$$\zeta = \frac{\delta^3}{\mu U_e}\frac{\partial^2 \tau_{l_0}}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\right)_0 \frac{\delta^2}{\mu U_e/\delta},$$

care introduce influenţa gradientului transversal de presiune, important, mai ales, spre desprindere. Aceşti parametrii, care sînt folosiţi ca nişte factori de formă, pot fi interpretaţi fizic, ca rapoarte dintre forţele de presiune şi forţele vîscoase.

Prin prelucrarea rezultatelor, referitoare la problemele Howarth şi Tani (3), prin intermediul profilului de viteze (20), s-a determinat curba de variaţie a parametrului ζ, reprezentată împreună cu profilul de viteze în punctul de desprindere şi curba de variaţie a frecării la perete, respectiv în figurile 3 şi 4.

Se observă că punctul $\zeta = 0$, corespunde practic punctului de inflexiune al curbei $\zeta_0(x)$.

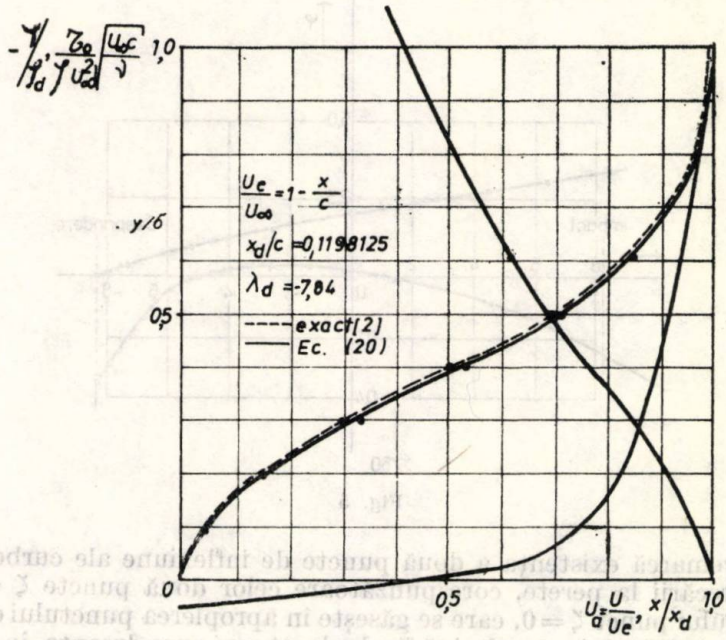


Fig. 3

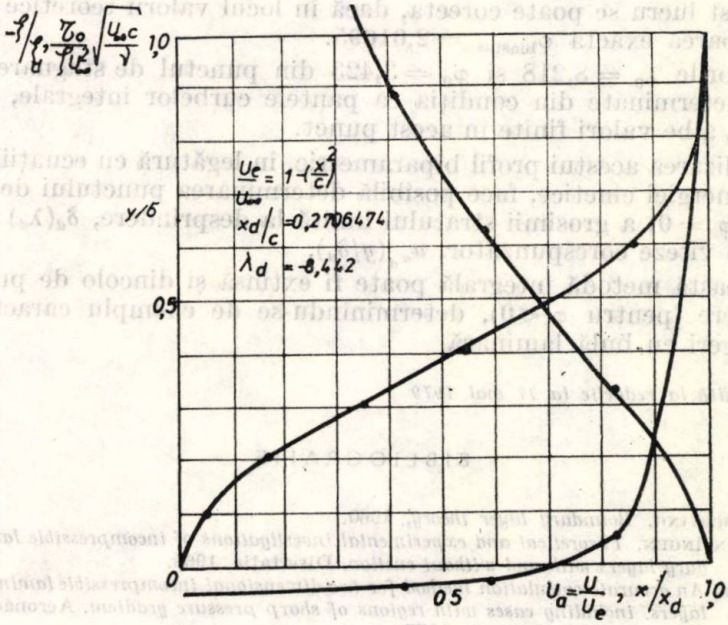


Fig. 4

Prelucrarea în acelaşi fel a rezultatelor furnizate de metoda lui Thwaites (4) a condus la curbele $\zeta(\lambda)$ şi $\varphi(\lambda)$, reprezentate în figura 5.

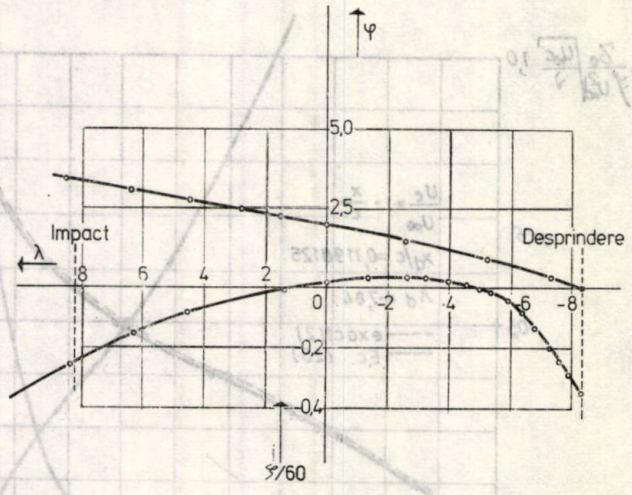


Fig. 5

Se remarcă existenţa a două puncte de inflexiune ale curbei de variaţie a frecării la perete, corespunzătoare celor două puncte $\zeta = 0$. Poziţia primului punct $\zeta = 0$, care se găseşte în apropierea punctului de viteză maximă, la stînga lui, ar trebui să fie deplasat mai spre dreapta, în regiunea de curgere frîntă ($\lambda < 0$).

Acest lucru se poate corecta, dacă în locul valorii teoretice $\varphi(0) = 2$, se ia valoarea exactă $\varphi_{\text{Blasius}} = 2{,}01695$.

Valorile $\lambda_0 = 8{,}218$ şi $\varphi_0 = 3{,}423$ din punctul de stagnare ($U_e = 0$) au fost determinate din condiţia ca pantele curbelor integrale, $d\lambda/dx$ şi $d\varphi/dx$, să aibe valori finite în acest punct.

Utilizarea acestui profil biparametric, în legătură cu ecuaţiile impulsului şi energiei cinetice, face posibilă determinarea punctului de desprindere x_d ($\varphi = 0$) a grosimii stratului limită la desprindere, $\delta_d(\lambda_d)$ şi a profilului de viteze corespunzător, $u_{a_d}(y/\delta_d)$.

Această metodă integrală poate fi extinsă şi dincolo de punctul de desprindere (pentru $\varphi < 0$), determinîndu-se de exemplu caracteristicile unei curgeri cu bulă laminară.

Primită la redacţie la 17 mai 1979

BIBLIOGRAFIE

1. H. Schlichting, *Boundary layer theory*, 1960.
2. J. L. Van Ingen, *Theoretical and experimental investigations of incompressible laminar boundary layers with and without suction*, Disertaţie, 1965.
3. N. Curle, *An accurate calculation method for two-dimensional incompressible laminar boundary layers, including cases with regions of sharp pressure gradient*. Aeronautical Quarterly, **XXVIII**, Part. 3, 1977.
4. T. Cebeci, A. M. O. Smith, *Analysis of turbulent boundary layers*, Academic Press London, 1974

MIŞCĂRI TURBULENTE PRIN SPAŢII INELARE

de ALECSANDRU D. STAN
Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Sînt multe situaţii în tehnică, cum ar fi în cea petrolieră, unde se întîlnesc mişcări turbulente prin spaţii inelare. Un asemenea caz ar putea fi la mişcarea fluidelor în spaţiul creat de coloana de exploatare şi coloana ţevilor de extracţie. De cele mai multe ori spaţiile inelare formate sînt cu excentricităţi constante sau variabile. Pierderea de presiune în spaţiul inelar este mai mare decît într-un tub cu secţiunea circulară dacă în ambele este acelaşi regim de curgere. Coeficientul de rezistenţă, deci şi pierderea de presiune, este mai mic într-un spaţiu inelar excentric decît în cel fără excentricitate. Efortul de forfecare pe cilindrul cu raza mai mică care formează spaţiul inelar este mai mare decît efortul de forfecare de pe cilindrul cu raza mare al spaţiului inelar. Rezultatele experimentale sînt în bună concordanţă cu cele teoretice. Un calcul numeric efectuat în lucrare arată că în unele situaţii din tehnica petrolieră pierderea de presiune dintr-un spaţiu inelar, format dintr-un material tubular frecvent folosit, este comparabilă cu pierderea de presiune ce s-ar realiza într-un tub cu secţiunea circulară.

1. INTRODUCERE

În lucrările [3, 8] sînt redaţi coeficienţii de rezistenţă pentru regimul de curgere turbulent prin tuburi de secţiune circulară. Aceşti coeficienţi au fost obţinuţi pe cale experimentală şi au valorile

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\mathscr{R}^{0{,}25}} \qquad \text{pentru } 3000 \leqslant \mathscr{R} \leqslant 10^5, \tag{1}$$

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221/\mathscr{R}^{0{,}237} \qquad \text{pentru} \qquad \mathscr{R} > 10^5, \tag{2}$$

$\mathscr{R}$ reprezintă numărul lui Reynolds definit cu viteza medie şi diametrul tubului cilindric. Regimul de curgere turbulent este apreciat, în general, la valori ale numărului Reynolds mai mari decît 2300—3000.

Se poate stabili o relaţie între numărul lui Reynolds şi coeficientul de rezistenţă λ avînd ca punct de plecare profilul vitezei în mişcarea turbulentă. Pentru un profil de viteză Prandtl-Taylor această relaţia are forma

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}035 \log(\mathscr{R}\sqrt{\lambda}) - 0{,}91. \tag{3}$$

Coeficienţii numerici 2,035 şi 0,91 au fost puţin modificaţi pentru ca între relaţia nou obţinută,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(\mathscr{R}\sqrt{\lambda}) - 0{,}80, \tag{4}$$

şi patele exderimentale, concordanţa să fie mai bună [3, 8].

Din cele două ecuații (3) și (4) coeficientul λ s-a calculat prin încercări ca într-o altă lucrare [4].

În acest scop, s-a notat pe rînd membrul stîng al celor două ecuații cu A, iar cu B cel drept și pentru λ s-a ales valoarea inițială

$$\lambda = 0{,}05. \tag{5}$$

Prin înlocuirea lui λ în fiecare ecuație și dacă a rezultat

$$|A - B| \leqslant 0{,}0001, \tag{6}$$

s-a considerat că valoarea lui λ este cea exactă. În cazul în care condiția (6) nu este îndeplinită și $A > B$, s-a introdus

$$\lambda = \lambda - 0{,}0001, \tag{7}$$

iar pentru $A < B$

$$\lambda = \lambda + 0{,}0001, \tag{8}$$

și iterația a continuat pînă ce s-a verificat condiția (6).

În figura 1 se redau valorile lui λ calculate cu metoda propusă din relația (3). Așa cum se indică în literatură [3] valorile calculate pentru λ cu relațiile (1) sau (2) sînt apropiate de cele obținute cu (4) pînă la numere Reynolds de 10^5 cu prima dintre acestea și pentru valori mai mari cu cea de-a doua relație.

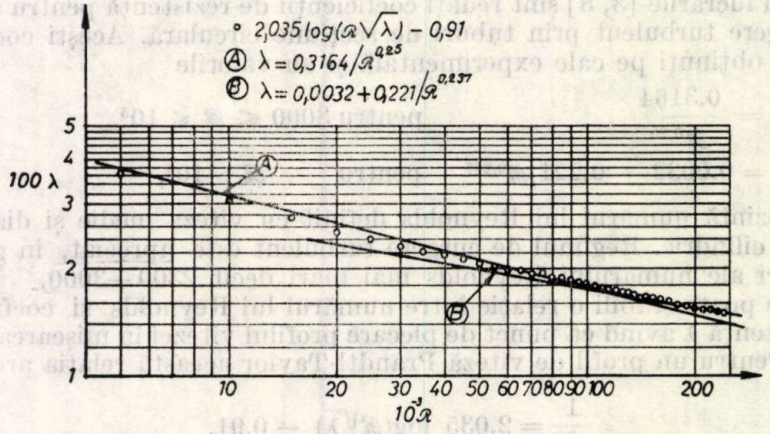


Fig. 1

2. COEFICIENTUL DE REZISTENȚĂ ÎN SPAȚIUL INELAR FĂRĂ EXCENTRICITATE

Sînt multe situații cînd fluidul curge turbulent prin spații inelare. Un asemenea caz se poate întîlni în tehnica petrolieră la pomparea fluidelor în sondă prin spațiul format de coloana de exploatare și coloana țevilor de extracție.

În situația amintită este necesar să fie calculată pierderea de presiune Δp prin frecări. Aceasta se poate calcula cu o relație asemănătoare cu cea de la tuburile de secțiune circulară

$$\Delta p = \rho \frac{v_m^2}{2} \frac{l}{2(R_e - R_i)} \lambda_i , \tag{9}$$

în care ρ este densitatea, v_m viteza medie, R_e și R_i razele cilindrilor care formează spațiul inelar, iar λ_i este coeficientul de rezistență din acest spațiu inelar. Tot pierderea de presiune din spațiul inelar poate fi scrisă în funcție de eforturile de forfecare τ_{0e} și τ_{0i} care au loc pe suprafețele cilindrice de raze R_e și R_i sub forma

$$\pi(R_e^2 - R_i^2)\, \Delta p = 2\pi l\, (R_e\, \tau_{0e} + R_i \tau_{0i}). \tag{10}$$

Între pierderile de presiune $\overline{\Delta p}$ și $\overline{\overline{\Delta p}}$ care au loc în tuburile cilindrice cu razele R_e și, respectiv R_i se pot scrie relațiile

$$\pi R_e^2\, \overline{\Delta p} = 2\pi\, R_e \tau_{0e}\, l, \tag{11}$$

$$\pi\, R_i^2 \overline{\overline{\Delta p}} = 2\pi\, R_i \tau_{0i}\, l, \tag{12}$$

l fiind lungimea pe care se calculează $\overline{\Delta p}$ și $\overline{\overline{\Delta p}}$.
Pierderea de presiune într-un tub cu secțiunea circulară, de exemplu cel cu raza R_e, se scrie sub forma

$$\overline{\Delta p} = \rho \frac{v_m^2}{2} \frac{l}{2R_e} \overline{\lambda}, \tag{13}$$

$\overline{\lambda}$ fiind coeficientul de rezistență care se calculează pentru numere Reynolds mari cu relațiile (1) sau (2). Dacă se notează cu $\overline{\overline{\lambda}}$ coeficientul de rezistență în tubul cilindric cu raza R_i și având în vedere relațiile (9), (11), (12), (13) și cea corespunzătoare pentru $\overline{\overline{\Delta p}}$ se obține, la valori egale ale vitezelor medii, egalitatea

$$\lambda_i = \frac{1}{1+k} (\overline{\lambda} + k\overline{\overline{\lambda}}). \tag{14}$$

În cele două tuburi cilindrice cu diametrele $2R_e$ și $2R_i$ numerele lui Reynolds $\overline{\mathscr{R}}$ și $\overline{\overline{\mathscr{R}}}$ se definesc cu aceste lungimi caracteristice și cu viteza medie v_m.

Din acest motiv între cele două numere Reynolds este relația

$$\overline{\overline{\mathscr{R}}} = k\, \overline{\mathscr{R}}\,. \tag{15}$$

Dacă pentru $\bar{\lambda}$, în raport cu numărul lui Reynolds $\bar{\mathcal{R}}$, se utilizează, pentru o mai mare simplitate a calculelor, relaţiile (1) sau (2), rezultă că şi $\bar{\bar{\lambda}}$ se poate scrie imediat

$$\bar{\bar{\lambda}} = \frac{0{,}3164}{\bar{\mathcal{R}}^{0{,}25} k^{0{,}25}} \qquad \text{pentru} \quad 3000 \leqslant \bar{\mathcal{R}} \leqslant 10^5, \quad (16)$$

$$\bar{\bar{\lambda}} = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\bar{\mathcal{R}}^{0{,}237} k^{0{,}237}} \qquad \text{pentru} \quad \bar{\mathcal{R}} > 10^5. \quad (17)$$

Cu acestea, rezultă valoarea coeficientului de rezistenţă în spaţiul inela λ_i în funcţie de numărul lui Reynolds, definit cu viteza medie şi diametru cilindrului exterior $2R_e$, şi coeficientul k sub forma

$$\lambda_i = \frac{0{,}3164}{\mathcal{R}^{0{,}25}} \cdot \frac{1 + k^{0.75}}{1 + k} \qquad \text{pentru } 3000 \leqslant \mathcal{R} \leqslant 10^5, \quad (18)$$

$$\lambda_i = 0{,}0032 + \frac{0{,}221}{\mathcal{R}^{0{,}237}} \cdot \frac{1 + k^{0{,}763}}{1 + k} \qquad \text{pentru } \mathcal{R} > 10^5. \quad (19)$$

Se observă că atît pentru $k = 0$, cît şi pentru $k = 1$ relaţiile lui λ_i coincid cu cele pentru un tub cu secţiunea circulară.

Parametrul $(1 + k^{0,75})/(1 + k)$ este supraunitar (fig. 2), ceea ce înseamnă că la valori ale numerelor Reynolds mai mici decît 10^5 coeficientul de rezistenţă în spaţiul inelar este mai mare decît cel pentru un tub cilindric, în ultimul fiind acelaşi număr Reynolds ca şi în spaţiul inelar. Acest lucru este adevărat deoarece se observă cu uşurinţă comparînd relaţiile (1) şi (18) că termenul $(1 + k^{0,75})/(1 + k)$ este egal cu raportul λ_i/λ.

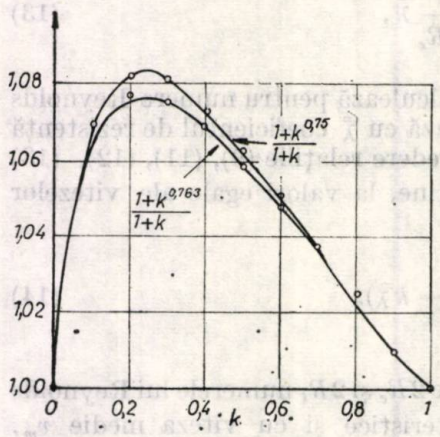


Fig. 2

Valorile coeficientului λ_i calculate cu relaţia (18) sînt în intervalul $k = 0{,}0625 - 0{,}562$ cu aproximativ 4,5% — 8,3% mai mari decît cele pentru un tub de secţiune circulară, ceea ce confirmă rezultatele din literatură [7] pentru care s-au executat experimentele.

Totuşi, valorile lui λ_i calculate cu relaţia (18) sînt mai mici decît cele calculate cu relaţia propusă de literatură. În tabelul 1 se redau în funcţie de k raportul dintre λ_i şi coeficientul de rezistenţă λ tot pentru spaţiul inelar calculat cu relaţia propusă în lucrarea [7].

Tabelul 1

k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
λ_i/λ	0,9705	0,9527	0,9202	0,8792	0,8319	0,7778	0,7152	0,6381	0,5299

Pentru valori ale numerelor Reynolds mai mari decît 10^5 între coeficientul de rezistență din spațiul inelar λ_i și cel pentru un tub cu secțiunea circulară λ este relația

$$\frac{\lambda_i - 0{,}0032}{\lambda - 0{,}0032} = \frac{1 + k^{0.763}}{1 + k}, \tag{20}$$

ceea ce dovedește că și la aceste valori ale numerelor Reynolds coeficientul de rezistență este mai mare decît în tubul de secțiune circulară.

În figura 3 se redă raportul λ_i/λ în funcție de k și trei valori ale coeficientului de rezistență pentru un tub cu secțiunea circulară $\lambda = 0{,}01779$; 0,01608 și 0,01496. Aceste valori corespund, pentru un tub cu secțiunea circulară, la numerele Reynolds de 100000, 150000 și 200000.

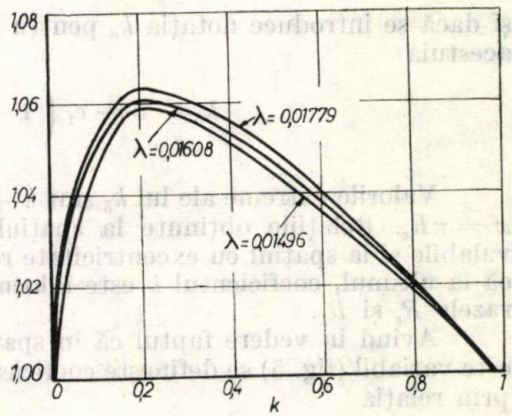


Fig. 3

3. SPAȚIU INELAR CU EXCENTRICITATE CONSTANTĂ SAU VARIABILĂ

În foarte multe situații spațiul inelar este excentric. Excentricitatea relativă e_1 se definește prin relația

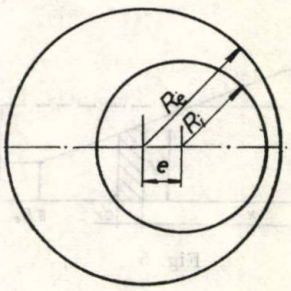


Fig. 4

$$e_1 = \frac{e}{R_e}, \tag{21}$$

În lucrarea [7] excentricitatea relativă e^* s-a caculat cu relația

$$e^* = \frac{e}{R_e - R_i}. \tag{22}$$

Între cele două excentricități relative există relația

$$e_1 = e^* (1 - k). \tag{23}$$

Pentru cilindrii cu razele R_e și R_i (fig. 4), distanța dintre suprafețele cilindrice și excentricitatea e_1 se poate scrie sub forma [2].

$$\delta = R_e\left[1 - k - e_1\left(1 - \frac{2x}{\pi R_e}\right)\right]. \tag{24}$$

Suprafața cilindrică interioară se poate considera că are, în raport cu centrul de simetrie al suprafeței cilindrice exterioare, raza R_1

$$R_1 = R_e - \delta = R_i + e\left(1 - \frac{2x}{\pi R_e}\right) \tag{25}$$

și dacă se introduce notația k_δ pentru raportul R_1/R_e se găsește valoarea acestuia

$$k_\delta = k + e_1\left(1 - \frac{2x}{\pi R_e}\right). \tag{26}$$

Valorile extreme ale lui k_δ sînt $k + e_1$ pentru $x = 0$ și $k - e_1$ pentru $x = \pi R_e$. Relațiile obținute la spațiul inelar fără excentricitate rămîn valabile și la spațiul cu excentricitate relativă constantă. Diferența constă că la ultimul, coeficientul k este înlocuit cu k_δ și suprafețele cilindrice au razele R_e și R_1.

Avînd în vedere faptul că în spațiul inelar excentric parametrul k_δ este variabil (fig. 5) se definește coeficientul de rezistență λ_e în acest spațiu prin relația

$$\pi R_e\, \lambda_e = \int_0^{\pi R_e} \lambda_i \mathrm{d}x. \tag{27}$$

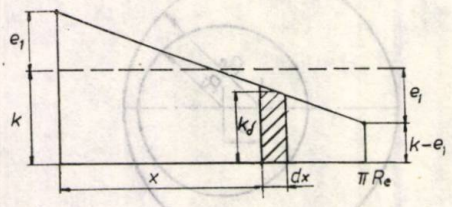


Fig. 5

Coeficientul λ_i care intervine în integrala de mai înainte se calculează pentru spațiul inelar fără excentricitate cu relațiile (18) sau (19).

Pentru numerele Reynolds la care se poate aplica relația (18) coeficientul de rezistență λ_e capătă forma

$$\lambda_e = \frac{1}{\pi R_e}\int_0^{\pi R_e} \frac{0{,}3164}{\mathscr{R}^{0,25}} \cdot \frac{1 + k_\delta^{0,75}}{1 + k_\delta}\, \mathrm{d}x. \tag{28}$$

Dacă se introduce k_δ și se face substituția

$$X = k + e_1\left(1 - \frac{2x}{\pi R_e}\right), \tag{29}$$

coeficientul de rezistemță λ_e capătă forma

$$\lambda_e = \frac{0{,}3164}{\mathscr{R}_e^{0,25}}\int_{k-e_1}^{k+e_1} \frac{1 + X^{0,75}}{1 + X}\, \mathrm{d}X. \tag{30}$$

Calcule asemănătoare se pot face dacă se calculează λ_i cu relația (19).

În figura 6 se redă valoarea integralei din (30) în funcție de k și e_1 care, de fapt, este egală cu raportul λ_e/λ. Această integrală a fost calculată numeric pe un calculator FELIX C — 256 folosind regula $\frac{1}{3}$ a lui Simpson la care se introduce erori de ordinul lui h^5 [6]; h fiind lungimea unui interval în care a fost împărțită distanța $0 - \pi R_e$. Integrala calculată, folosind această regulă, are valoarea

$$I = \frac{h}{3} \sum_{j=1}^{100} [(X)_{2j-1} + 4\,(X)_{2j} + (X)_{2j+1}], \tag{31}$$

unde intervalul $0 - \pi R_e$ s-a divizat în 200 părți și indicele de sumare j arată succesiunea subintervalelor pe lungimea de integrat. Mărimea lui h este $\pi R_e/200$, ceea ce înseamnă că la calculul lui I s-au introdus erori de ordinul $h^5 = 9{,}5631 \times \times 10^{-10} R_e^5$.

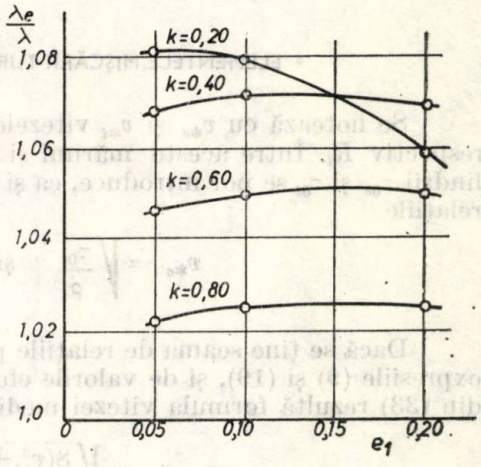


Fig. 6

Se observă că variația λ_e/λ este neînsemnată în raport cu excentricitatea relativă e_1. Doar pentru $k = 0{,}20$ raportul λ_e/λ are o variație mai însemnată în funcție de e_1; la creșterea acestuia raportul λ_e/λ scade. Rezultatele prezentate dovedesc că raportul λ_e/λ este supraunitar, ceea ce înseamnă că în spațiile inelare excentrice pierderile de presiune sînt mai mari decît în tuburile cu secțiune circulară la aceleași valori ale numerelor lui Reynolds. Se poate calcula în funcție de parametrul k și e_1 raportul dintre λ_e și coeficientul de rezistență în spațiul inelar fără excentricitate λ_i.

De exemplu, la numere Reynolds pentru care este aplicabilă relația 18) acest raport are valoarea

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_i} = \frac{1+k}{1+k^{0,75}} \int_{k-e_1}^{k+e_1} \frac{1+X^{0,75}}{1+X}\,\mathrm{d}X. \tag{32}$$

Pentru toate valorile lui k și e_1 acest raport este subunitar, ceea ce înseamnă că în spațiile inelare excentrice pierderile de presiune sînt mai mici decît în cele fără excentricitate. Se observă că la valori ale parametrului k, uzual întîlnite în tehnica de șantier ($k = 0{,}2 - 0{,}8$) din punct de vedere practic scăderea lui λ_e față de λ_i la creșterea excentricității este nesemnificativă (fig. 7).

Pentru cazul unei excentricități variabile s-ar putea efectua un calcul asemănător cu cel din lucrarea [9]. Acest lucru nu se face deoarece excen-

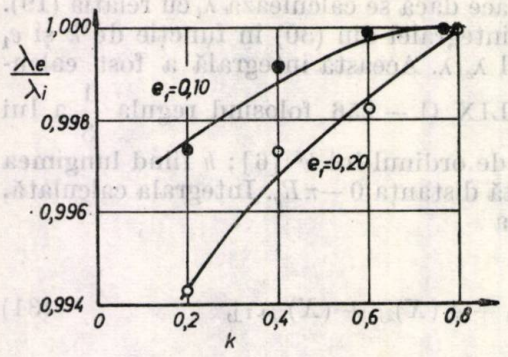


Fig. 7

tricitatea relativă nu modifică prea mult coeficientul de rezistență. Totuși, datorită faptului că la creșterea excentricității relative coeficientul de rezistență se micșorează față de cel din spațiul inelar fără excentricitate, în cazul unei excentricități variabile coeficientul de rezistență, deci și pierderea de presiune, are valori intermediare față de cele două situații amintite.

4 ELEMENTELE MIȘCĂRII TURBULENTE ÎN SPAȚIUL INELAR

Se notează cu v_{*e} și v_{*i} vitezele dinamice pe cilindrul de rază R_e și, respectiv R_i. Între aceste mărimi și eforturile de forfecare pe cei doi cilindrii τ_{0e} și τ_{0i} se pot introduce, ca și la tuburile cu secțiunea circulară [3], relațiile

$$v_{*e} = \sqrt{\frac{\tau_{0e}}{\rho}} \quad \text{și} \quad v_{*i} = \sqrt{\frac{\tau_{0i}}{\rho}} . \tag{33}$$

Dacă se ține seama de relațiile pierderii de presiune în spațiul inelar, expresiile (9) și (19), și de valorile eforturilor de forfecare τ_{0e} și τ_{0i} deduse din (33) rezultă formula vitezei medii într-un spațiu inelar

$$v_m = \sqrt{\frac{8(v_{*e}^2 + k\, v_{*i}^2)}{\lambda_i\,(1 + k)}} . \tag{34}$$

Se observă că pentru $k = 0$ viteza medie coincide cu cea de la un tub cu secțiunea circulară [3, 8]. Relația (34) coincide formal tot cu cea de la un tub pentru $k = 1$ deoarece la această valoare $v_{*e} = v_{*i}$. Menționăm că situațiile extreme amintite ale lui k fac coincidența doar formală cu cea de la tubul cu secțiunea circulară deoarece la $k = 0$ în tub viteza în axul acestuia este maximă pe cînd la spațiul inelar este nulă.

În situația a doua, $k = 1$, practic, spațiul inelar este inexistent, ceea ce presupune și lipsa mișcării fluidului. Profilul vitezei de la fiecare tub cilindric către interiorul spațiului inelar se poate admite, ca și în alte lucrări [4, 5], de formă logaritmică. De exemplu, pentru cilindrul de rază R_e se poate scrie profilul adimensional al vitezei sub forma

$$\frac{v_e}{v_{*e}} = \begin{cases} \xi_e & \text{pentru } 0 \leqslant \xi_e \leqslant 11{,}5, \\ 2{,}5 \ln \xi_e + 5{,}5 & \text{pentru } \xi_e > 11{,}5 , \end{cases} \tag{35}$$

unde prin ξ_e s-a notat

$$\xi_e = \frac{Z_e\, v_{*e}}{\nu} , \tag{36}$$

ν fiind vîscozitatea fluidului. Pentru viteza adimensională v_i/v_{*i} se scrie o relaţie asemănătoare în funcţie de ξ_i. Acesta fiind definit cu distanţa Z_i măsurată de la tubul cilindric de rază R_i şi viteza dinamică v_{*i}. În cazul unor valori egale pentru v_{*e} şi v_{*i}, lucru greu admis că se întîmplă în realitate, valoarea maximă a vitezei are loc la jumătatea distanţei dintre cei doi cilindrii. Datorită acestei situaţii se admite că viteza fluidului prezintă un maxim la intersecţia celor două profile care este dată de egalitatea

$$v_{*e}\,(2{,}5 \ln \xi_e + 5{,}5) = v_{*i}\,(2{,}5 \ln \xi_i + 5{,}5). \tag{37}$$

Pe acest cilindru are loc şi egalitatea

$$Z_A + Z_B = R_e\,(1 - k). \tag{38}$$

Este de presupus că tot pe acest cilindru situat la distanţa Z_A de cilindrul de rază R_i şi Z_B de cel cu raza R_e are loc şi egalitatea eforturilor de forfecare corespunzătoare celor două profile de viteză. Dacă se adoptă pentru acestea forma simplificată din [8], egalitatea se scrie

$$\tau_{0e}\left(1 - \frac{Z_B}{R_e}\right) = \tau_{0i}\left(1 - \frac{Z_A}{R_i}\right). \tag{39}$$

Introducînd notaţia τ_{ie} pentru efortul de forfecare care acţionează pe cilindrul de rază $R_i + Z_A$ se poate scrie că forţa de frecare care are loc pe suprafeţele cilindrice de raze R_i şi $R_i + Z_A$ este egală cu forţa de frecare pe suprafeţele $R_i + Z_A$ şi R_e. Această egalitate se scrie sub forma

$$E_1^2 = \frac{1}{k}, \tag{40}$$

unde s-a introdus notaţia

$$E_1 = \frac{v_{*i}}{v_{*e}}. \tag{41}$$

Cu alte două notaţii,

$$E_2 = \frac{Z_A}{R_e} \quad \text{şi} \quad E_3 = \frac{R_e\, v_{*e}}{\nu}, \tag{42}$$

relaţia (37) se poate scrie sub forma

$$E_1 = \frac{\ln E_3\,(1 - k - E_2) + 2{,}2}{\ln E_1\, E_2\, E_3 + 2{,}2}, \tag{43}$$

iar relaţia (39)

$$E_1^2 = \frac{k\,(k + E_2)}{k - E_2}. \tag{44}$$

În funcție de parametrul k sistemul format din ecuațiile (40), (43) și (44) se poate rezolva cu ușurință. În figura 8 se redau prametrii E_1, E_2 și E_3 în funcție de k. Parametrul E_1 este supraunitar, ceea ce arată că efortul de forfecare pe cilindrul interior este mai mare decît pe cel exterior.

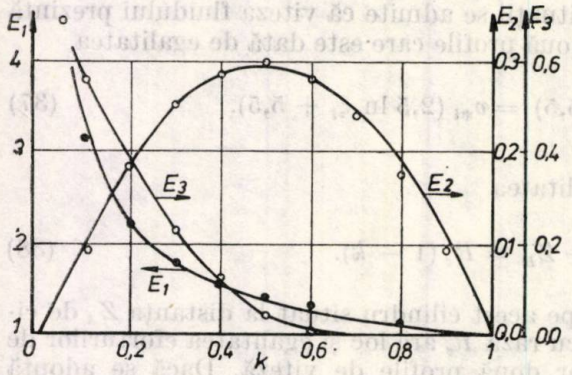


Fig. 8

Pe măsură ce parametrul k tinde către zero, efortul τ_{0i} tinde către valori foarte mari, pentru $k = 0$ teoretic τ_{0i} tinde către infinit.

Totuși, datorită ariei foarte mici pe care acționează acest efort face ca forța de frecare să aibe valori finite.

De altfel, se observă din relația (40) că efortul τ_{0i} are mărimea τ_{0e}/k și aria laterală pe care acționează este $2\pi k R_e l$, ceea ce face ca forța de frecare să fie independentă de parametrul k. Acest rezultat arată că numai forța de frecare ce are loc pe cilindrul de rază R_e depinde de k. Dependența dintre această forță și k este analoagă cu cea dintre λ_t și k așa cum se prezintă în figurile 2 și 3. Curba E_2 este simetrică față de valoarea lui $k = 0{,}5$ unde prezintă un maxim. Pentru $k = 0$ și $k = 1$ parametrul E_2 este nul, ceea ce corespunde cu realitatea că la aceste valori are loc de fapt, așa cum s-a mai arătat, o coincidență formală între relațiile obținute cu cele de la un tub cu secțiunea circulară unde este doar un profil al vitezei.

Parametrul E_3 scade la creșterea lui k. Datorită proporționalității dintre E_3 și v_{*e} se deduce că la mărirea lui k, v_{*e}, deci și τ_{0e}, se micșorează.

În lucrarea [1] se apreciază că punctul în care viteza prezintă un maxim și efortul de forfecare este nul. Acest punct poate fi obținut experimental prin măsurători.

5. REZULTATELE EXPERIMENTALE

În scopul verificării relațiilor obținute pentru coeficientul de rezistență în spațiul inelar s-au efectuat în laboratorul de mecanica fluidelor din cadrul I.P.G. Ploiești mai multe experimente. S-au realizat spații inelare cu ajutorul unui tub cilindric cu diametrul interior de 0,025 m și a trei tuburi cu diametrele 0,008 ; 0,012 și 0,016 m. În acest fel, coeficientul k a avut valorile 0,32 ; 0,48 și 0,64.

Spațiile inelare au avut lungimea de 1,20 m pe care s-a măsurat pierderea de presiune cu ajutorul unui manometru diferențial și din relația (9) s-au determinat coeficienții de rezistență în funcție de numărul lui Reynolds care a avut valori cuprinse între 4 000 — 22 000. Experimentele au fost efectuate cu aer pentru care s-a apreciat o viscozitate cinematică de $15{,}05 \times 10^{-6}$ m^2/s. Pentru a se constata influența pe care o are excentricitatea relativă e_1 asupra coeficenților de rezistență tuburile cilindrice

din interiorul cilindrului mare au fost fixate în diferite poziţii faţă de axul acestuia cu ajutorul unor şuruburi la capetele tubului din interior.

În situaţia cînd tubul cilindric cu diametrul mai mic a fost aşezat pe axul tubului cilindric mare excentricitatea a fost egală cu zero. Valoarea maximă a excentricităţii a fost realizată cînd tubul interior a fost lipit de peretele tubului cu diametrul 0,025 m.

În figura 9 se redau valorile coeficienţilor de rezistenţă realizaţi în spaţiile inelare cu $k = 0{,}32$ şi 0,64 în funcţie de numărul lui Reynolds. Se observă că toate valorile experimentale de la spaţiul inelar cu $k = 0{,}32$ au fost mai mari decît la cel cu $k = 0{,}64$.

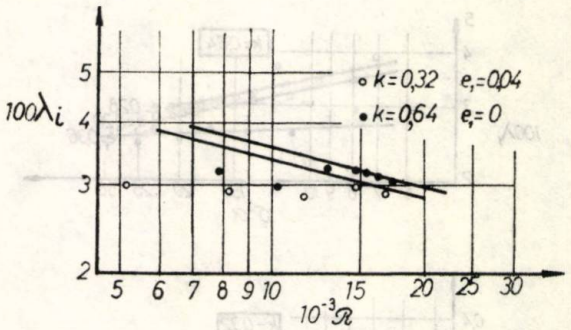


Fig. 9

Din valorile obţinute teoretic rezultă că pentru primul spaţiu inelar ($k = 0{,}32$) coeficienţii de rezistenţă sînt de 1,08 mai mari decît cei de la un tub cu secţiunea circulară, iar cei la spaţiul inelar cu $k = 0{,}64$ de aproximativ 1,045 ori mai mari tot faţă de cei de la un tub cu secţiunea circulară.

Aceasta înseamnă că la primul spaţiu inelar coeficienţii ar trebui să fie faţă de cei de la spaţiul cu $k = 0{,}64$ cu aproximativ 1,033 ori mai mari.

În figura 10 se redau valorile coeficienţilor de rezistenţă obţinuţi experimental cu cei calculaţi cu relaţia existentă în literatură [7], care apreciază că în spaţiile inelare coeficienţii se pot calcula cu formula

$$\lambda = \frac{0{,}34}{\mathscr{R}^{0,25}} \frac{1}{(1-k)^{0,25}}. \tag{45}$$

Coeficientul $(1-k)^{0,25}$ care apare, provine din faptul că în lucrarea amintită numărul lui Reynolds s-a definit cu lungimea caracteristică $(2R_e - R_i)$, iar în lucrarea noastră cu $2R_e$. În figura 11 se redă pentru spaţiile inelare cu $k = 0{,}48$ şi $k = 0{,}64$ coeficienţii de rezistenţă şi în funcţie de excentricitatea relativă e_1. Se observă, în special la spaţiul cu $k = 0{,}48$, că valorile coeficienţilor de rezistenţă sînt mai mici la excentricităţi relative mai mari, ceea ce concide cu rezultatele teoretice obţinute mai înainte.

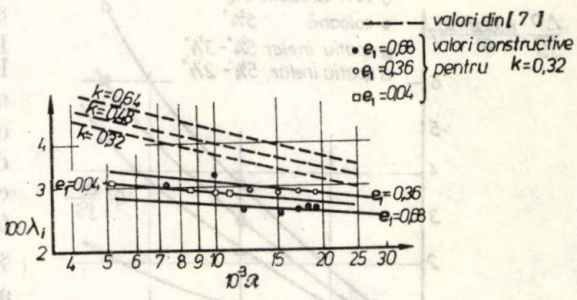


Fig. 10

6. UNELE REZULTATE DIN TEHNICA DE ȘANTIER

În multe situații practice se întîlnesc mișcări turbulente prin spațiile inelare. De cele mai multe ori pierderea de presiune care are loc în aceste spații trebuie cunoscută cu exactitate cum ar fi la operațiile de fisurare hidraulică, acidizare etc. Dacă pomparea fluidelor are loc prin spații inelare de cele mai multe ori acestea sînt excentrice. Avînd în vedere că excentricitatea este greu de stabilit și că situația cea mai defavorabilă, la care se realizează cele mai mari pierderi de presiune prin frecări, în exemplul de calcul efectuat, se admite că spațiile inelare sînt fără excentricitate. Frecvent în situațiile amintite este necesar să fie pompate debite într-o gamă mare de valori prin spațiul inelar format de coloana de exploatare de 5 3/4'' și coloana țevilor de extracție care de obicei este de 2 1/2'', 3'' sau 3 1/2''. În figura 12 se redau pierderile de presiune exprimate în coloană fluid pe metru liniar în spațiul inelar format de coloana de exploatare și țevile de extracție 2 1/2'' și 3 1/2'' pentru debitele 2000, 4000 și 6000 l/min. și viscozitatea de 10^{-4} m²/s. Pe același grafic sînt redate și pierderile de presiune dacă pomparea ar avea loc prin coloana de exploatare 5 3/4'' sau prin coloana țevilor de extracție de 2 1/2'' sau 3 1/2''.

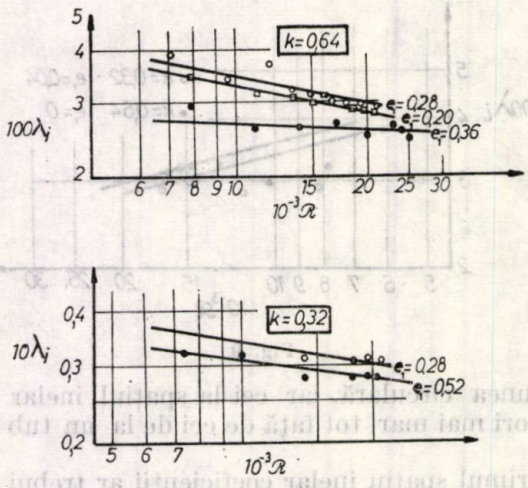


Fig. 11

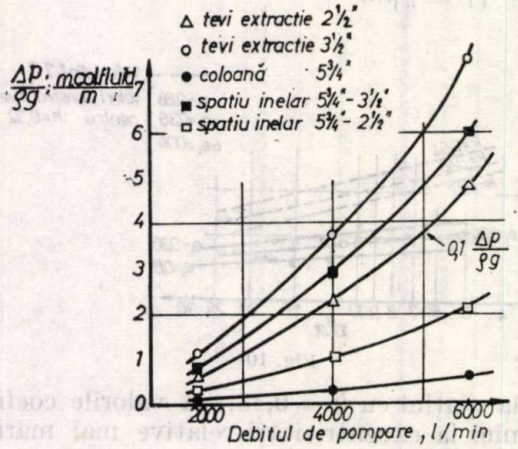


Fig. 12

Pierderile de presiune pe metru liniar care au loc prin țevile de extracție de 2 1/2'' sînt cele mai mari, iar dacă pomparea ar avea loc prin coloana de exploatare acestea ar avea valoarea minimă pentru cele trei debite luate în considerare. Pierderile de presiune care au loc prin spațiul inelar format de coloana de exploatare și țevile de extracție de 3 1/2'' au mărimi comparabile cu pierderile de presiune ce s-ar realiza dacă pomparea fluidului se face prin coloana țevilor de extracție de 3 1/2''.

7. CONCLUZII

Mişcări turbulente prin spaţii inelare se întîlnesc frecvent în tehnică cum ar fi în cea petrolieră la pomparea fluidelor prin spaţiul dintre coloana de exploatare şi coloana ţevilor de extracţie. Coeficientul de rezistenţă la aceste mişcări depinde, ca şi la mişcările turbulente prin tuburile cu secţiunea circulară, de numărul lui Reynolds şi de raportul celor două diametre ale tuburilor cilindrice care formează spaţiul inelar. Pentru spaţiul inelar, dacă numărul lui Reynolds se defineşte cu ajutorul vitezei medii şi al diametrului tubului cilindric mare, coeficientul de rezistenţă în spaţiul inelar fără excentricitate este mai mare faţă de coeficientul de rezistenţă calculat într-un tub cilindric în care numărul lui Reynolds se defineşte cu viteza medie şi diametrul tubului. În gama numerelor lui Reynolds unde coeficientul de rezistenţă pentru un tub cu secţiunea circulară se calculează cu relaţia lui Blasius coeficientul de rezistenţă în spaţiul inelar fără excentricitate este de 1,083 ori mai mare decît cel de la tubul de secţiune circulară. Această situaţie are loc pentru un raport al diametrelor ce formează spaţiul inelar $k = 0{,}25$. La numere Reynolds mai mari decît 10^5 coeficientul de rezistenţă în spaţiul inelar este maxim faţă de cel într-un tub de secţiune circulară la un raport al diametrelor cuprinse între 0,15 şi 0,35. Rezultatele teoretice şi cele experimentale au arătat că la creşterea excentricităţii relative coeficientul de rezistenţă în spaţiul inelar, deci şi pierderea de presiune se micşorează faţă de un spaţiu inelar fără excentricitate. Totuşi, micşorarea coeficientului de rezistenţă la creşterea excentricităţii relative este nesemnificativă din punct de vedere pratic. În calculul numeric efectuat s-a obţinut că la unele spaţii inelare pierderile de presiune sînt comparabile cu cele ce s-ar realiza în tuburi cu secţiunea circulară.

Primită la redacţie la 23 mai 1979

BIBLIOGRAFIE

1. W. M. Kays, *Convective heat and mass transfer*, McGraw Hill Series in Mechanical Engineering New York, San Francisco, St Louis, Toronto, London, Sydney, 1966, p. 67—75.
2. T. Oroveanu, P. Ionescu, *Determinarea pierderilor de lichid prin spaţiul dintre piston şi cilindru la pompele de extracţie cu luarea în considerare a excentricităţii acestora*, Buletinul I.P.G.G. Bucureşti, 1960, vol. VI, p. 65—73.
3. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor vîscoase*, Edit. Academiei Bucureşti, 1967, p. 415—418.
4. T. Oroveanu, Al. D. Stan, *Exploatarea unui zăcămînt fisurat la presiuni diferenţiale mari*, St. cerc. mec. apl. **37**, **2**, 191—198 (1978).
5. V. Panaitescu, *Contribuţii la studiul mişcării fluidelor vîscoase în domeniul numerelor Reynolds mici şi mijlocii cu referire la tranziţia de la mişcarea laminară la mişcarea turbulentă*, Rezultatul tezei de doctorat, Institutul politehnic Bucureşti, 1973, p. 50—63.
6. C. Gh. Popa, *Programarea în fortran şi metode numerice cu aplicaţii în foraj-extracţie* Institutul de petrol şi gaze Ploieşti 1978, p. 262—265.
7. M. W. Rohsenow, J. P. Hartnett, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill Book Comp. — New York, Toronto, London, 1973, p. 7—64, 7—66.
8. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw — Hill Book Comp. Inc., New York, Toronto, London, Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1960, p. 508—512.
9. Al. D. Stan, *Curgerea laminară a fluidelor în spaţii inelare*, St. cerc. mec. apl., **38**, **1** (1979)

MIȘCAREA UNUI FLUID BINGHAMIAN LA DEPLASAREA AXIALĂ RELATIVĂ A DOI CILINDRI CIRCULARI COAXIALI. SITUAȚII POSIBILE

pe N. MACOVEI
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În această lucrare sînt descrise situațiile ce pot surveni la deplasarea longitudinală relativă a doi cilindri coaxiali plini cu un fluid de tipul Bingham. Ele decurg din prezența unei tensiuni limită sub a cărei valoare curgerea nu poate avea loc. Astfel, dacă secțiunea transversală a interiorului tubului central este mică în raport cu cea a spațiului inelar, fluidul din interior este antrenat (sau rămîne în repaus) odată cu tubul interior, iar curgere există doar în exteriorul lui. Dimpotrivă, dacă spațiul dintre tuburi este îngust, fluidul se va mișca în sens opus deplasării tubului mobil doar prin interiorul acestuia.
Sînt prezentate distribuțiile de viteze, precum și relațiile dintre căderea de presiune și viteza relativă a tuburilor, în toate situațiile posibile, rezolvate sub forma unor nomograme.

În lucrarea [1] a fost studiată curgerea laminară a unui fluid de tip Bingham provocată prin deplasarea longitudinală a unui cilindru în alt cilindru. Acesta din urmă este închis la un capăt, astfel încît mișcarea fluidului se datorește atît antrenării lui de către tubul interior, considerat mobil, cît și dezlocuirii produse prin deplasare. Ultima componentă a mișcării fluidului are, evident, sensul opus deplasării tubului.

Relațiile stabilite pentru tuburi interioare libere sînt valabile doar atunci cînd dimensiunile transversale ale celor două canale de curgere, R_0 și $R_2 - R_1$ (vezi fig. 1), sînt apropiate, iar fluidul se mișcă în sens opus deplasării tuburilor prin ambele spații (cu neglijarea termenilor respectivi, relațiile sînt, bineînțeles, valabile și pentru tuburi interioare masive sau obturate — vezi nomogramele din figurile 2 și 3 din [1]. Dar dacă unul dintre cele două canale de curgere este prea îngust în raport cu celălalt, este posibil ca în primul canal fluidul să fie doar antrenat, iar fluidul dezlocuit de tuburi să curgă în sens invers numai prin spațiul mai larg. Aceste situații sînt specifice fluidelor care manifestă proprietăți plastice — cu tensiune critică de forfecare.

Sintetizînd, cazurile posibile sînt, în ordine, cele din figura 1 și anume:

— fluidul din interiorul tubului mobil este antrenat odată cu el și curgerea inversă se realizează doar prin spațiul inelar;

— mișcarea inversă, în raport cu tubul interior, se produce prin ambele spații;

— fluidul se deplasează ascendent doar prin interior; în spațiul inelar o parte din fluid este antrenată descendent, iar cealaltă rămîne nemișcată;

— fluidul dintre tuburi este forfecat în întregime și antrenat de cel mobil.

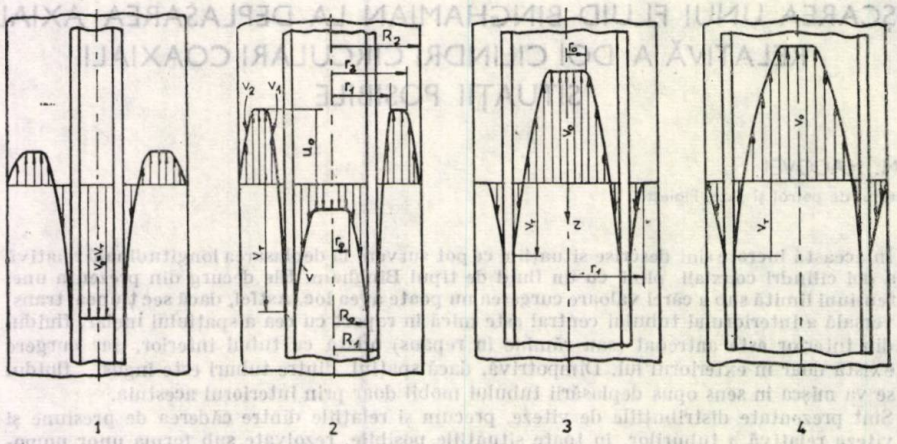


Fig. 1

1. Întregul volum de fluid din interiorul tubului mobil este antrenat de acesta, sub forma unui dop rigid, fără forfecări interioare, deoarece tensiunile tangențiale sînt inferioare tensiunii dinamice de forfecare τ_0. La fluide cu $\tau_0 = 0$ această situație nu este întîlnită. Prezența ei este verificată prin compararea lui r_0, calculat cu relația (33) din [1], cu raza R_0 și are loc dacă $r_0 \geqslant R_0$. Cazul este similar cu cel al unor tuburi masive sau obturate. Așadar sînt valabile relațiile stabilite anterior cu $v_0 = v_T$. Razele r_1 și r_2 se determină din figura 2, iar căderea de presiune cu nomograma din figura 3 din [1].

2. Această situație a fost analizată în [1]. Ea are loc dacă sînt îndeplinite condițiile : $r_0 < R_0$ și $r_2 < R_2$. Se pot distinge două subcazuri, după cum v_0, are valoarea negativă sau pozitivă. Relațiile de calcul sînt aceleași.

3. În spații inelare înguste, curgerea ascendentă poate lipsi. O parte din fluid este forfecată și antrenată descendent, iar cealaltă, de lîngă tubul fix, rămîne în nemișcare deoarece $|\tau| \leqslant \tau_0$.

În tubul mobil, pentru stabilirea distribuțiilor de viteze sînt valabile relațiile (30), (33) și (34), iar pentru cea de tensiune (32) din [1].

Între tuburi urmează să determinăm raza r_1 și distribuția vitezei v_1. Punem condiția ca viteza de forfecare să fie nulă la $r = r_1$ și relația (37) din [1] conduce la

$$A = \frac{P}{2} r_1^2 + \tau_0 r_1. \qquad (1)$$

Înlocuim în (35) din [1] și obținem

$$v_1 = \frac{P}{4\eta_p}(r^2 - R_1^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(r - R_1) -$$

$$- \frac{Pr_1^2}{2\eta_p} \ln \frac{r}{R_1} - \frac{\tau_0}{\eta_p} r_1 \ln \frac{r}{R_1} + v_T. \tag{2}$$

Dar la $r = r_1 - v_1 = 0$ și rezultă o relație pentru determinarea lui r_1:

$$\frac{P}{4\eta_p}(r_1^2 - R_1^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(r_1 - R_1) - \frac{Pr_1^2}{2\eta_p} \ln \frac{r_1}{R_1} -$$

$$- \frac{\tau_0}{\eta_p} r_1 \ln \frac{r_1}{R_1} + v_T = 0. \tag{3}$$

Dacă aceasta este scăzută din (2), conduce la o altă expresie a lui v_1;

$$v_1 = -\frac{P}{4\eta_p}(r_1^2 - r^2) - \frac{\tau_0}{\eta_p}(r_1 - r) +$$

$$+ \frac{Pr_1^2}{2\eta_p} \ln \frac{r_1}{r} + \frac{\tau_0 r_1}{\eta_p} \ln \frac{r_1}{r}. \tag{4}$$

Debitul de fluid care curge prin cele două tuburi

$$Q = 2\pi \int_{r_0}^{R_0} v(r)\, r\mathrm{d}r + \pi r_0^2 v_0 + 2\pi \int_{R_1}^{r_1} v_1(r)\, r\, \mathrm{d}r =$$

$$= \frac{\pi P}{8\eta_p}\left(-R_0^4 + \frac{8}{3}\frac{\tau_0 R_0^3}{P} - \frac{16}{3}\frac{\tau_0^4}{P^4}\right) + \pi R_0^2 v_T +$$

$$+ \frac{\pi P}{8\eta_p}(r_1^4 - R_1^4) + \frac{\pi\tau_0}{6\eta_p}(r_1^3 + 3r_1 R_1^2 - 4R_1^3) -$$

$$- \frac{\pi r_1 R_1^2}{\eta_p}\left(\frac{Pr_1}{2} + \tau_0\right) \ln \frac{r_1}{R_1}. \tag{5}$$

Prin utilizarea condiției (28) din [1] — debitul de fluid este egal cu „debitul" de metal deplasat — , se obține o relație între viteza de deplasare v_T și gradientul de presiune creat P, raza r_1 fiind eliminată cu (3).

Cu notaţiile introduse în [1] problema revine la rezolvarea sistemului :

$$\frac{\bar{P}}{2}(\bar{r}_1^2 - \bar{R}_1^2) + (\bar{r}_1 - \bar{R}_1) - \bar{r}_1(1 + \bar{P}\bar{r}_1)\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{R}_1} + \bar{v}_T = 0, \tag{6}$$

$$-\bar{P}^4\bar{R}_0^4 + \frac{4}{3}\bar{P}^3\bar{R}_0^3 - \frac{1}{3} + 4\bar{P}^3\bar{R}_1^2\bar{v}_T + \bar{P}^4(\bar{r}_1^4 - \bar{R}_1^4) +$$

$$\frac{2}{3}\bar{P}^3(\bar{r}_1^3 + 3\bar{r}_1\bar{R}_1^2 - 4\bar{R}_1^3) - 4\bar{P}^3 r_1\bar{R}_1^2(1 + \bar{P}\bar{r}_1)\ln\frac{\bar{r}_1}{\bar{R}_1} = 0. \tag{7}$$

Ultima ecuaţie se simplifică, prin utilizarea ecuaţiei (6) şi unele transformări, astfel :

$$3\bar{P}^4(\bar{r}_1^2 - \bar{R}_1^2)^2 - \bar{R}_0^4] + \bar{P}^3(4\bar{R}_0^3 + 2\bar{r}_1^3 + 4\bar{R}_1^3 - 6\bar{r}_1\bar{R}_1^2) - 1 = 0 \tag{8}$$

Ecuaţiile rămase, (6) şi (8), pot fi rezolvate prin metode numerice. Domeniul de existenţă a soluţiei este definit de condiţiile : $\bar{r}_2 \geqslant 1$ şi $\bar{r}_1 < 1$.

4. În spaţii inelare şi mai înguste, raza r_1 determinată din relaţiile de mai sus poate deveni egală cu raza tubului exterior : tot fluidul din spaţiul inelar este forfecat şi antrenat de tubul mobil.

Constanta A se determină acum utilizînd condiţia (27) în (35) din [1]. Distribuţia de viteze în spaţiul inelar este

$$v_1 = \frac{P}{4\eta_p}(r^2 - R_1^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(r - R_1) + v_T - \left[\frac{P}{4\eta_p}(R_2^2 - R_1^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\tau_0}{\eta_p}(R_2 - R_1) + v_T\right]\frac{\ln\dfrac{r}{R_1}}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}, \tag{9}$$

lar cea de tensiuni

$$\tau = \frac{P}{2}r - \left[\frac{P}{4}(R_2^2 - R_1^2) + \tau_0(R_2 - R_1) + \eta_p v_T\right]\frac{1}{r\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \tag{10}$$

În interiorul tubului mobil rămîn valabile relaţiile din cazurile 2 şi 3 : (30—34) din [1].

Debitul de fluid care circulă prin cele două spaţii

$$Q = 2\pi\int_{r_0}^{R_0} v(r)\,r\,dr + \pi r_0^2 v_0 + 2\pi'\int_{R}^{R_2} v_1(r)r\ r =$$

$$= \frac{\pi P}{8\eta_p}\left(-R_0^4 + \frac{8}{3}\frac{\tau_0 R_0^3}{P} - \frac{16}{3}\frac{\tau_0^4}{P^4}\right) + \pi R_0^2 v_T - \frac{\pi P}{8\eta_d}(R_2^4 - R_1^4) -$$

$$- \frac{\pi\tau_0}{3\eta_p}(R_2^3 - R_1^3) - \pi R_1^2 v_T + \pi(R_2^2 - R_1^2)\frac{\frac{P}{4\eta_p}(R_2^2 - R_1^2) + \frac{\tau_0}{\eta_p}(R_2 - R_1) + v_T}{2\ln\frac{R_2}{R_1}}. \tag{11}$$

Dacă se utilizează condiţia de bilanţ material rezultă :

$$v_T = \left[\frac{P}{4\eta_p}(R_0^4 - R_2^4 + R_1^4) - \frac{2}{3}\frac{\tau_0}{\eta_p}(R_0^3 - R_2^3 + R_1^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\frac{\tau_0^4}{\eta_p P^3}\right]\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{R_2^2 - R_1^2} - \frac{P}{4\eta_p}(R_2^2 - R_1^2) - \frac{\tau_0}{\eta_p}(R_2 - R_1). \tag{12}$$

Sub formă adimensională, relaţia de mai sus devine :

$$\bar{v}_T = \left[\frac{\bar{P}}{2}(\bar{R}_0^4 - \bar{R}^4 + 1) - \frac{2}{3}(\bar{R}_0^3 + \bar{R}_2^3 - 1) + \frac{1}{6\bar{P}^3}\right]\frac{\ln\frac{1}{\bar{R}}}{1-\bar{R}^2} -$$

$$- \frac{\bar{P}}{2}(1 - \bar{R}_2) - (1 - \bar{R}). \tag{13}$$

Ea este valabilă numai pentru $\bar{r}_1 > 1$. Calculul gradientului de presiune creat la deplasarea tubului mobil cu o viteză dată reclamă, de asemenea, folosirea unor metode numerice.

Pentru exemplificare, ecuaţiile (58) şi (59) din [1] — cazurile 1 şi 2, (6) şi (8) — cazul 3, precum şi (12) — cazul 4, au fost utilizate pentru determinarea gradientului de presiune la manevrarea unor tuburi interioare cu grosimea peretelui $t = R_1 - R_0 = 0{,}1\ R_2$ şi diverse raze R_1. Rezultatele sînt prezentate grafic în figura 2, în coordonate adimensionale. În figura 3 sînt determinate reazele inelului neforfecat din spaţiul inelar. Raza miezului din tubul mobil se stabileşte cu relaţia (33) din [1] cu $P_1 = P$.

Exemplul de mai sus corespunde, în general, cazului manevrării burlanelor fără valvă de reţinere şi a prăjinilor într-o sondă.

Dar prezenţa uneia sau alteia dintre situaţii depinde nu numai de raportul dimensiunilor celor două secţiuni de curgere, ci şi de proprietăţile reologice ale fluidului şi de viteza tubului mobil. În figura 4 este ilustrată prezenţa diverselor situaţii în funcţie de viteza v şi raportul razelor R pentru tuburi mobile cu grosime neglijabilă şi tuburi cu grosimea $t = 0{,}1\ R_2$. Dacă viteza tubului este mică şi raportul τ_0/η este mare, tubul mobil se

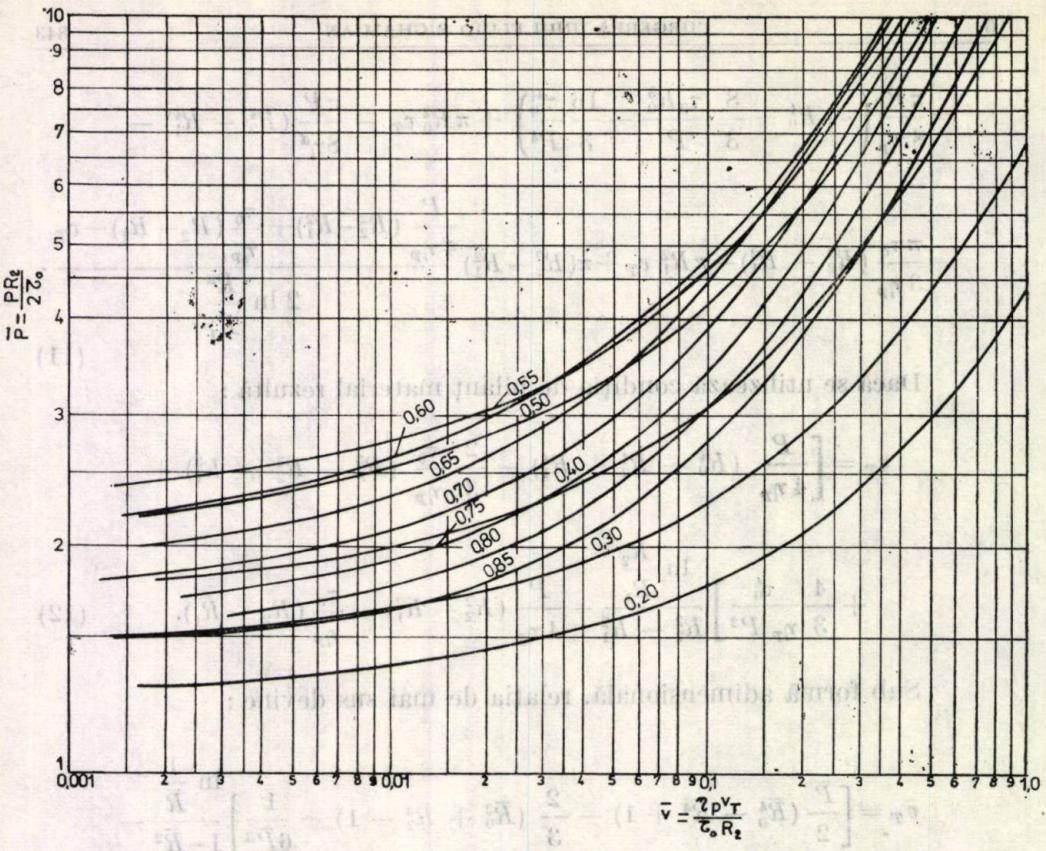

$\bar{P} = \frac{PR_2}{2\tau_0}$
$\bar{v} = \frac{\tau_0 v_T}{\tau_0 R_2}$
0,60
0,55
0,50
0,65
0,70
0,40
0,75
0,80
0,30
0,85
0,20

Fig. 2

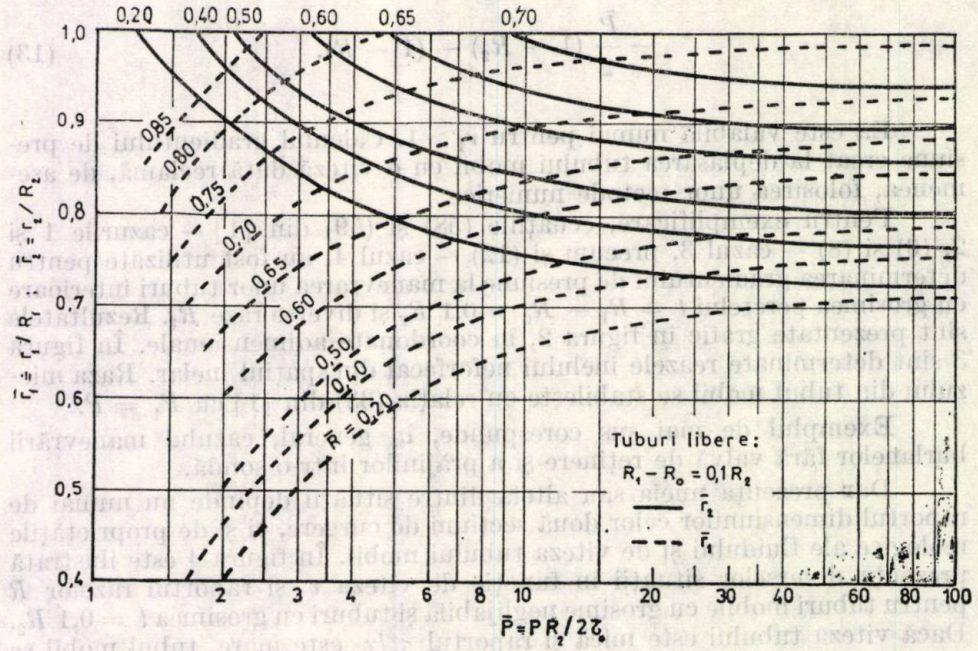

$\bar{r}_1 = r_1 / R_1$; $\bar{r}_2 = r_2 / R_2$
$\bar{P} = PR_2 / 2\tau_0$
0,20
0,40
0,50
0,60
0,65
0,70
0,85
0,80
0,75
0,70
0,65
0,60
0,50
0,40
$\bar{R} = 0,20$
Tuburi libere:
$R_1 - R_0 = 0,1 R_2$
$\bar{r}_2$
$\bar{r}_1$

Fig. 3

comportă ca unul obturat — cazul 1 — , chiar la grosimi neglijabile și raze pînă la 0,4 R_2. Curgerea simultană prin ambele canale — cazul 2 — apare doar la viteze suficient de mari și rapoarte τ_0/η scăzute.

Exemplu. O coloană de țevi cu diametrul exterior $D = 120$ mm, grosimea peretelui $t = 10$ mm și lungimea $L = 4\,000$ m se introduce cu vi-

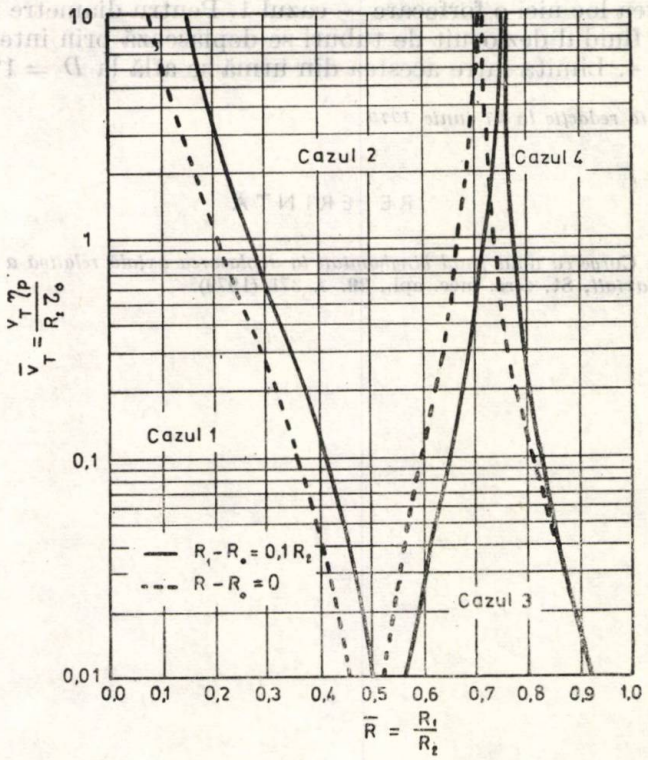


Fig. 4

teza $v_T = 2$ m/s într-o sondă cu diametrul $D_s = 200$ mm. Fluidul din sondă are proprietățile : $\eta_p = 30$ cP și $\tau_0 = 10$ N/m². Să se determine presiunea suplimentară creată la talpă și distribuția vitezelor.

Se calculează :

$$\bar{R} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{60}{100} = 0{,}6,$$

$$\bar{v}_T = \frac{v_T\ \eta_p}{\tau_0\ R_2} = \frac{2.30.10^{-3}}{10.0{,}1} = 0{,}06.$$

Din figura 2 se citește $\bar{P} = 4$. Presiunea suplimentară la talpă

$$p = PL = \frac{2\tau_0 \bar{P}}{R_2} L = \frac{2.10.4}{0{,}1}\ 4000 = 32.10^5\ \text{N/m}^2 = 32\ \text{bari}.$$

Din figura 3 se citesc $\bar{r}_1 = 0{,}715$ și $r_2 = 0{,}965$. Așadar : $r_1 = 7{,}15$ cm, $r_2 = 9{,}65$ cm și $r_0 = 2{,}50$ cm. Cu relația (34) se calculează $v_0 = -2{,}17$m/s, iar cu (36) din [1] pentru $r = r_2$, $v_0 = -0{,}14$ m/s. Fluidul se mișcă ascendent atît prin interiorul țevilor, cît și prin spațiul inelar : cazul 2.

Din figura 4 se poate constata că păstrînd celelalte condiții aceleași, dacă diametrul exterior al țevilor este mai mic de 88 mm, prin interiorul lor nu va avea loc nici o forfecare — cazul 1. Pentru diametre mai mari de 125 mm tot fluidul dezlocuit de tuburi se deplasează prin interiorul lor — cazurile 3 și 4. Limita între acestea din urmă se află la $D = 170$ mm.

Primită la redacție la 27 iunie 1979

REFERINȚĂ

1. N. Macovei, *Curgerea unui fluid binghamian la deplasarea axială relativă a doi cilindri circulari coaxiali*, St. cerc. mec. apl., **38**, *3*, 371 (1979).

ALGORITME PENTRU CALCULUL CINETOSTATIC AL MECANISMELOR FORMATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE BINARE, UTILIZATE ÎN PROGRAMUL GENERAL CINCINET

de NICULAE MANAFI, SERGIU CONONOVICI

Institutul de fizica și tehnologia materialelor

În cadrul prezentei lucrări se continuă prezentarea principiilor și algoritmelor care au stat la baza elaborării programului general CINCINET destinat calculului cinematic și cinetostatic automatizat al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare. În strictă corelație cu algoritmele pentru calculul poziționa! și cinematic, publicate anterior, în lucrare sînt prezentate algoritmele pentru calculul cinetostatic elaborate de autori, incluse integral în programul CINCINET.

Se utilizează o formă de prezentare și de sistematizare adecvată a algoritmelor pentru a facilita utilizarea lor și cu ajutorul minicalculatoarelor.

1. GENERALITĂȚI

În lucrarea [1] au fost prezentate algoritmele pentru calculul poziționa! și cinematic al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare (diadele assurice), incluse în programul CINCINET elaborat de autori.

Algoritmele de calcul cinetostatic, prezentate în cele ce urmează, au fost elaborate în strictă corelare cu cele de calcul poziționa! și cinematic atît sub aspectul modului de tratare, al notațiilor parametrilor comuni, cît și al formei de prezentare și sistematizare (planșele conținînd algoritmele, sînt numerotate în continuarea celor publicate anterior). La baza acestor algoritme au stat rezultatele cercetărilor conținute în teza de doctorat [2].

În cadrul programului CINCINET calculul cinetostatic al unui mecanism, ca și cel poziționa!-cinematic, se efectuează pentru fiecare poziție distinctă considerată din cadrul ciclului cinematic.

S-a arătat anterior [1] că în cazul general al unui mecanism complex, avînd un număr determinat de elemente conducătoare și de diade, calculul poziționa! și cinematic se efectuează rezolvînd mai întîi elementele conducătoare și apoi diadele, într-o anumită ordine logică indicată de *șirul succesiunii diadelor* (SSD) stabilit prin analiza conexiunilor acestora. Pentru efectuarea calculului cinetostatic se rezolvă mai întîi diadele mecanismului în ordinea inversă a SSD și apoi elementele conducătoare.

2. REDUCEREA FORȚELOR APLICATE UNUI ELEMENT

În general, asupra unui element oarecare (conducător sau component al unei diade) aparținînd unui mecanism, mărginit de cuplele cinematice notate prin identificatorii α și β, se consideră aplicate următoarele solicitări (planșa 13) :

a). *Forțele și momentele date* ($\bar{F}_d$, M_d), provenind din funcțiunile tehnologice ale mecanismului și constituind date ale calculului cinetostatic. Aceste forțe și momente pot fi constante sau variabile în timp în funcție de parametrii pozițional-cinematici sau de alți parametri. Ele pot fi indicate numeric sau prin expresii analitice care se evaluează separat. Pentru o forță oarecare este necesară indicarea poziției punctului de aplicație prin coordonatele locale X_F și Y_F, a mărimii F_d și a direcției după care acționează, precizată prin unghiul τ_d făcut de vectorul forței cu direcția pozitivă a axei Ox a sistemului general de referință al mecanismului. Asupra unui element pot acționa mai multe forțe și momente date, pentru fiecare trebuind a fi precizate mărimile caracteristice. Momentele se consideră pozitive dacă tind să rotească elementul în sens trigonometric.

b). *Greutatea proprie a elementului* ($\bar{G}$), concentrată în centrul de greutate avînd coordonatele locale X_G și Y_G cunoscute.

c). *Rezultanta și momentul rezultant al forțelor de inerție* ($\bar{F}_i$, M_i) aplicate în centrul de greutate. Corespunzător fiecărei poziții de calcul considerată, acestea se determină în funcție de parametrii masici (G, J_G) ai elementului și de parametrii cinematici a_G și ε obținuți în baza calculului cinematic anterior.

d). *Reacțiunile din partea conexiunilor* ($\bar{R}$, M_R) cu alte diade din configurația structurală a lanțului cinematic al mecanismului. Aceste forțe și momente sînt inversele reacțiunilor aplicate diadei conectate în cupla potențială prin care se face conexiunea. Momentul M_R intervine numai la conexiunile prin cuple de translație. Parametrii caracteristici sînt indicați în același mod ca și pentru forțele și momentele date.

În practică se pot întîlni diferite situații de încărcare, unele dintre forțele și momentele enumerate mai sus putînd să lipsească. Pentru a realiza algoritme de calcul cinetostatic generale, utilizabile în orice situații de încărcate a diadelor și elementelor conducătoare, este recomandabil ca sistemul real de forțe și momente aplicat fiecărui element să fie redus la cîte o rezultantă $\bar{F}$ și un moment rezultant M în raport cu un punct de reducere convenabil ales. Pentru simplificarea relațiilor de calcul se consideră indicat ca acest punct să se găsească pe direcția $\alpha\beta$ a elementului, la distanța $h = X_G$ de cupla potențială α.

Algoritmul pentru calculul elementelor torsorului de reducere în punctul menționat este dat în planșa 13.

Operațiile de reducere se efectuează pentru fiecare element și pentru fiecare din pozițiile de calcul ale mecanismului. La elementele conducătoare reacțiunile din cupla de conexiune β nu sînt incluse în torsorul de reducere.

3. DEFINIREA GENERALĂ A REACȚIUNILOR

Pentru toate tipurile de diade care pot intra în componența mecanismelor plane se poate proceda la o definire unitară și generală a reacțiunilor din cuplele cinematice, sub aspectul direcțiilor de acțiune și al notațiilor utilizate.

În fiecare cuplă cinematică care mărginește un element (planșa 14) acționează cîte o reacțiune totală $\bar{R}$ a cărei direcție face unghiul ρ cu direcția pozitivă a axei Ox. Se consideră util ca această reacțiune să fie determinată prin componentele sale $\bar{N}$ și $\bar{T}$, normală și respectiv tangențială în raport cu secțiunea elementului. Dacă fiecărui element i se atașează un sistem local de axe de coordonate, avînd originea în cupla potențială α sau γ și axa X după direcția elementului (trecînd prin cupla interioară β), reacțiunile $\bar{N}$ vor fi dirijate după axele X, iar $\bar{T}$ după axele Y. Sensurile lor pozitive coincid cu direcțiile pozitive ale acestor axe.

În cazul cuplelor de translație, în absența forțelor de frecare, reacțiunile totale $\bar{R}$ sînt perpendiculare pe direcția suportului după care se execută translația. Nefiind posibilă rotirea relativă a elementelor legate de aceste cuple, în afara reacțiunilor $\bar{R}$ mai acționează și cîte un cuplu M_R, considerat pozitiv în sens trigonometric.

În cuplele centrale β este evidentă relația $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$ și $M_{R21} = -R_{R12}$. La elementele care servesc drept suport de alunecare cuplelor de translație, reacțiunile totale sînt identice cu componentele lor tangențiale ($\bar{R} \equiv \bar{T}$, $\bar{N} = 0$).

Adoptînd un sistem unic de notare a reacțiunilor, în tabelul din planșa 14 au fost indicate reacțiunile aferente fiecărui tip de diadă, constituind necunoscute ale calculului cinetostatic.

4. ALGORITMELE DE CALCUL CINETOSTATIC

Pentru fiecare tip de diadă și de element conducător au fost alcătuite algoritme de calcul distincte, care pot fi interconectate în funcție de configurația structurală a mecanismului de studiat și de succesiunea de rezolvare stabilită.

Pentru fiecare poziție considerată a mecanismului, grupele sale structurale sînt în echilibru cinetostatic sub acțiunea forțelor și momentelor calculate în baza reducerii descrise în paragraful 2, și a reacțiunilor din cuplele cinematice definite în paragraful precedent.

În baza ecuațiilor de echilibru ale grupelor structurale în ansamblu, și ale elementelor lor componente, au rezultat relațiile de calcul incluse în algoritme, dispuse în succesiunea logică a determinării reacțiunilor.

a). *Reacțiunile aplicate diadelor* se calculează cu relațiile conținute în algoritmele prezentate în planșele 15 ÷ 21. Ținînd cont de precizările făcute în lucrarea [1] și de cele expuse mai înainte, semnificația notațiilor utilizate este următoarea :

$l_1, l_2, \Psi, \nu_1, \nu_2$ — grupul general al datelor dimensionale indicate pentru diade, fiecăreia corespunzîndu-i o combinație specifică ;

Φ_1, Φ_2 — unghiurile de poziţie ale elementelor (din calculul poziţional);

λ_1, λ_2 — unghiurile de poziţie ale suporturilor cuplelor potenţiale de translaţie (din calculul poziţional al conexiunilor);

F_1, τ_1, h_1, M_1 — parametrii torsorului de reducere al forţelor aplicate elementului $\alpha\beta$;

F_2, τ_2, h_2, M_2 — idem, elementului $\gamma\beta$;

$R_1, N_1, T_1 M_{R1}$ — reacţiunile aplicate elementului $\alpha\beta$ în cupla potenţială α;

$R_{21}, N_{21}, T_{21}, M_{R21}$ — idem, în cupla interioară β, de către elementul $\gamma\beta$;

R_2, N_2, T_2, M_{R2} — reacţiunile aplicate elementului $\gamma\beta$ în cupla potenţială γ;

$R_{12}, N_{12}, T_{12}, M_{R12}$ — idem, în cupla interioară β, de către elementul $\alpha\beta$.

b). *Reacţiunile aplicate elementelor conducătoare* se calculează cu algoritmele prezentate în planşa 22. În afara acestor reacţiuni, necunoscute ale calculului cinetostatic sînt şi momentele de echilibrare M_e (pentru tipurile GRR şi GRT) şi forţele de echilibrare $\bar{F}_e$ (pentru tipurile GTR şi GTT). Semnificaţia notaţiilor utilizate este următoarea:

r, r^*, θ, ξ — lungimile elementelor conducătoare (date sau calculate) şi unghiurile fixe date;

φ — unghiul de poziţie al elementelor conducătoare de rotaţie (GRR, GRT);

F, τ, h, M — parametrii torsorului de reducere al forţelor şi momentelor aplicate elementelor conducătoare;

$R_1^*, \rho_1^*, M_{R1}^*$ — reacţiunile aplicate diadei antrenate prin cupla β a elementului conducător, identică cu cupla potenţială α sau γ a diadei;

$R_1, \rho_1, N_1, T_1, M_{R1}$ — reacţiuni aplicate elementului conducător în cupla β de către diada antrenată;

R, ρ, N, T, M_R — idem, în cupla α legată la bază;

M_e, F_e — momentul şi forţa de echilibrare.

c). *Reacţiunile aplicate bazei mecanismului* sînt prezentate în planşa 23. Ele pot proveni atît din partea elementelor conducătoare (prin cupla α), cît şi de la diadele legate la bază (prin cuplele α sau γ). Întrucît forma şi necesităţile de calcul ale bazei unui mecanism diferă de la caz la caz reacţiunile totale aplicate bazei se descompun în componentele $\bar{R}_x$ şi $\bar{R}_y$, dirijate după direcţiile sistemului general de referinţă al mecanismului.

Algoritmele prezentate concentrat în planşele anexate au stat la baza elaborării secţiunii de calcul cinetostatic a programului CINCINET. Datorită formei sub care au fost sistematizate, ele pot fi utilizate şi direct, la rezolvarea unor probleme de calcul limitate ca volum, cu ajutorul minicalculatoarelor programabile sau neprogramabile.

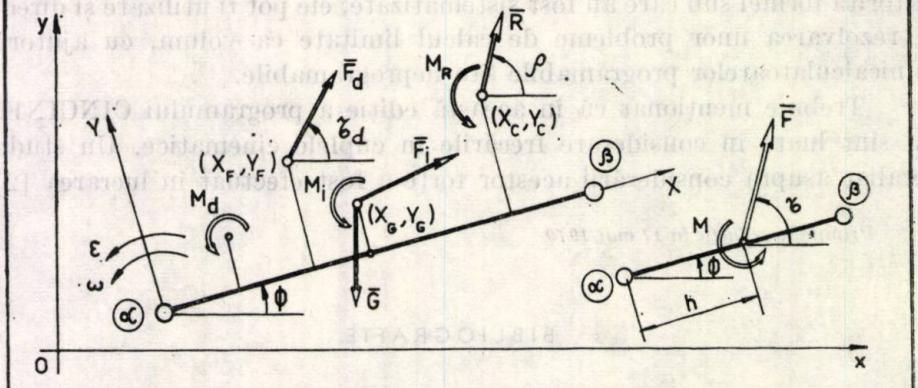
Trebuie menţionat că în această ediţie a programului CINCINET nu sînt luate în considerare frecările în cuplele cinematice. Un studiu detaliat asupra considerării acestor forţe a fost efectuat în lucrarea [2].

Primită la redacţie la 17 mai 1979

BIBLIOGRAFIE

1. N. Manafi, S. Cononovici, *Algoritme pentru calculul poziţional şi cinematic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale binare, utilizate în programul CINCINET*, St. cerc. mec. apl., **38**, 2 (1979).
2. N. Manafi, *Contribuţii la analiza dinamică a mecanismelor plane*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Bucureşti, 1976.

CINCINET	REDUCEREA FORȚELOR APLICATE UNUI ELEMENT	PLANȘA 13



X_G	Y_G	G	J_G	Parametrii masici indicați ai elementului	
ϕ	ω	ε	a_x	a_y	Parametri preluați din calculul pozițional și cinematic
X_F	Y_F	F_d	γ_d	M_d	Parametrii forțelor și momentelor exterioare date
X_C	Y_C	R	ρ	M_R	Parametrii reacțiunilor aplicate elementului în punctele de conexiune cu altă diadă

Algoritmul pentru calculul rezultantei și momentului rezultant

1	$a_{Gx} = a_x - \omega^2(X_G\cos\phi - Y_G\sin\phi) - \varepsilon(X_G\sin\phi + Y_G\cos\phi)$		
2	$a_{Gy} = a_y - \omega^2(X_G\sin\phi + Y_G\cos\phi) + \varepsilon(X_G\cos\phi - Y_G\sin\phi)$		
3	$F_{ix} = -G\cdot a_{Gx}/g$	4	$F_{iy} = -G\cdot a_{Gy}/g$
5	$M_e(\bar{F}_d) = (X_F - X_G)\cdot F_d\sin(\gamma_d - \phi) - (Y_F - Y_G)\cdot F_d\cos(\gamma_d - \phi)$		
6	$M_e(\bar{R}) = (X_C - X_e)\,R\sin(\rho - \phi) - (Y_C - Y_G)\,R\cos(\rho - \phi)$		
7	$F_x = F_{ix} + \Sigma F_d\cos\gamma_d + \Sigma R\cos\rho$	8	$F_y = F_{iy} + \Sigma F_d\sin\gamma_d + \Sigma R\sin\rho + G$
9	$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$	10	$h = X_G$
11	$\cos\gamma = F_x/F$	12	$\sin\gamma = F_y/F$
13	$M = -J_G\varepsilon + \Sigma M_d + \Sigma M_R + \Sigma M_e(\bar{F}_d) + \Sigma M_e(\bar{R}) - Y_G F\cos(\gamma - \phi)$		

Observații

Pentru conexiuni prin cuplă

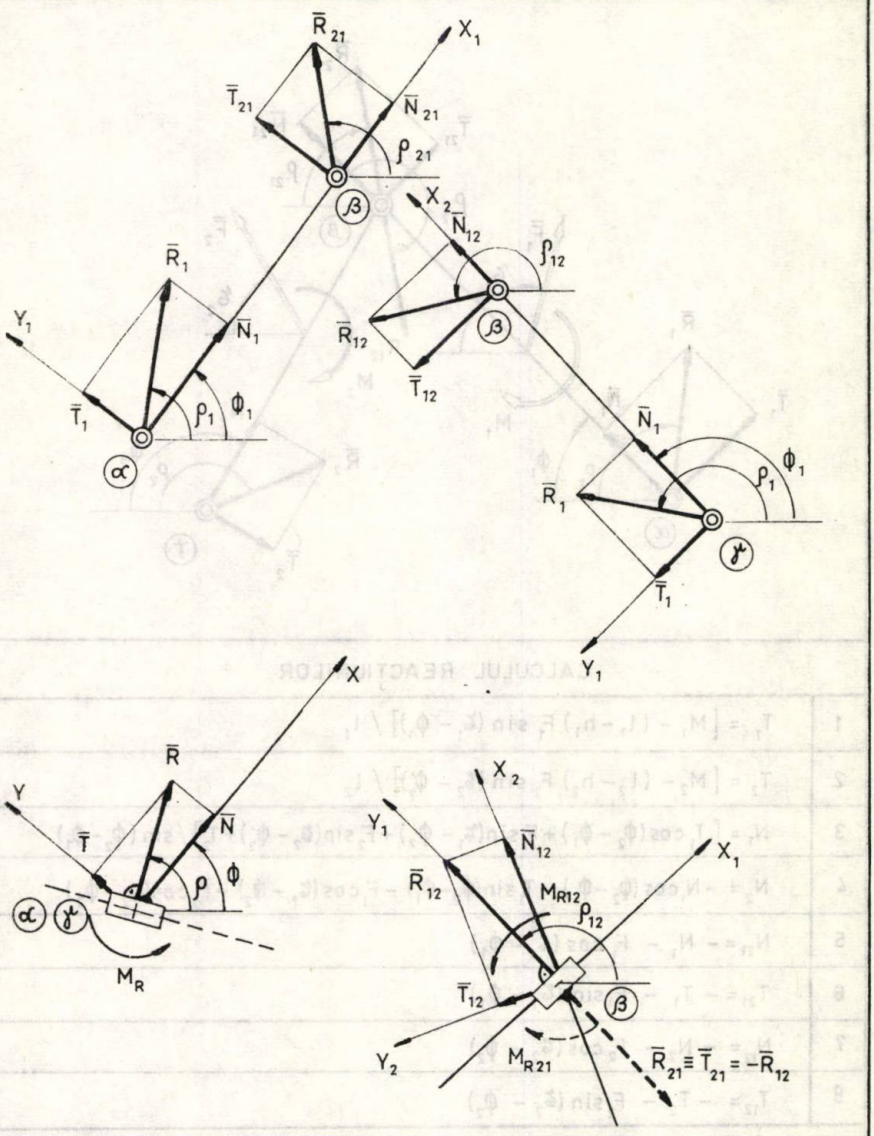
a) de rotație: $X_C = X_p$, $Y_C = Y_p$

b) de translație: $X_C = X_p + r^*\cos\xi$, $Y_C = Y_p + r^*\sin\xi$

X_p, Y_p, ξ = parametrii poziționali ai conexiunii (dați)

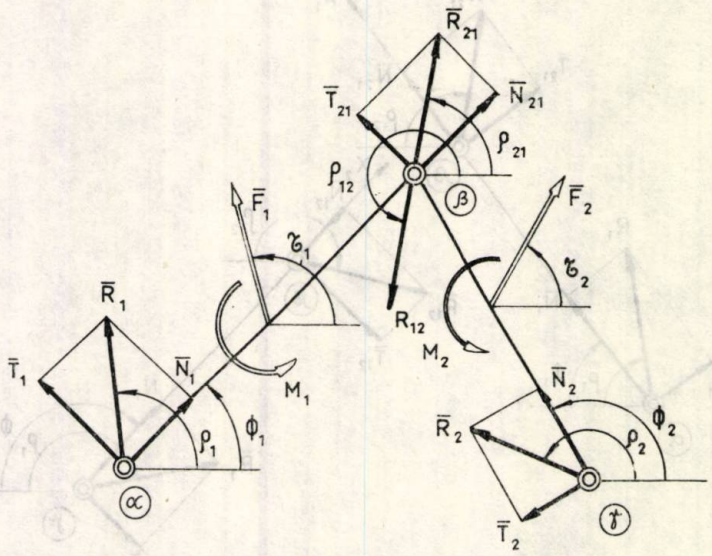
r^* = poziția relativă pe suport a cuplei de translație conectată. (calculată)

CINCINET	DEFINIREA GENERALĂ A REACȚIUNILOR	planșa 14



	diada	N_1	T_1	M_{R1}	N_{21}	T_{21}	M_{R21}	N_2	T_2	M_{R2}	N_{12}	T_{12}	M_{R12}
1	RRR	•	•	0	•	•	0	•	•	0	•	•	0
2	RTR	•	•	0	0	•	•	•	•	0	•	•	•
3	TRR	•	•	•	•	•	0	•	•	0	•	•	0
4	RRT	•	•	0	•	•	0	•	•	•	•	•	0
5	TRT	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	0
6	RTT	•	•	0	•	•	•	•	•	•	0	•	•
7	TTR	•	•	•	0	•	•	•	•	0	•	•	•

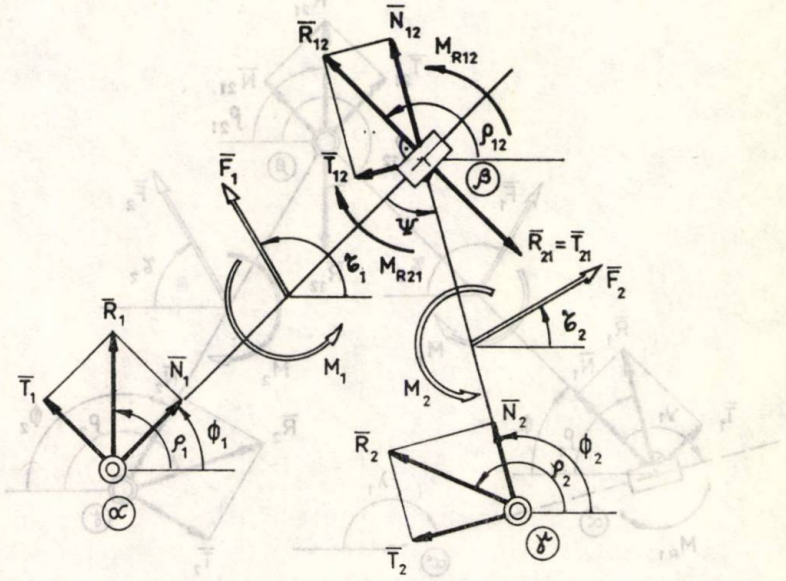
CINCINET	DIADA DE ASPECT 1 (RRR)	planșa 15



CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$T_1 = [M_1 - (l_1 - h_1) F_1 \sin(\tau_1 - \phi_1)] / l_1$
2	$T_2 = [M_2 - (l_2 - h_2) F_2 \sin(\tau_2 - \phi_2)] / l_2$
3	$N_1 = [T_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) + F_1 \sin(\tau_1 - \phi_2) + F_2 \sin(\tau_2 - \phi_2) + T_2] / \sin(\phi_2 - \phi_1)$
4	$N_2 = -N_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) - T_1 \sin(\phi_2 - \phi_1) - F_1 \cos(\tau_1 - \phi_2) - F_2 \cos(\tau_2 - \phi_2)$
5	$N_{21} = -N_1 - F_1 \cos(\tau_1 - \phi_1)$
6	$T_{21} = -T_1 - F_1 \sin(\tau_1 - \phi_1)$
7	$N_{12} = -N_2 - F_2 \cos(\tau_2 - \phi_2)$
8	$T_{12} = -T_2 - F_2 \sin(\tau_2 - \phi_2)$

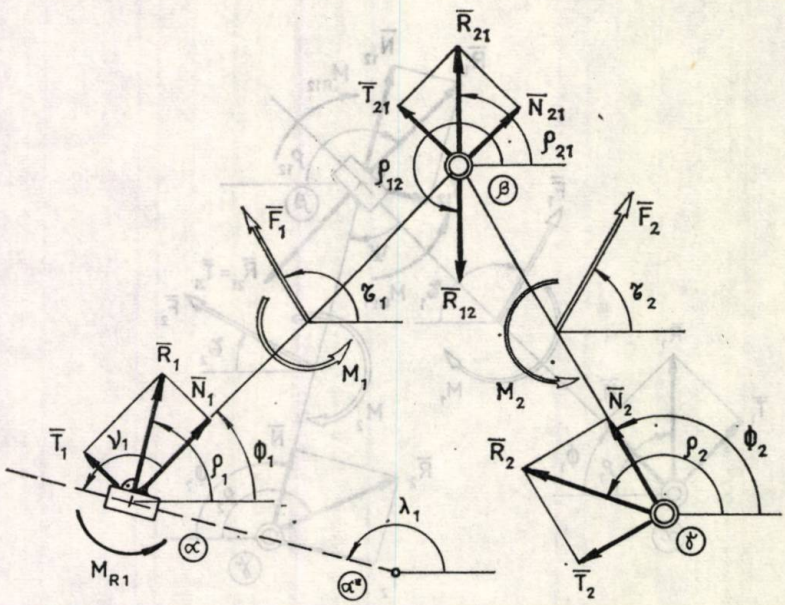
CINCINET	DIADA DE ASPECT 2 (RTR)	planșa 16



CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$N_1 = -F_1 \cos(\gamma_1 - \phi_1)$
2	$T_1 = [M_1 + M_2 - N_1 l_2 \sin\Psi + F_1 l_2 \sin(\gamma_1 - \phi_2) + F_2 h_2 \sin(\gamma_2 - \phi_2) - F_1 (l_1 - h_1) \sin(\gamma_1 - \phi_1)] / (l_1 - l_2 \cos\Psi)$
3	$T_{21} = -T_1 - F_1 \sin(\gamma_1 - \phi_1)$
4	$N_{12} = -T_{21} \sin\Psi$
5	$T_{12} = -T_{21} \cos\Psi$
6	$N_2 = -N_{12} - F_2 \cos(\gamma_2 - \phi_2)$
7	$T_2 = -T_{12} - F_2 \sin(\gamma_2 - \phi_2)$
8	$M_{R21} = -F_1 h_1 \sin(\gamma_1 - \phi_1) - T_{21} l_1 - M_1$
9	$M_{R12} = -M_{R21}$

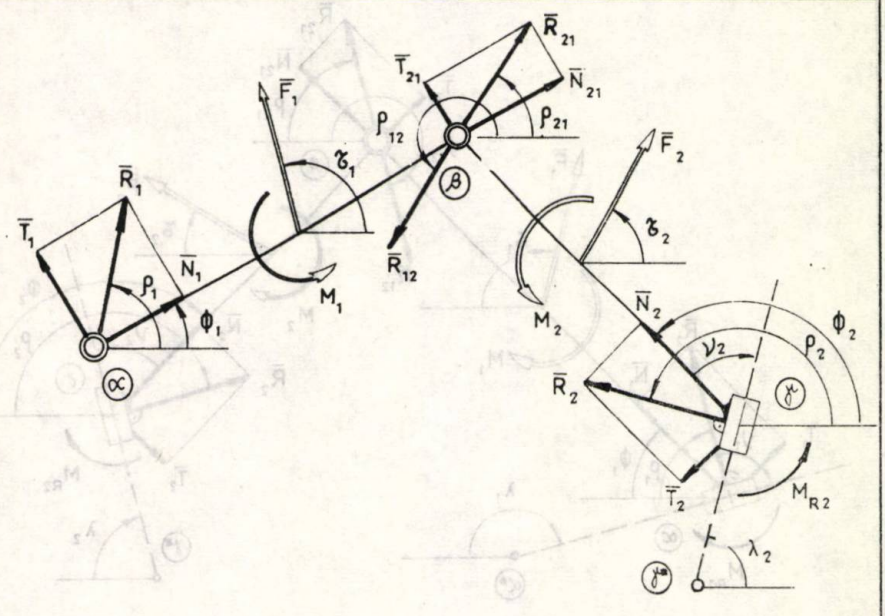
CINCINET	DIADA DE ASPECT 3, VARIANTA 1 (TRR)	planșa 17



CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$T_2 = [M_2 - (l_2 - h_2) F_2 \sin(\tau_2 - \phi_2)] / l_2$
2	$R_1 = [F_1 \sin(\tau_1 - \phi_2) + F_2 \sin(\tau_2 - \phi_2) + T_2] / \cos(\lambda_1 - \phi_2)$
3	$N_1 = R_1 \sin \nu_1$
4	$T_1 = -R_1 \cos \nu_1$
5	$N_{21} = -N_1 - F_1 \cos(\tau_1 - \phi_1)$
6	$T_{21} = -T_1 - F_1 \sin(\tau_1 - \phi_1)$
7	$N_{12} = -N_{21} \cos(\phi_1 - \phi_2) + T_{21} \sin(\phi_1 - \phi_2)$
8	$T_{12} = -N_{21} \sin(\phi_1 - \phi_2) - T_{21} \cos(\phi_1 - \phi_2)$
9	$N_2 = -N_{12} - F_2 \cos(\tau_2 - \phi_2)$
10	$M_{R1} = -M_1 - F_1 h_1 \sin(\tau_1 - \phi_1) - T_{21} l_1$

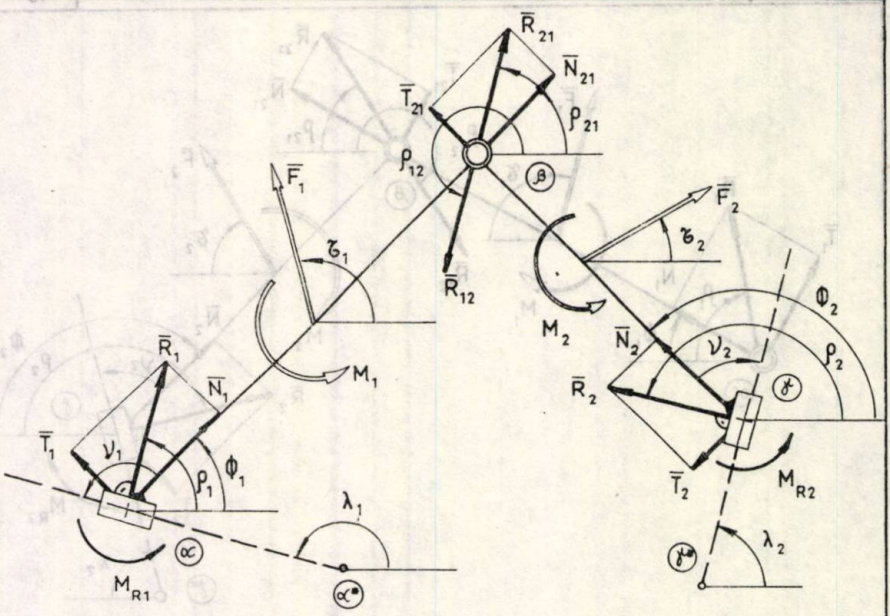
CINCINET	DIADA DE ASPECT 3, VARIANTA 2 (RRT)	planșa 18



CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$T_1 = [M_1 - (l_1 - h_1) F_1 \sin(\gamma_1 - \phi_1)] / l_1$
2	$R_2 = [F_1 \sin(\gamma_1 - \phi_1) + F_2 \sin(\gamma_2 - \phi_1) + T_1] / \cos(\lambda_2 - \phi_1)$
3	$N_2 = R_2 \sin \nu_2$
4	$T_2 = - R_2 \cos \nu_2$
5	$N_{12} = - N_2 - F_2 \cos(\gamma_2 - \phi_2)$
6	$T_{12} = - T_2 - F_2 \sin(\gamma_2 - \phi_2)$
7	$N_{21} = - N_{12} \cos(\phi_2 - \phi_1) + T_{12} \sin(\phi_2 - \phi_1)$
8	$T_{21} = - N_{12} \sin(\phi_2 - \phi_1) - T_{12} \cos(\phi_2 - \phi_1)$
9	$N_1 = - N_{21} - F_1 \cos(\gamma_1 - \phi_1)$
10	$M_{R2} = - M_2 - F_2 h_2 \sin(\gamma_2 - \phi_2) - T_{12} l_2$

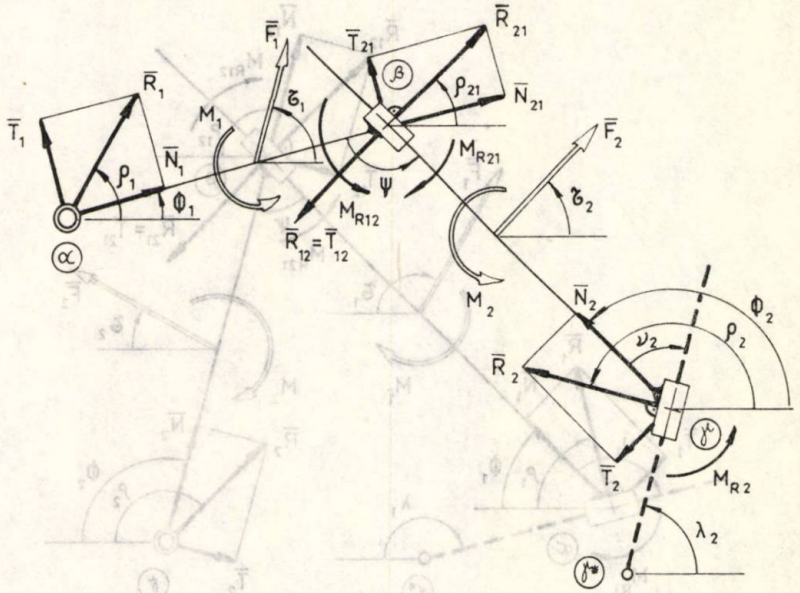
CINCINET	DIADA DE ASPECT 4 (TRT)	planșa 19



CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$R_1 = [F_1 \cos(\gamma_1 - \lambda_2) + F_2 \cos(\gamma_2 - \lambda_2)] / \sin(\lambda_2 - \lambda_1)$
2	$R_2 = -R_1 \cos(\lambda_2 - \lambda_1) + F_1 \sin(\gamma_1 - \lambda_2) + F_2 \sin(\gamma_2 - \lambda_2)$
3	$N_1 = R_1 \sin \nu_1$
4	$T_1 = -R_1 \cos \nu_1$
5	$N_2 = R_2 \sin \nu_2$
6	$T_2 = -R_2 \cos \nu_2$
7	$N_{21} = -N_1 - F_1 \cos(\gamma_1 - \Phi_1)$
8	$T_{21} = -T_1 - F_1 \sin(\gamma_1 - \Phi_1)$
9	$N_{12} = -N_2 - F_2 \cos(\gamma_2 - \Phi_2)$
10	$T_{12} = -T_2 - F_2 \sin(\gamma_2 - \Phi_2)$
11	$M_{R1} = -M_1 - F_1 h_1 \sin(\gamma_1 - \Phi_1) - T_{21} l_1$
12	$M_{R2} = -M_2 - F_2 h_2 \sin(\gamma_2 - \Phi_2) - T_{12} l_2$

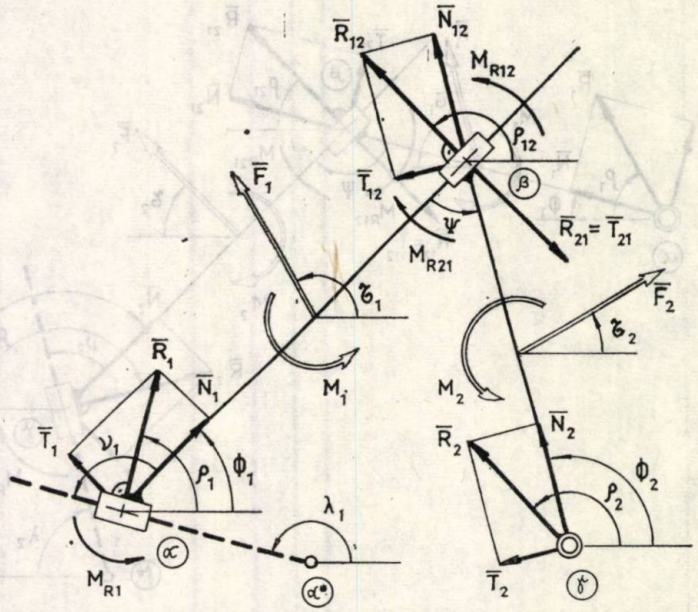
CINCINET	DIADA DE ASPECT 5, VARIANTA 1 (RTT)	planșa 20



CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$T_{12} = -F_2 \cos(\zeta_2 - \lambda_2) / \sin \nu_2$
2	$R_2 = T_{12} \cos \nu_2 + F_2 \sin(\zeta_2 - \lambda_2)$
3	$N_2 = R_2 \sin \nu_2$
4	$T_2 = -R_2 \cos \nu_2$
5	$N_{21} = T_{12} \sin \psi$
6	$T_{21} = -T_{12} \cos \psi$
7	$N_1 = -N_{21} - F_1 \cos(\zeta_1 - \phi_1)$
8	$T_1 = -T_{21} - F_1 \sin(\zeta_1 - \phi_1)$
9	$M_{R21} = -M_1 - F_1 h_1 \sin(\zeta_1 - \phi_1) - T_{21} l_1$
10	$M_{R12} = -M_{R21}$
11	$M_{R2} = -M_2 - M_{R12} - T_{12} l_2 - F_2 h_2 \sin(\zeta_2 - \phi_2)$

CINCINET	DIADA DE ASPECT 5, VARIANTA 2 (TTR)	planșa 21



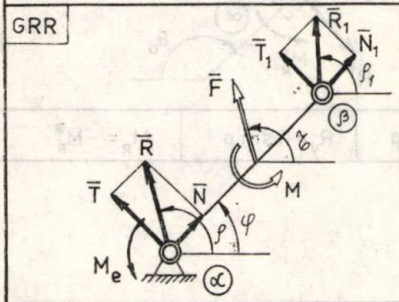
CALCULUL REACȚIUNILOR

1	$T_{21} = -F_1 \cos(\tau_1 - \lambda_1) / \sin \nu_1$
2	$R_1 = T_{21} \cos \nu_1 + F_1 \sin(\tau_1 - \lambda_1)$
3	$N_1 = R_1 \sin \nu_1$
4	$T_1 = -R_1 \cos \nu_1$
5	$N_{12} = -T_{21} \sin \psi$
6	$T_{12} = -T_{21} \cos \psi$
7	$N_2 = -N_{12} - F_2 \cos(\tau_2 - \phi_2)$
8	$T_2 = -T_{12} - F_2 \sin(\tau_2 - \phi_2)$
9	$M_{R12} = -M_2 - F_2 h_2 \sin(\tau_2 - \phi_2) - T_{12} l_2$
10	$M_{R21} = -M_{R12}$
11	$M_{R1} = -M_1 - M_{R21} - T_{21} l_1 - F_1 h_1 \sin(\tau_1 - \phi_1)$

CINCINET	REACȚIUNILE APLICATE ELEMENTELOR CONDUCATOARE	planșa 22
F, M	Forța rezultantă și momentul rezultant ale forțelor exterioare	
R_1^*, M_{R1}^*	Reacțiunea și momentul reacțiunii aplicate diadei conectate în joncțiunea β	

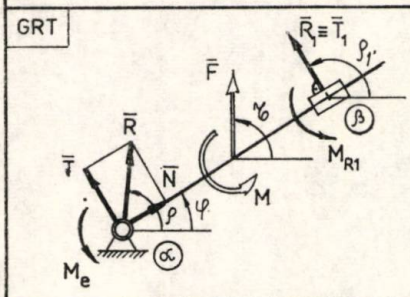
Pentru toate tipurile de elemente conducătoare: $R_1 = R_1^*$, $\rho_1 = \rho_1^* + \pi$, $M_{R1} = -M_{R1}^*$

GRR



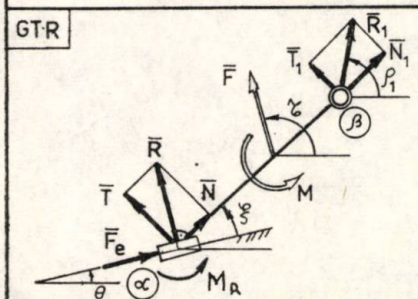
$$N_1 = R_1 \cos(\rho_1 - \varphi)$$
$$T_1 = R_1 \sin(\rho_1 - \varphi)$$
$$N = -N_1 - F \cdot \cos(\gamma - \varphi)$$
$$T = -T_1 - F \sin(\gamma - \varphi)$$
$$M_e = -M - T_1 r - F \cdot h \cdot \sin(\gamma - \varphi)$$

GRT



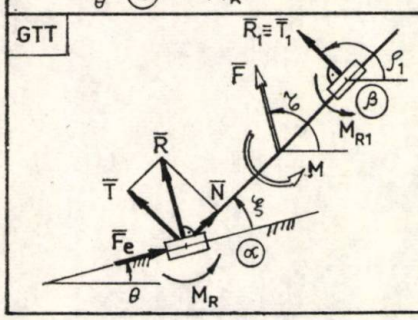
$$T_1 = R_1$$
$$N = -F \cdot \cos(\gamma - \varphi)$$
$$T = -T_1 - F \cdot \sin(\gamma - \varphi)$$
$$M_e = -M - T_1 r^* - F \cdot h \cdot \sin(\gamma - \varphi) - M_{R1}$$

GTR



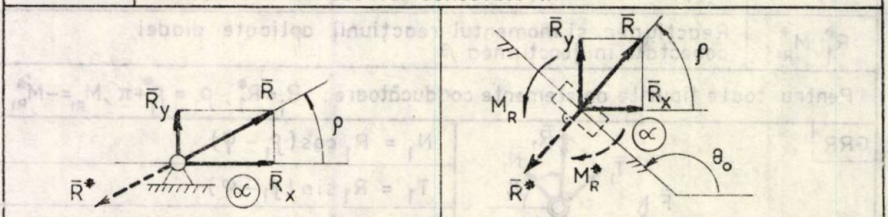
$$N_1 = R_1 \cdot \cos(\rho_1 - \theta - \xi)$$
$$T_1 = R_1 \cdot \sin(\rho_1 - \theta - \xi)$$
$$R = -N_1 \cdot \sin\xi - T_1 \cdot \cos\xi - F \cdot \sin(\gamma - \theta)$$
$$N = R \cdot \sin\xi$$
$$T = R \cdot \cos\xi$$
$$M_R = -M - T_1 \cdot r - F \cdot h \cdot \sin(\gamma - \theta - \xi)$$
$$F_e = -N_1 \cos\xi + T_1 \cdot \sin\xi - F \cdot \cos(\gamma - \theta)$$

GTT



$$T_1 = R_1$$
$$R = -T_1 \cdot \cos\xi - F \cdot \sin(\gamma - \theta)$$
$$N = R \cdot \sin\xi$$
$$T = R \cdot \cos\xi$$
$$M_R = -M - T_1 r^* - M_{R1} - F \cdot h \cdot \sin(\gamma - \theta - \xi)$$
$$F_e = T_1 \cdot \sin\xi - F \cdot \cos(\gamma - \theta)$$

CINCINET	REACȚIUNI APLICATE BAZEI MECANISMULUI	planșa 23
R^*, M_R^*	Reacțiunea și momentul reacțiunii aplicate diadei sau elementului conducător conectate în α	



$R = R^*$	$\rho = \rho^* - \pi$	$R_x = R\cos\rho$	$R_y = R\sin\rho$	$M_R = -M_R^*$

MODELAREA COMPORTĂRII MECANICE A MASIVELOR DE PĂMÎNT ÎN SENSUL TEORIEI CURGERII PLASTICE*)

de ECATERINA BORCIA
Institutul de fizică și tehnologia materialelor

Se prezintă elementele de bază ale teoriei curgerii plastice. Se formulează cadrul ipotetic în care se dezvoltă modelul elastoplastic pentru pămînturi. Se stabilesc forme proprii masivelor de pămînt pentru condiția de ecruisare, criteriul de încărcare - descărcare, relația tensiune-deformație.

În masivele de pămînt deformația plastică apare și este semnificativă de la cele mai mici valori ale încărcării, chiar și în cele mai simple condiții de solicitare.

Studiile experimentale [3, 4] au pus în evidență faptul că la încărcare și descărcare curbele tensiune-deformație sînt diferite, diferența accentuîndu-se cu cît descărcarea se face de la o valoare mai mare a tensiunii. Tot experimental s-a observat că deformația de volum are o parte reversibilă și una remanentă, în timp ce deformația de formă este ireversibilă.

Toate acestea constituie argumente pentru considerarea masivelor de pămînt ca medii elastoplastice și modelarea comportării lor mecanice în acest sens.

1. ELEMENTE FUNDAMENTALE ALE TEORIEI CURGERII PLASTICE

Fie P un punct arbitrar al unui mediu continuu de volum V și suprafață S. Vectorul deplasare în P va avea componentele u_i, starea de deformație în P va fi reprezentată de tensorul deformației de componente ε_{ij}, iar starea de tensiune în P va fi reprezentată de tensorul tensiune de coordonate σ_{ij}. Indicii inferiori vor lua valorile 1, 2 în cazul problemelor bidimensionale și valorile 1, 2, 3 în cazul problemelor spațiale. Indicii inferiori situați după virgulă indică derivarea în raport cu respectivele coordonate ale punctului P. Se folosește convenția Einstein de sumare după indicele mut.

Indiferent de materialul considerat, cîmpurile u_i, ε_{ij}, σ_{ij} trebuie să verifice :

— ecuațiile geometrice :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \tag{1.1}$$

* Lucrarea a fost prezentată la Sesiunea Științifică Jubiliară „Centenarul catedrei de mecanică", Universitatea București, 22—23 apr. 1978.

ST. CERC. MEC., APL,. TOM 38, NR. 6, 1979, P. 863—871

— ecuațiile de echilibru (pentru probleme cvasistatice):

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \text{ în } V, \tag{1.2}$$

— condițiile la limită:

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \text{ pe } S_T, \qquad u_i = U_i \text{ pe } S_U, \tag{1.3}$$

unde $S = S_T \cup S_U$, $S_T \cap S_U = \emptyset$.

Pe lîngă ecuațiile (1.1)—(1.3) cîmpul de stare trebuie să satisfacă și ecuația constitutivă proprie materialului studiat.

Pentru stabilirea ecuațiilor constitutive specifice materialelor elasto-plastice trebuie definite:

a) *o condiție de ecruisare* care generează în spațiul tensiunilor o familie de suprafețe, suprafața inițială corespunzînd limitei de plasticitate din cazul unidimensional (punctul A din fig. 1). Forma generală a condiției de ecruisare [1, 2] este

$$F(\sigma_{ij}, \varkappa) = 0, \tag{1.4}$$

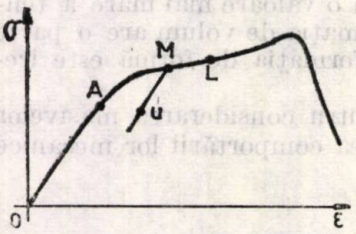


Fig. 1

unde $\varkappa$ este parametrul de ecruisare care depinde în general de deformația plastică și istoria încărcării. Parametrul de ecruisare trebuie să fie pozitiv și crescător în raport cu un parametru cinematic t care permite reperarea stărilor succesive prin care trece materialul în timpul încărcării.

Dacă condiția de ecruisare (1.4) se scrie sub forma

$$f(\sigma_{ij}) = g(\varkappa), \tag{1.5}$$

funcția $g = g(\varkappa)$ trebuie să fie o funcție cu valori pozitive și crescătoare în raport cu parametrul de ecruisare $\varkappa$.

Suprafața generată de condiția de ecruisare în spațiul tensiunilor poartă numele de suprafață de încărcare, de ecruisare sau de curgere și se notează, în general, cu Σ. Această suprafață verifică următoarele condiții:

1. Σ nu trece prin origine (se presupune că deformația plastică se realizează pentru valori nenule ale tensiunii),
2. Σ este convexă (condiție impusă de postulatul de stabilitate al lui Drucker),
3. Σ nu este fixă (în timpul încărcării suprafața se deplasează și își modifică forma descriind o familie de suprafețe ce depind de parametrul de ecruisare $\varkappa$; la un moment fixat al încărcării există o suprafață unică de încărcare care constituie frontiera domeniului elastic la acel moment);

b) un *criteriu de încărcare-descărcare* care să permită determinarea direcției de evoluție a deformării (în cazul unidimensional aceste direcții sînt ML și MU, fig. 1).

Considerînd materialul într-o stare de tensiune în care se verifică ecuația (1.4) pentru o valoare fixată a parametrului de ecruisare, se spune că materialul este supus la un *proces de descărcare* dacă variația stării de tensiune produce doar o variație a deformației elastice. Dacă tensiunea variază de la o stare plastică la alta (pe aceeași suprafață de încărcare) fără ca deformația plastică să varieze, se spune că are loc un *proces de încărcare neutrală*. Dacă variația tensiunii produce o variație a deformației plastice, se spune că are loc un *proces de încărcare activă*.

Condițiile matematice care definesc un proces de descărcare sînt:

$$F(\sigma_{ij},\varkappa) = 0\,;\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} < 0. \tag{1.6}$$

Condițiile matematice pentru un proces de încărcare (activă sau neutrală) sînt:

$$F(\sigma_{ij},\varkappa) = 0\,;\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\,\dot{\sigma}_{ij} \geqslant 0, \tag{1.7}$$

unde punctul suprapus înseamnă derivare în raport cu parametrul cinematic t;

c) *forma generală a relației tensiune-deformație* în orice punct al corpului și la orice stadiu de deformare.

Pentru stabilirea relațiilor tensiune-deformație în cadrul teoriei curgerii plastice se admit următoarele:

— deformația este suma dintre deformația elastică, ε^e_{ij}, și deformația plastică, ε^p_{ij};

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^e_{ij} + \varepsilon^p_{ij} \tag{1.8}$$

— deformația elastică verifică legea Hooke

$$\varepsilon^e_{ij} = D_{ijkl}\,\sigma_{kl}, \tag{1.9}$$

unde D_{ijkl} sînt componentele tensorului coeficienților de rigiditate elastică

$$D_{ijkl} = -\frac{\nu}{E}\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + \frac{1+\nu}{E}\,(\delta_{ik}\,\delta_{jl} + \delta_{il}\,\delta_{jk}), \tag{1.10}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j, \end{cases}$$

E este modulul lui Young,
ν este coeficientul lui Poisson,

— variația deformației plastice verifică condiția de normalitate atașată postulatului de stabilitate dat de Drucker,

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \dot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{1.11}$$

unde funcția F este definită de ecuația (1.4), iar α este o funcție nenegativă care depinde de starea de tensiune, istoria deformării etc.

În aceste ipoteze relațiile tensiune-deformație în cadrul teoriei curgerii plastice vor fi de tip incremental și vor avea următoarea formă generală :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = D_{ijkl}\, \sigma_{kl} + \dot{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}}. \tag{1.12}$$

Particularizarea acestor relații la diferite tipuri de materiale se face prin alegerea formelor specifice pentru coeficienții de rigiditate elastică și pentru funcțiile F și α.

2. APLICAREA TEORIEI CURGERII PLASTICE LA ANALIZA MASIVELOR DE PĂMÎNT CONSIDERATE MEDII ELASTOPLASTICE

Vom modela comportarea mecanică a masivelor de pămînt în sensul teoriei curgerii plastice pornind de la rezultatele obținute de Școala de mecanică a pămînturilor de la Cambridge [3, 4].

Modelul elastoplastic pentru masivele de pămînt se va dezvolta în următoarele ipoteze :

i. Masivele de pămînt sînt considerate medii continue, deformabile, izotrope, stabile în sensul de finit de Drucker.

ii. Granulele solide se presupun incompresibile și antrenarea lor în curgerea lichidului interstițial neglijabilă. Faza lichidă se presupune incompresibilă.

iii. Variația indicelui de pori în timpul compresiunii izotrope respectă legea Terzaghi, Astfel, la încărcare

$$e = e_i - \lambda \ln p\,, \quad e_i = e|_{p=1}, \tag{2.1}$$

iar la descărcare

$$e = e_d - k \ln p, \quad e_d = e|_{p=1}, \tag{2.1'}$$

unde

λ, k sînt constante ce se determină experimental,
p este presiunea normală. medie.

În cadrul acestor ipoteze vom da formele specifice masivelor de pămînt pentru condiția de ecruisare, criteriul de încărcare-descărcare, ecuația constitutivă.

2.1. CONDIȚIA DE ECRUISARE PENTRU MASIVELE DE PĂMÎNT

În lucrările Școlii de mecanică a pămînturilor de la Cambridge se introduce așa numita suprafață de stare limită care separă stările de consolidare normală de stările de supraconsolidare. Pornind de la ecuația acestei suprafețe, propunem următoarea formă a condiției de ecruisare:

$$p + \frac{q^2}{M^2 p} = p_0, \tag{2.2}$$

unde q^2 este al doilea invariant al deviatorului tensorului tensiunii
p_0 — o măsură a deformației plastice,
M — constantă ce se determină experimental,

$$p_0 = \exp\left(\frac{e_i - e}{\lambda}\right). \tag{2.3}$$

Identificînd cu forma generală (1.5) a condiției de ecruisare rezultă

$$f(\sigma_{ij}) = \bar{f}(p,q) = p + \frac{q^2}{M^2 p},$$

$$g(\varkappa) = p_0 = \exp\left(\frac{e_i - e}{\lambda}\right). \tag{2.4}$$

Se observă că funcția $g = g(\varkappa)$ este corect definită satisfăcînd condițiile cerute de ecuația (1.5). În cazul particular al compresiunii izotrope condiția de ecruisare (2.2) se reduce la ecuația dată de Terzaghi pentru consolidarea izotropă (2.1).

În planul (p, q) ecuația (2.2) reprezintă o elipsă de centru $(0, p_0/2)$ și de axe egale cu p_0 și, respectiv Mp_0. În spațiul tensiunilor principale condiția de ecruisare (2.2) definește un elipsoid. Deci sînt îndeplinite condițiile (1,2) ce trebuie satisfăcute de o suprafață de încărcare. Vom demonstra că și cea de-a treia condiție este îndeplinită arătînd că într-un proces activ de încărcare condiția de ecruisare (2.2) este ecuația unei familii de suprafețe de parametru p_0.

Într-un proces de încărcare activă proba trece din starea (e, p, q) în starea (e', p', q'), unde

$$e' = e + \delta e \quad p' = p + \delta p \quad q' = q + \delta q.$$

Valoarea coeficientului de ecruisare pentru starea (e', p', q') va fi

$$p_0' = \exp\left(\frac{e_i - e'}{\lambda}\right). \tag{2.5}$$

Deoarece e' și p' verifică legea Terzaghi (2.1) rezultă

$$\frac{p}{p'} = \exp\left(\frac{\delta e}{\lambda}\right). \tag{2.6}$$

Combinînd relațiile (2.5) și (2.6) se obține :

$$\bar{f}(p', q') = p'_0 = g(\varkappa').$$

Deci în punctul de stare (e', p', q') se verifică o condiție de ecruisare de tipul (2.4), valoarea coeficientului de ecruisare fiind dată de (2.5). În planul (p, q) condiția de ecruisare în punctul (p', q') descrie e elipsă de centru $(0, p'\ p_0/2p)$ și de axe $p'\ p_0/p$ și $Mp'\ p_0/p$.

În general, dacă se notează cu a_n, b_n axele unei elipse arbitrar alese în familia generată de condiția de ecruisare (2.2), se observă următoarele relații de proporționalitate :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{M}\ ;\ \frac{a_n}{a_m} = \frac{b_n}{b_m} = \frac{p_n}{p_m}.$$

Deci, într-un proces activ de încărcare condiția de excruisare propusă definește în planul (p, q) o familie de elipse de axe proporționale, centrul deplasîndu-se pe axa Oq, fiind proprie materialelor cu ecruisare anizotropă [2].

2.2. CRITERIUL DE ÎNCĂRCARE—DESCĂRCARE

Condițiile matematice formulate în § 1.b pentru criteriul de încărcare-descărcare se pot rescrie pentru masivele de pămînt dacă condiția de ecruisare propusă în § 2.1 se scrie sub forma

$$F(\sigma_{ij}, \varkappa) = \bar{F}(p, q, p_0) = 0, \tag{2.4'}$$

unde

$$\bar{F}(p, q, p_0) = p + \frac{q^2}{M^2 p} - p_0. \tag{2.2'}$$

Astfel, condițiile matematice ce definesc un *proces de descărcare* pentru un masiv de pămînt considerat mediu elastoplastic vor fi :

$$p + \frac{q^2}{M^2 p} = p_0\ ;\ \left(1 - \frac{q^2}{M^2 p^2}\right)\dot{p} + \frac{2q}{M^2 p}\dot{q} < 0. \tag{2.7}$$

Procesul de încărcare (activă sau neutrală) pentru un masiv de pămînt considerat mediu elastoplatic va fi definit de condiţiile :

$$p + \frac{q^2}{M^2 p} = p_0 ; \quad \left(1 - \frac{q^2}{M^2 p^2}\right) \dot{p} + \frac{2q}{M^2 p} \dot{q} \geqslant 0. \tag{2.8}$$

Într-un proces de încărcare activă punctul de tensiune trece de la o suprafaţă de încărcare la alta. În planul (p, q) trecerea de la o elipsă la alta se face pe drepte de pantă constantă. Dacă punctul de stare verifică condiţia de ecruisare (2,4'), o variaţie a tensiunii proprie unui proces activ de încărcare (sînt verificate condiţiile (2.8) cu inegalitate strictă în (2.8_2)) va muta punctul de stare pe suprafaţa de încărcare de ecuaţie

$$\bar{F} + \mathrm{d}\bar{F} = 0.$$

2.3. ECUAŢIA CONSTITUTIVĂ PENTRU MASIVELE DE PĂMÎNT

Într-un proces de descărcare deformaţia variază după legea (1.9), iar într-un proces de încărcare activă deformaţia variază după legea (1.12).

Din relaţia (1.10) rezultă că D_{ijkl} depind de coeficientul lui Poisson, ν, şi de modulul lui Young E. Dacă determinarea valorii lui ν pentru un masiv de pămînt nu ridică probleme, determinarea experimentală a valorii modulului lui Young este o chestiune controversată în geotehnie. De aceea se preferă folosirea altor constante a căror determinare experimentală este mai sigură.

Folosind legea Terzaghi pentru descărcare (2.2') obţinem următoarea reprezentare a modulului de compresiune hidrostatică, K_V :

$$K_V = p\,(1 + e_0)/k,$$

unde e_0 este valoarea iniţială a indicelui de pori.

Exprimînd modulul lui Young în funcţie de K_V, rezultă

$$E = 3p\,(1 - 2\nu)\,(1 + e_0)/k. \tag{2.9}$$

Deci, la descărcare se verifică ecuaţia constitutivă (1.9) în care coeficienţii de rigiditate elastică sînt determinaţi de relaţiile (1.10) şi (2.9).

Într-un proces activ de încărcare variază atît deformaţia elastică, cît şi deformaţia plastică, legea de variaţie fiind (1.12). Pentru ca această lege să fie utilizabilă este necesar să se determine atît coeficienţii de rigiditate elastică, cît şi funcţia α. Coeficienţii D_{ijkl} se determină ca şi în cazul încărcării, mai rămîne de rezolvat problema determinării funcţiei α.

Deoarece, în cazul masivelor de pămînt, determinările experimentale sînt dificile şi slab controlate vom prelucra ecuaţia (1.12) pînă la o formă în care să nu mai fie necesară determinarea funcţiei α. Aceasta se poate realiza prin metoda introdusă de Zienkiewicz [5], sub numele de plasticitate asociată, pentru analiza corpurilor elastoplastice cu ajutorul metodei elementului finit.

Ideea de bază a plasticității asociate este realizarea unei forme matriceale a ecuației constitutive în care α să fie necunoscută auxiliară. În cazul nostru această ecuație matriceală se obține atașînd ecuației (1.12) o ecuație care să conțină pe α și pe $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$. O astfel de ecuație se obține diferențiind ecuația (2.4′) și ținînd cont de relațiile (2.2′) și (2.3). Diferențiind ecuația Terzaghi și notînd

$$A = -\dot{p}/\alpha, \tag{2.10}$$

se obține

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \alpha A = 0. \tag{2.11}$$

Scriind matriceal ecuațiile (1.12) și (2.11), rezultă

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \\ \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \alpha \end{Bmatrix}. \tag{2.12}$$

În ecuația matriceală (2.12) s-au folosit notațiile :

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, \dot{\varepsilon}_{23} + \dot{\varepsilon}_{32}, \dot{\varepsilon}_{31} + \dot{\varepsilon}_{13}, \dot{\varepsilon}_{12} + \dot{\varepsilon}_{21}\}^T,$$

$$\{\dot{\sigma}\} = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{33}, \dot{\sigma}_{23} + \dot{\sigma}_{32}, \dot{\sigma}_{31} + \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{12} + \dot{\sigma}_{21}\}^T,$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{23}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{32}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{31}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_{12}} + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{21}}\right\}^T,$$

$$[D] + \{D_{ijkl}\}.$$

În ecuația (2.12) apare o matrice (7,7) simetrică. Inversînd această matrice, se poate scrie

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D]^{-1} & \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\} \\ \left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^T & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{2.13}$$

Ecuația (2.13) permite determinarea valorii funcției α, pentru o stare cunoscută a tensiunii, dacă se cunoaște valoarea lui A.

Pentru determinarea lui A vom nota cu v deformația de volum (primul invariant al tensorului deformației) și ținînd cont că variația in-

dicelui de pori măsoară variația volumului din legea Terzaghi, rezultă

$$\dot{v}^p = \frac{\lambda - k}{1 + e} \frac{\dot{p}}{p} . \tag{2.14}$$

Din condiția de normalitate (1.11) variația deformației de volum este

$$\dot{v}^p = \alpha \frac{\partial F}{\partial p} , \tag{2.15}$$

unde F are forma (2.2′) specifică masivelor de pământ. Deci

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{M^2 p^2 - q^2}{M^2 p^2} . \tag{2.16}$$

Combinînd relațiile (2.10), (2.14), (2.15) și (2.16) se obține valoarea A în funcție de constantele M, λ, k ale masivului de pământ și de valorile la acel moment ale tensiunii și a indicelui de pori :

$$A = \frac{1 + e}{\lambda - k} \frac{M^2 p^2 - q^2}{M^2 p^2} . \tag{2.17}$$

Introducînd (2.17) în ecuația matriceală (2.13) această ecuație este perfect determinată și permite analiza stării de tensiune și deformație dintr-un masiv de pământ prin metoda elementului finit — forma incrementală.

3. CONCLUZII

În articol se aplică teoria curgerii plastice pentru a modela comportarea mecanică a masivelor de pământ.

Au fost prezentate elementele de bază ale teoriei curgerii plastice și a fost formulat cadrul ipotetic în care se dezvoltă modelul elastoplastic pentru un masiv de pământ considerat mediu elastoplastic.

Au fost stabilite ecuațiile specifice pământurilor pentru condiția de ecruisare, criteriul încărcare-descărcare, relațiile tensiune-deformație care permit analiza stării de tensiune și deformație din masivele de pământ prin metoda elementului finit — forma incrementală.

Primită la redacție la 21 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. W. Olszak, P. Perzyna, A. Sawczuk, (sub redacție), *Teoria plasticității*, Edit. tehnică, 1970.
2. L. M. Kachanov, *Fundamentals of the theory of plasticity*, Mir publishers, 1974.
3. K. H. Roscoe, J. B. Burland, *On the generalized stress strain behaviour of „WET" clay*, Cambridge Press, 1968.
4. A. N. Schofield, P. C. Wroth, *Critical state soil mechanics*, McGraw Hill, 1968.
5. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method on engineering science*, McGraw Hill, 1971.

CERCETĂRI PRIVIND DINAMICA PROCESULUI DE INTRODUCERE A MATERIALULUI TUBULAR ÎN SONDĂ

de N. CALOTĂ
Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

În prezenta lucrare este studiată dinamica sistemului elastic cuprinzînd ansamblul instalaţiei de suprafaţă — material tubular — sondă în timpul proceselor de manevră cu particularizarea pentru operaţia de coborîre. Sistemul real este echivalat cu un model mecanic cu parametri distribuiţi liniar neparametric, alcătuit din două mase concentrate reunite printr-o legătură elasto-disipativă cu masă. Modelul mecanic aferent, constînd dintr-o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul trei, este rezolvat prin metoda Bernoulli-Fourier şi cu utilizarea ecuaţiilor Langrange de speţa a II-a, în coordonate generalizate. Rezultatele obţinute permit optimizarea procesului de introducere în sensul micşorării timpului necesar acestuia cu evitarea apariţiei unor fenomene periculoase : avarii la instalaţia de suprafaţă, ruperea materialului tubular sau fisurarea pereţilor sondei.

Studiul dinamicii procesului de introducere urmăreşte determinarea stărilor de mişcare şi efort în elementele sistemului fizic ce participă la acest proces : instalaţie de suprafaţă — material tubular — sondă ($IS - MT - S$).

Din cauza complexităţii constructive a sistemului $IS-MT-S$, în studiu, acesta este înlocuit cu un model mecanic echivalent, acceptîndu-se în acest caz un ansamblu de aproximaţii ce depărtează rezultatele obţinute de realitatea obiectivă.

Încă din 1947 S. Timoshenko [1] sugerează utilizarea unui model mecanic elastic cu parametri distribuiţi pentru studiul dinamicii proceselor de manevră a garniturii de foraj în sondă.

Pînă în prezent, în studiul dinamicii proceselor la care participă materialul tubular, în sondă, au fost utilizate o diversitate de modele mecanice echivalente. Din literatura de specialitate prezentăm cîteva dintre acestea în ordinea complexităţii modelului mecanic echivalent şi în cadrul acesteia, în ordinea cronologică apariţiei lucrărilor.

În figura 1 sînt prezentate modele mecanice elastodisipative cu parametri distribuiţi, modele echivalente materialului tubular sau unor porţiuni din acesta.

Observăm că cercetătorii Z. G. Kerimov şi V.E. Kopylov [2] iau în considerare proprietăţile elastodisipative ale unui amortizor de oscilaţii amplasat deasupra sapei de foraj dar neglijează orice fel de frecări (interne, externe) pentru garnitura de foraj (fig. 1 *a*). Procesul de lucru este cel de foraj propriu-zis.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 6, 1979, P. 873–884

D. J. Shippy [3] studiază modul de propagare a deformației într-o bară încastrată la un capăt, iar la celălalt fiind impus un salt de viteză sau

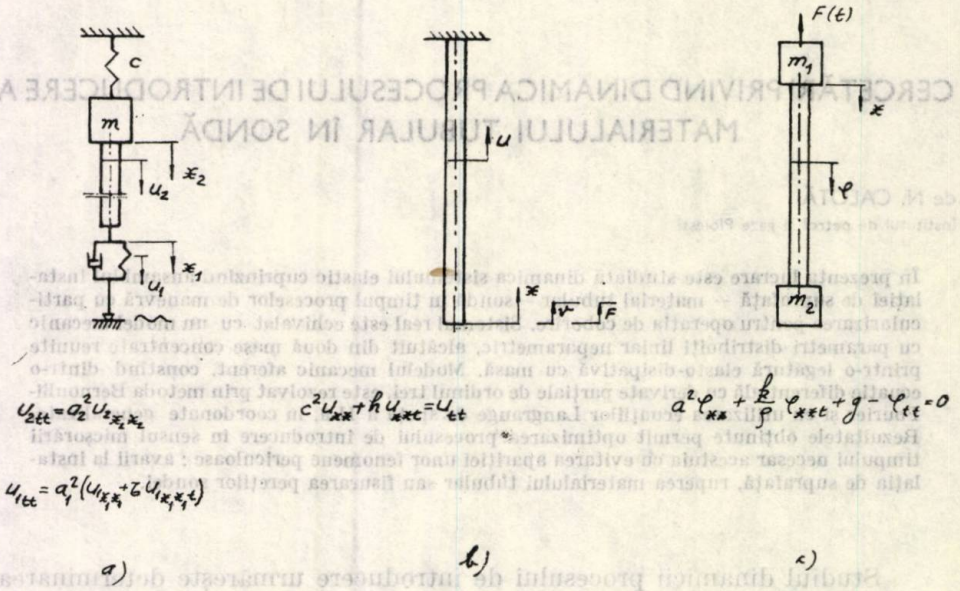


Fig. 1

efort (fig. 1 *b*). Materialul barei este asimilat unui corp viscoelastic de tip Voigt (Kelvin). Sînt neglijate orice fel de frecări externe. Printr-o generalizare a condițiilor limită rezultatele ar putea fi utilizate pentru studiul procesului de introducere a materialului tubular în sondă.

N. Calotă [4], studiind dinamica garniturii de foraj în timpul procesului de introducere, ia în considerare atît frecările interne din materialul acesteia (asimilînd-o cu un model Kelvin) cît și frecările externe vîscoase dintre fluidul de foraj și garnitură considerată ca un rigid (fig. 1 *c*). Este deci neglijată atît influența frecărilor vîscoase externe asupra mișcării oscilatorii, cît și existența frecărilor uscate între garnitura de foraj și elementele sondei.

În figura 2 sînt prezentate modele mecanice elastice echivalente sistemului $IS-MT-S$ în timpul procesului de foraj propriu-zis. Sînt neglijate deci frecările interne dar sînt luate în considerare frecările externe vîscoase și uscate [5] (fig. 2*a*) sau numai cele vîscoase [6, 7] (fig. 2 *b,c*).

Modelele mecanice elastice cu parametri distribuiți în care nu se iau în considerare frecările externe, sînt numeroase, dar datorită gradului mare de aproximare cu care echivalează sistemul real, nu vor fi prezentate mai jos.

În toate modelele mecanice prezentate în figurile 1 și 2, masa și elasticitatea fluidului de foraj sînt neglijate. De asemenea, în modelele mecanice prezentate în figura 1 a și figurile 2, *a*, *b*, *c* perturbația cinematică

a capătului de jos este periodică, ceea ce aduce simplificări importante în rezolvarea modelului matematic al mișcării.

În ceea ce privește modelele mecanice rigide echivalente materialului tubular, remarcăm cercetările efectuate de G. Iordache [8] și A. Lubinski. F.H. Hsu, K.G. Nolte [9].

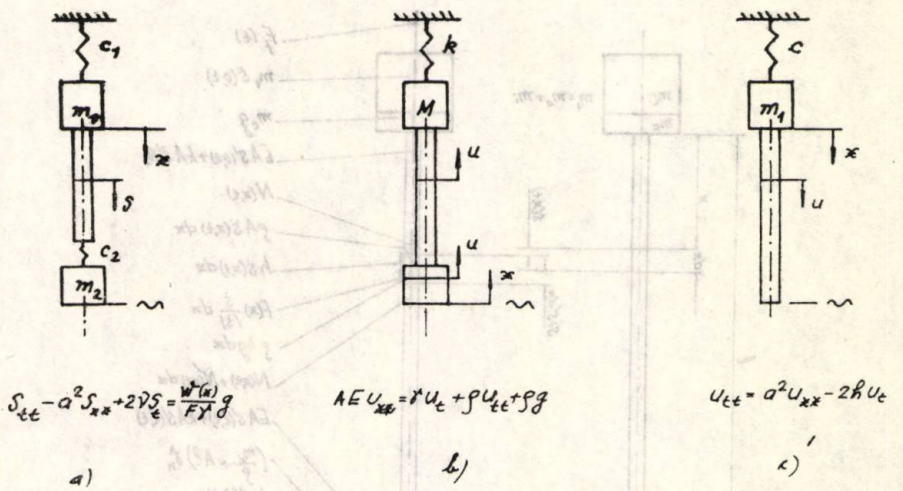


Fig. 2

I. ALCĂTUIREA MODELULUI MECANIC ECHIVALENT SISTEMULUI IS—MT—S

În prezenta lucrare se încearcă studierea dinamicii procesului de introducere, înlocuind sistemul fizic real $IS—MT—S$ printr-un model mecanic alcătuit din două mase concentrate m_1 și m_2 reunite printr-o legătură elastodisipativă cu masă, de secțiune constantă A (fig. 3 *a*). Masa m_1 reprezintă suma între masa ansamblului macara-cîrlig, m_c și masa redusă la cîrlig a elementelor în mișcare situate între acesta și tobă inclusiv, m_i. Masa m_2 este alcătuită din masa prăjinilor grele m_d și masa redusă a fluidului de foraj din sondă, m_n. Legătura elastodisipativă reprezintă materialul tubular (prăjinile de foraj) și este considerată avînd o lege constitutivă corespunzătoare unui corp Kelvin

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + k\,\dot{\varepsilon}(t), \tag{1}$$

unde

$\sigma(t)$ este efortul specific axial;

E — modelul de elasticitate longitudinal;

ε — alungirea;

k — coeficient al frecărilor viscoase interne;

După natura lor, forțele exterioare care acționează asupra elementelor modelului mecanic echivalent pot fi clasificate astfel :

a) forțe de frecare cu fluidul de foraj și pereții sondei, de tip vîscos, $-h\dot{S}(x,t)$ și uscat, $-f(x)\,\dot{S}/|\dot{S}|$ aplicate pe suprafața prăjinilor de foraj și, respectiv, $-h_d\dot{S}(l,t) - f_d\dot{S}/|\dot{S}|$ aplicate pe suprafața prăjinilor grele ;

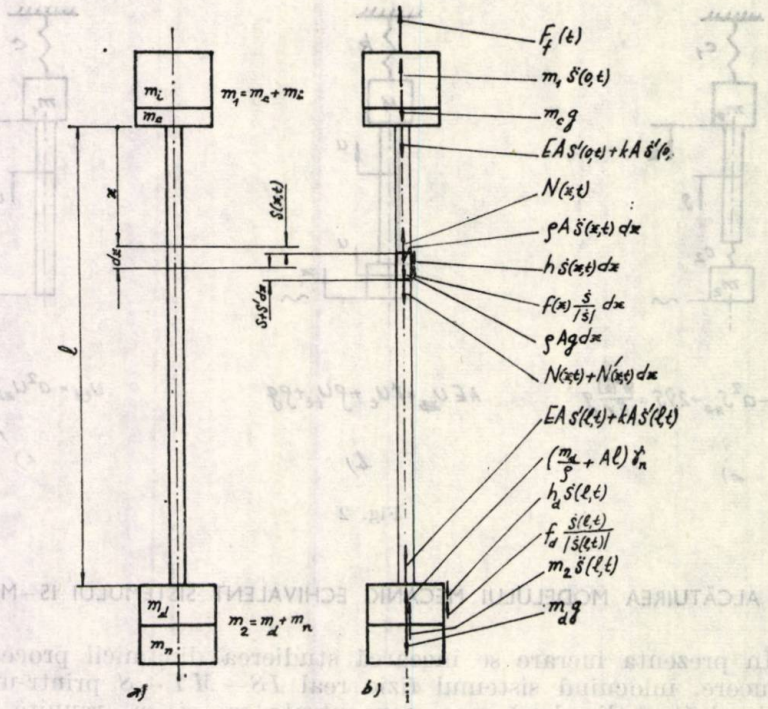


Fig. 3. — *a*) modelul mecanic echivalent ; *b*) forțele externe și eforturile elementelor modelului mecanic echivalent.

b) forțele de greutate ale ansamblului macara-cîrlig, materialului tubular și fluidului de foraj dislocuit ;

c) forța redusă la cîrlig a cuplului dezvoltat de sistemul de frînare, $F_f(t)$.

Printre aproximațiile mai importante, acceptate în cadrul modelului mecanic propus, subliniem următoarele :

— neglijarea elasticității elementelor instalației de suprafață și a fluidului de foraj ;

— neglijarea variațiilor de masă și constantă elastică datorate racordurilor speciale ;

— neglijarea curburii sondei.

Notațiile utilizate în această lucrare sînt cele consacrate în dinamica mașinilor.

II. SCRIEREA ŞI REZOLVAREA MODELULUI MATEMATIC AL MIŞCĂRII

Impunînd condiţia de echilibru dinamic (principiul lui d'Alembert) unui element al materialului tubular cuprins între două secţiuni infinit apropiate (fig. 3. *b*), obţinem

$$\ddot{S}(x,t) - \frac{k}{\rho}\dot{S}''(x,t) - a^2 S''(x,t) = g - \frac{1}{\rho A}\left[h\dot{S}(x,t) + f(x)\frac{\dot{S}(x,t)}{|\dot{S}(x,t)|}\right], \quad (2)$$

în care

$S(x,t)$ este deplasarea secţiunii x la timpul t;

ρ — masa specifică a materialului tubular;

a — viteza de propagare longitudinală a deformaţiei elastice;

A — aria suprafeţei secţiunii transversale a materialului tubular,

$g = 9{,}81\ \text{ms}^{-2}$.

Condiţiile limită vor fi

$$\text{la } x = 0,\ m_1\ddot{S}(0,t) - EA\,S'(0,t) - kA\dot{S}'(0,t) =$$

$$= -h\dot{S}(0,t) - f(0)\frac{\dot{S}(0,t)}{|\dot{S}(0,t)|} - F_f(t) + m_c g,$$

$$\text{la } x = l,\ m_2\ddot{S}(l,t) + EAS'(l,t) + kA\dot{S}'(l,t) = \quad (3)$$

$$= -(h + h_d)\dot{S}(l,t) - [f(l) + f_d]\frac{\dot{S}(l,t)}{|\dot{S}(l,t)|} - \gamma_n\left(\frac{m_p}{\rho} + Al\right) + m_d g,$$

în care γ_n este greutatea specifică a fluidului de foraj.

Condiţiile iniţiale vor fi

$$S(x,0) = \frac{\nu m_d g x}{EA} + \frac{\rho g x(2\nu l - x)}{2E},$$

$$\dot{S}_{t_1=0} = 0; \quad \dot{S}_{t_2=t_3=0} = v_r = \text{const},$$

în care

$$\nu = 1 - \frac{\gamma_n}{\rho g};$$

v_r este viteza de regim la coborîre.

Pentru a studia mișcarea peste starea de deformare sub proprie greutate vom introduce schimbarea de variabilă.

$$S(x, t) = S(x, 0) + u(x, t). \tag{5}$$

Cu această schimbare de variabilă, ecuația (2) devine

$$\ddot{u} - \frac{k}{\rho}\dot{u}'' - a^2 u'' = -\left[h\dot{u} + f(x)\frac{\dot{u}}{|\dot{u}|}\right]\frac{1}{\rho A}. \tag{6}$$

În noua variabilă, condițiile limită (3) devin

$$\text{la } x = 0,\ m_1\ddot{u} - EAu' - kA\dot{u}' = -h\dot{u} - f(x)\frac{\dot{u}}{|\dot{u}|} + F(t), \tag{7}$$

$$\text{la } x = l,\ m_2\ddot{u} + EAu' + kA\dot{u}' = -(h + h_d)\dot{u} - [f(x) + f_d]\frac{\dot{u}}{|\dot{u}|},$$

în care

$$F(t) = F_S - F_f(t) \tag{8}$$

și $F_S = \nu(m_d g + \rho A l g) + m_c g,$

iar condițiile inițiale (4) vor fi

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}_{t_1=0} = 0; \quad \dot{u}_{t_2=t_3=0} = v_r. \tag{9}$$

Soluția ecuației neomogene (6), soluție ce descrie mișcarea modelului mecanic echivalent, se va obține printr-o dezvoltare după formele proprii de oscilație. La rîndul lor, formele proprii de oscilație se vor determina prin rezolvarea formei omogene a ecuației (6):

$$\ddot{u} - \frac{k}{\rho}\dot{u}'' - a^2 u'' = 0. \tag{10}$$

Condițiile la limită omogene vor fi:

$$\text{la } x = 0,\ m_1\ddot{u} - EAu' - kA\dot{u}' = 0, \tag{11}$$

$$\text{la } x = l,\quad m_2\ddot{u} + EAu' + kA\dot{u}' = 0. \tag{12}$$

Pentru rezolvarea ecuației diferențiale omogene (10) vom utiliza metoda separării variabilelor (Bernoulli— Fourier). Astfel soluția va putea fi scrisă sub forma

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \tag{13}$$

Introducînd (13) în (10) obţinem

$$a^2 \frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T + \frac{k}{E}\dot{T}} = -p^2. \tag{14}$$

Funcţiile proprii $X(x)$ se determină din ecuaţia

$$X'' + \frac{p^2}{a^2} X = 0, \tag{15}$$

a cărei soluţie este de forma

$$X = C \cos \frac{p}{a} x + D \sin \frac{p}{a} x. \tag{16}$$

Constantele C şi D se determină din condiţia ca soluţia (16) să verifice condiţiile la limite (11,12). Utilizînd şi (14) obţinem „ecuaţia frecvenţelor" :

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(r+s)}{rs\beta^2 - 1}, \tag{17}$$

unde

$$\beta = \frac{pl}{a}; \quad r = \frac{m_1}{m_0}; \quad s = \frac{m_2}{m_0}; \quad m_0 = \rho A l.$$

Ecuaţia transcendentă (17) are o infinitate de soluţii $\beta_1, \beta_2 \ldots$, $\beta_i, \ldots$ corespunzător cărora obţinem pulsaţi le proprii $p_1, p_2 \ldots p_i \ldots$
Funcţiile proprii (16) devin

$$X_i = C_i P_i \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i}{a} x\right), \; i = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

unde

$$P_i = \sqrt{1 + r^2\beta_i^2} \; ; \; \alpha_i = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{r\beta_i}.$$

Se observă că formele proprii de oscilaţie (descrise de funcţiile proprii) sînt independente de fenomenele disipative.
Forma generală a unei soluţii (13), (modul normal de vibraţie) va fi (în afara unei constante lipsită de importanţă) :

$$u_i = P_i T_i \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right), \tag{19}$$

iar suprapunerea acestora va da soluția generală a ecuației (10) sub forma

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\, T_i \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right). \tag{20}$$

Pentru studiul vibrațiilor forțate, coordonatele principale T_i se pot considera drept coordonate generalizate ale mișcării, $q_i^{(t)}$, [1]. În acest fel expresiile energiilor potențiale, cinetice și funcției de disipare vor fi funcții pătratice de coordonatele sau vitezele generalizate. Deci

$$u_f = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\, q_i \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right). \tag{21}$$

Suprapunînd peste vibrațiile forțate (21) o deplasare $q_0(t)$ a materialului tubular considerat ca un corp rigid, soluția $u(x, t)$ va putea fi reprezentată sub forma

$$u(x, t) = q_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} P_i\, q_i(t) \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right). \tag{22}$$

Coordonatele generalizate $q_0(t)$, $q_i(t)$, se vor determina utilizînd ecuațiile lui Lagrange de speța a II-a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i\,. \tag{23}$$

Energia cinetică a modelului mecanic va fi

$$E_c = \frac{\rho A}{2}\int_0^l \dot{u}^2\,\mathrm{d}x + \frac{m_1}{2}\,\dot{u}^2(0, t) + \frac{m_2}{2}\,\dot{u}^2(l, t) =$$

$$= \frac{M}{2}\dot{q}_0^2 + \frac{\rho A l}{8}\sum_{i=1}^{\infty} L_i \frac{1}{\beta_i}\,\dot{q}_i^2\,, \tag{24}$$

în care

$$M = m_0 + m_1 + m_2\,, \tag{25}$$

$$L_i = 2\beta_i(r^2\beta_i^2 + 1) + (r^2\beta_i^2 - 1)\sin 2\beta_i + 2r\,\beta_i(1 - \cos 2\beta_i). \tag{26}$$

Energia potențială, înmagazinată în elementul elastic prin deformarea datorată oscilațiilor, va fi

$$E_p = \frac{EA}{2}\int_0^l u'^2\,\mathrm{d}x = \frac{EA}{8l}\sum_{i=1}^{\infty} L_i\,\beta_i\,q_i^2\,. \tag{27}$$

Funcţia de disipare (potenţialul forţelor de frecare internă) va putea fi scrisă sub forma

$$D = \frac{kA}{2}\int_0^l \dot{u}'^2\,\mathrm{d}x = \frac{kA}{8l}\sum_{i=1}^{\infty} L_i\,\beta_i\,\dot{q}_i^2. \tag{28}$$

Forţele generalizate de tip neconservativ vor fi

$$Q_0(t) = F(t) - H_0\dot{q}_0 - K_0\,\mathrm{sign}\,\dot{q}_0, \tag{29}$$

în care

$$H_0 = hl + h_d,\quad K_0 = \int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x + f_d$$

şi

$$Q_i(t) = F(t)\,P_i\sin\alpha_i - H_i\,\dot{q}_i - K_i\,\mathrm{sign}\,\dot{q}_i, \tag{30}$$

în care

$$H_i = P_i^2\left[h\int_0^l \sin^2\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right)\mathrm{d}x + h_d\sin^2\left(\alpha_i - \frac{p_i l}{a}\right)\right],$$

$$K_i = P_i\left[\int_0^l f(x)\left|\sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right)\right|\mathrm{d}x + f_d\left|\sin\left(\alpha_i - \frac{p_i l}{a}\right)\right|\right].$$

Luînd în considerare expresiile (24...30), ecuaţiile (23) devin

$$\ddot{q}_0 + \frac{H_0}{M}\dot{q}_0 = \frac{F(t) - K_0\,\mathrm{sign}\,\dot{q}_0}{M}, \tag{31}$$

$$\ddot{q}_i + \frac{k}{E}p_i^2\,\dot{q}_i + p_i^2\,q_i = \frac{4\beta_i}{m_0\,L_i}\,[F(t)\,P_i\sin\alpha_i - H_i\,\dot{q}_i - K_i\,\mathrm{sign}\,\dot{q}_i], \tag{32}$$

unde $i = 1, 2, \ldots$

Pentru procesul de coborîre $\dot{q}_0 > 0$, deci $\mathrm{sign}\,\dot{q}_0 = +1$, iar ecuaţia (31) devine

$$\ddot{q}_0 + \frac{H_0}{M}\dot{q}_0 = \frac{F(t) - K_0}{M}, \tag{31'}$$

cu soluţia

$$q_0(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H_0}{M}\tau}\left\{C_1 + \frac{1}{M}\int_0^\tau [F(\tau^*) - K_0]\,\mathrm{e}^{\frac{H_0}{M}\tau^*}\,\mathrm{d}\tau^*\right\}\mathrm{d}\tau + C_2). \tag{33}$$

Constantele C_1 și C_2 se vor determina utilizînd condițiile inițiale (9) referitoare la mișcarea modelului mecanic ca un solid rigid :

$$C_1 = \dot{q}_0(0); \quad C_2 = q_0(0). \tag{34}$$

Soluția ecuației diferențiale (32) este alcătuită din soluția ecuației omogene, q_{i0}, plus o soluție particulară, q_{ip}, a ecuației neomogene

$$q_i = q_{i0} + q_{ip} \tag{35}$$

Cu ușurință se calculează

$$q_{i0} = e^{-n_i^* t}(A_i \cos p_i^* t + B_i \sin p_i^* t), \tag{36}$$

$$q_{ip} = \frac{1}{p_i^{**}} \cdot \frac{4\beta_i}{m_0 L_i} \int_0^t [F(\tau) P_i \sin \alpha_i - K_i \operatorname{sign} \dot{q}_i] \, e^{-n_i^{**}(t-\tau)} \sin p_i^{**}(t-\tau) \, d\tau, \tag{37}$$

în care

$$n_i^* = \frac{k p_i^2}{2E}; \quad p_i^* = \sqrt{p_i^2 - n_i^{*2}}, \tag{38}$$

$$n_i^{**} = \frac{1}{2}\left[\frac{k p_i^2}{E} + \frac{4\beta_i H_i}{m_0 L_i}\right], \quad p_i^{**} = \sqrt{p_i^2 - n_i^{**2}}. \tag{39}$$

Pentru ca vibrațiile să existe efectiv, este necesar ca pulsațiile p_i^{**} să fie reale, deci

$$n_i^{**} < p_i \, . \tag{40}$$

Ordinul maxim al pulsațiilor proprii, i_{max}, obținut din (40) este un număr finit. Concluzia este următoarea : numărul gradelor de libertate, al unui sistem elastodisipativ cu parametri distribuiți, este finit.

Soluția generală (21) va fi

$$u_f(x,t) = \sum_{i=1}^{i_{max}} P_i \, q_{i0}(t) \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right) + \sum_{i=1}^{i_{max}} P_i \, q_{ip} \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right). \tag{41}$$

Primul termen al membrului din dreapta al egalității (41) reprezintă vibrațiile libere amortizate. Observăm că expresia lor se putea obține și din (14) și (20). Al doilea termen al membrului drept reprezintă vibrațiile forțate amortizate ale materialului tubular sub acțiunea forțelor exterioare.

Constantele A_i și B_i din expresia vibrațiilor libere amortizate se determină impunînd expresiei (20)

$$u_0(x,t) = \sum_{i=1}^{i_{max}} P_i \, e^{-n_i^* t}(A_i \cos p_i^* t + B_i \sin p_i^* t) \cdot \sin\left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a}\right)$$

să verifice condițiile

$$u_0(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{u}_0(x, 0) = f_2(x). \tag{42}$$

Funcțiile $f_1(x)$ și $f_2(x)$ reprezintă deplasările, respectiv vitezele existente la $t = 0$, peste deplasările și vitezele secțiunilor garniturii considerată ca un corp rigid.

Utilizînd proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii se va obține

$$A_i = \frac{1}{P_i R_i} \int_0^l f_1(x) \sin \left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a} \right) \mathrm{d}x, \tag{43}$$

$$B_i = \frac{1}{p_i^*} \left[n_i^* A_i + \frac{1}{P_i R_i} \int_0^l f_2(x) \sin \left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a} \right) \mathrm{d}x \right], \tag{44}$$

unde

$$R_i = \frac{l}{2} + \frac{a}{4p_i} \left[\sin 2 \left(\alpha_i - \frac{p_i l}{a} \right) - \sin 2\alpha_i \right]. \tag{45}$$

Soluția generală a ecuației diferențiale (2), reprezentînd expresia analitică a deplasărilor elementelor modelului echivalent $IS-MT-S$ în timpul procesului de introducere, se obține (4, 5, 22, 33, 35, 36, 37, 41) sub forma:

$$S(x,t) = \frac{\nu m_a g x}{EA} + \frac{\rho g x (2\nu l - x)}{2E} +$$

$$+ \int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{H_0}{M}\tau} \left\{ C_1 + \frac{1}{M} \int_0^\tau [F(\tau^*) - K_0] \, \mathrm{e}^{\frac{H_0}{M}\tau^*} \mathrm{d}\tau^* \right\} \mathrm{d}\tau + C_2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i_{\max}} P_i \, \mathrm{e}^{-n_i^* t} (A_i \cos p_i^* t + B_i \sin p_i^* t) \sin \left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i_{\max}} P_i \frac{4\beta_i}{m_0 L_i p_i^{**}} \sin \left(\alpha_i - \frac{p_i x}{a} \right) \cdot \int_0^t [F(\tau) P_i \sin \alpha_i - K_i \operatorname{sign} \dot{q}_i(\tau)] \times$$

$$\times \mathrm{e}^{-n_i^{**}(t-\tau)} \sin p_i^{**} (t - \tau) \, \mathrm{d}\tau. \tag{46}$$

Starea de eforturi axiale în materialul tubular (1) va fi

$$N(x, t) = EA \, S'(x, t) + kA \, \dot{S}'(x, t). \tag{47}$$

Efortul specific în ramurile cablului are expresia

$$\sigma(t) = \frac{1}{2zA_n}\,[N(0, t) - m_c\ddot{S}(0, t)], \tag{48}$$

în care z și A_n reprezintă numărul de role la macara, respectiv, aria netă a secțiunii transversale a cablului.

Presiunea hidrodinamică are valoarea

$$p(t) = -\frac{1}{A_s}\,[N(l, t) + m_d\ddot{S}(l, t)], \tag{49}$$

în care A_s este aria transversală maximă a sapei de foraj.

Expresiile (47, 48, 49) precizează starea de eforturi în elementele modelului echivalent sistemului $IS-MT-S$ în timpul procesului de introducere.

Primită la redacție la 28 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, *Théorie des vibrations*, Librairie polytechnique Ch. Béranger, Paris et Liége, 1947.
2. Z. G. Kerimov, V. E. Kopylov, *Issledovanie gasenija vibrogasitem kolebanij buril'noj kolonny*, Neft'i gaz, *4*, (1971).
3. D. J. Shippy *Wave propagation in finite rods of Voigt material*, Journal of applied mechanics, ASME, *3*, 1976, New York.
4. Calotă, N. *Dinamica garniturii de foraj în timpul procesului de introducere în sondă*, Mine petrol și gaze, *11—12* (1976).
5. S. G. Kalinin, *O neobhodimosti primenenija uprugugo kompensatora v buril-noj kolonna*, Neft'i gaz, *12*, (1963).
6. D. W. Dareing, B. J. Liversay, *Longitudinal and angular drill-string vibrations with damping*, Konstruirovanie i tennologja masinostroenie, *4* (1968).
7. Z. G. Kerimov, M. A. Sadyhov, *Issledovanie prodol'nyh kolebanij kolonny buril'nyh trub priburenii*, Neft'i gaz, *9* (1971).
8. G. Iordache, *Presiunile suplimentare care apar în procesul de foraj*, C.D.I.C.P., București, 1968.
9. A. Lubinski, F. H. Hsu, K. G. Nolte, *Transient pressure surges due to pipe movement in an oil well*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, *3* (1977).

CRITERII ŞI METODE PENTRU CALCULUL CORPURILOR PREVENITOARELOR DE ERUPŢIE ORIZONTALE DUBLE

de N. POSEA, N. TATU, GH. ZECHERU, AL. ANGHEL, GH. HOTEA
Institutul de petrol şi gaze, Ploieşti

Pe baza criteriilor constructive, tennologice şi de rezistenţă, lucrarea fundamentează o metodă pentru predimensionarea şi verificarea rezistenţei corpurilor prevenitoarelor de erupţie orizontale duble.
Metoda de calcul elaborată s-a aplicat pentru un timp curent de prevenitor care a fost încercat experimental. Datele experimentale confirmă în mod satisfăcător rezultatele teoretice, ceea ce constituie o verificare concludentă a algoritmului stabilit.
Ţinînd seama de defectele care apar la turnarea corpurilor prevenitoarelor, se prezintă, de asemenea, o metodologie de calcul bazată pe criteriile mecanicii ruperii.
Rezultatele obţinute au permis formularea unor propuneri pentru optimizarea dimensiunilor prevenitoarelor analizate.

Prevenitoarele de erupţie orizontale duble au în prezent o largă răspîndire. De comportarea lor în funcţionare este legată în mare măsură siguranţa instalaţiilor de foraj.

Corpurile acestor tipuri de prevenitoare au forme constructive deosebit de complexe. Din această cauză, în literatura de specialitate sînt puţine lucrări care se ocupă de calculul acestor corpuri şi majoritatea dintre acestea adoptă scheme mult prea simplificate, ceea ce face ca soluţiile obţinute să nu corespundă cu datele experimentale.

În lucrarea de faţă autorii prezintă o sinteză a cercetărilor întreprinse şi a rezultatelor obţinute privind fundamentarea unor metode corespunzătoare de proiectare şi calcul de rezistenţă a corpurilor prevenitoarelor de erupţie orizontale duble.

1. CRITERII PENTRU DIMENSIONAREA CORPURILOR PREVENITOARELOR DE ERUPŢIE ORIZONTALE DUBLE

În urma studiilor întreprinse în lucrările [2]—[6] se desprinde faptul că pentru dimensionarea corectă a corpurilor prevenitoarelor de erupţie orizontale duble este necesară o corelare a cerinţelor şi restricţiilor impuse de criteriile constructiv-funcţionale, tehnologice şi de rezistenţă.

Criteriul constructiv funcţional conduce la stabilirea dimensiunilor generale ale corpului prevenitorului şi ţine seama de :

— tipodimensiunea acestuia (diametrul nominal al prevenitorului, ce corespunde cu diametrul maxim de trecere a garniturii de foraj), [1];

— dimensiuni impuse de necesităţile de asamblare ale corpului cu celelalte elemente componente ale prevenitorului (bacuri, sertare etc.),[1];

— existenţa unor restricţii dimensionale privind înălţimea corpului prevenitorului, dictate de distanţele de montaj impuse de diversele scheme de amplasare a prevenitoarelor la gura sondei [1].

Criteriul tennologic depinde de procedeul tennologic de realizare-turnare şi conduce la:

— existenţa unor restricţii privind grosimea minimă a pereţilor [7], [8] funcţie de parametrul V, definit de relaţia

$$V = \frac{2L + B + H}{3}, \tag{1}$$

unde L, B, H sînt dimensiunile principale de gabarit (fig. 1.1); pentru $V = 1, \ldots 2$, corespund valori ale grosimilor minime admise ale pereţilor de 12,... 20 mm (cazul corpurilor de prevenitoare);

— existenţa unor restricţii, impuse de realizarea în condiţii calitative corespunzătoare a corpului turnat din oţel, privind distanţele între nervurile aşezate în eşichier pe pereţii laterali ai corpului şi dimensiunile nervurilor în raport cu grosimea peretelui (cazul corpurilor de prevenitoare cu pereţi nervuraţi, care se fabrică în prezent în ţara noastră). Aceste restricţii se formulează prin relaţiile, [7]:

$$5a \geqslant c \geqslant 1{,}5a\,;\ h_1 \leqslant 5h\,;\ 1{,}04h \leqslant s \leqslant 1{,}25\,h\,;\ 0{,}4h \leqslant a \leqslant h \tag{2}$$

unde a, c, h, s, h_1, au semnificaţiile din figura 1.2.

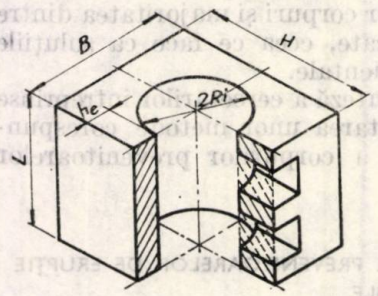


Fig. 1.1

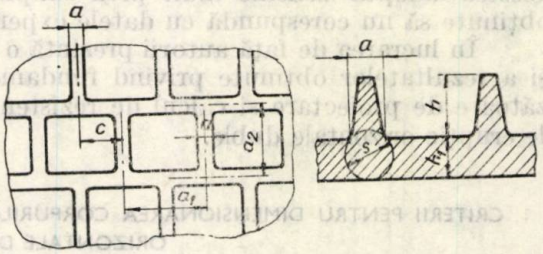


Fig. 1.2

Criteriul rezistenţei corpului de prevenitor este criteriul de bază în ceea ce priveşte stabilirea grosimilor minime de pereţi ai acestuia, în condiţiile unei siguranţe depline în exploatare.

Calculul de rezistenţă al corpului de prevenitor orizontal dublu comportă trei etape:

— calculul preliminar de rezistenţă, prin care se definesc dimensiunile de bază ale corpului de prevenitor corelat cu datele puse la dispoziţie de criteriile: constructiv-funcţional şi tehnologic.

— determinarea stării de tensiuni din corpul prevenitorului, etapă de verificare care decide asupra valabilității datelor precizate în prima etapă (etapa de dimensionare) și prin care se definitivează configurația geometrico-dimensională.

— verificări de rezistență bazate pe teoria mecanicii ruperii.

Calculul de rezistență al corpului de prevenitor se face pentru situația cea mai defavorabilă de solicitare, care este proba de rezistență la presiune.

Pentru calculul preliminar de rezistență corpul prevenitorului orizontal dublu se schematizează la un tub cu pereți groși, supus la presiune interioară (fig. 1.3). Starea de tensiune cea mai defavorabilă este la suprafața interioară unde eforturile unitare principale sînt date de relațiile :

$$\sigma_r = -p\,;\quad \sigma_t = p\,\frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\,;\quad \sigma_l = p\,\frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\,, \tag{3}$$

unde

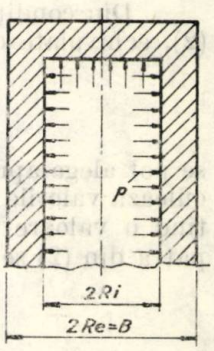


Fig. 1.3

σ_r este efortul unitar normal pe direcția radială ; σ_t — efortul unitar normal pe direcția tangențială (circumferențială), σ_l — efortul unitar normal pe direcția longitudinală ; p, R_i, R_e rezultă din figura 1.3.

Conform teoriei de rezistență a energiei potențiale de deviație, rezultă relația de dimensionare :

$$(K^2 - 1)^2 - 3\left(\frac{p}{\sigma_a}\right)^2 = 0, \tag{4}$$

în care $K = \dfrac{R_i}{R_e}$, $k < 1$, iar $\sigma_a = \dfrac{\sigma_c}{c}$ reprezintă efortul unitar admisibil al materialului obținut prin împărțirea limitei de curgere la coeficientul de siguranță c.

Cunoscînd valoarea raportului $K = R_i/R_e$ dedusă cu ajutorul relației (4) și ținînd seama că valoarea lui R_i este totdeauna precizată ca dată de bază pentru proiectare (jumătate din diametrul maxim de trecere a garniturii de foraj), se deduce valoarea lui R_e și apoi a grosimii echivalente h_e (fig. 1.1, fig. 1.3).

După corelarea datelor celor trei etape descrise anterior (analiza constructiv-funcțională, calculul preliminar de dimensionare la condiția de rezistență, analiza tehnologică), se trece la etapa de stabilire a elementelor dimensionale pentru pereții nervurați : h, h_1, a, c, a_1 (fig. 1.2).

Se scrie condiția de echivalență a rigidităților la încovoiere pentru pereții fără nervuri (așa cum s-a considerat în calculul de rezistență preliminar) și a pereților nervurați (așa cum se execută în realitate), [4], [9] :

$$\frac{Eh_e^3}{12\,(1-\mu^2)} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} + \frac{E}{a_1}\,\frac{ah_1^3}{12} + \frac{E}{a_1}\,\frac{ah_1(h_1+h)^2}{4}\,, \tag{5}$$

unde E și μ sînt constantele elastice ale materialului (modulul de elasticitate longitudinală și, respectiv, coeficientul lui Poisson).

Considerînd $\mu = 0{,}3$ și operînd substituțiile :

$$K_1 = \frac{a}{a_1}\ ;\ K_2 = \frac{h_1}{h}\ ;\ X = \frac{h_e}{h}, \tag{6}$$

relația (5) devine :

$$X^3 = 1 + 0{,}91\ K_1\ K_2^3 + 2{,}73 K_1 K_2\ (K_2 + 1)^2. \tag{7}$$

Din condițiile de natură tehnologică descrise de primele două relații (2), echivalate cu

$$\frac{1}{10} \leqslant K_1 \leqslant \frac{1}{3}\ ;\ 0 \leqslant K_2 \leqslant 5, \tag{8}$$

se pot alege aprioric, diferite combinații K_1, K_2 cu ajutorul cărora se calculează valorile raportului X. Cunoscînd valorile lui X, K_1, K_2, K_e și adoptînd o valoare pentru dimensiunea a, care să îndeplinească condiția a patra din (2) se obțin dimensiunile :

$$h = \frac{h_e}{X}\ ;\ h_1 = h\ K_2\ ;\ a_1 = \frac{a}{K_1}. \tag{9}$$

Pe baza acestor criterii și relații de calcul, în lucrările [5], [6] se prezintă un algoritm detaliat pentru determinarea tuturor dimensiunilor corpului prevenitorului orizontal dublu (fig. 1.4).

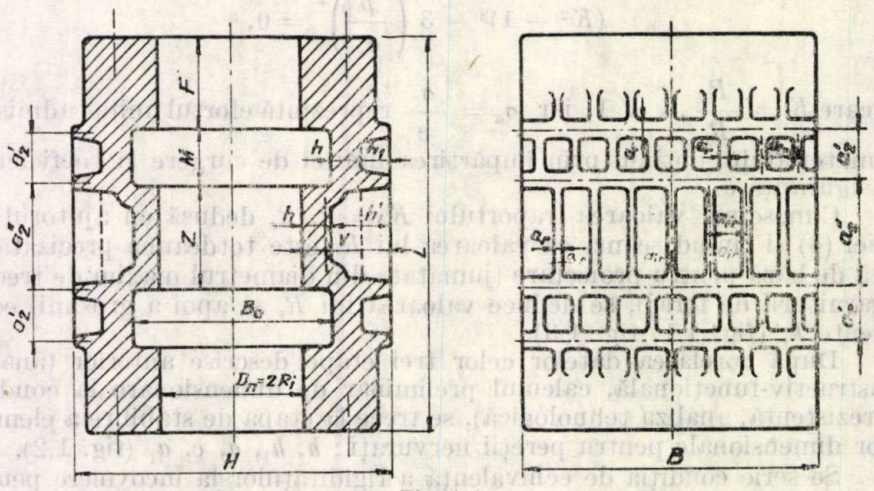


Fig. 1.4

2. DETERMINAREA STĂRII DE TENSIUNI DIN CORPURILE PREVENITOARELOR DE ERUPȚIE ORIZONTALE DUBLE

Configurația geometrică deosebit de complicată a corpului prevenitorului orizontal dublu [1] (fig. 1.3) face ca determinarea reală a stării de tensiuni pentru situația de exploatare sau de probă a acestuia să fie dificilă.

În cele ce urmează se prezintă o metodologie pentru determinarea pe cale analitică a stării de tensiuni din corpul prevenitorului orizontal dublu.

Schematizarea adoptată este prezentată în figura 2.1, din care rezultă descompunerea corpului prevenitorului în următoarele substructuri : corpul tubular de legătură al casetelor pentru bacuri T, și casetele prismatice ale bacurilor C_1 și C_2.

Pentru cele două tipuri de substructuri se consideră următoarele scheme de calcul :

a) Corpul tubular T se ia împreună cu plăcile inelare ale casetelor, încastrate la conturul exterior (fig. 2.2).

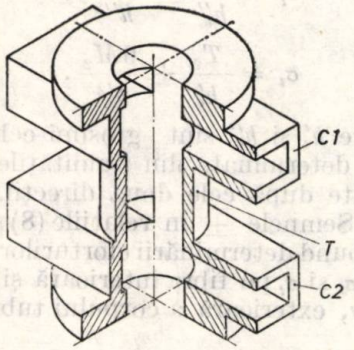


Fig. 2.1

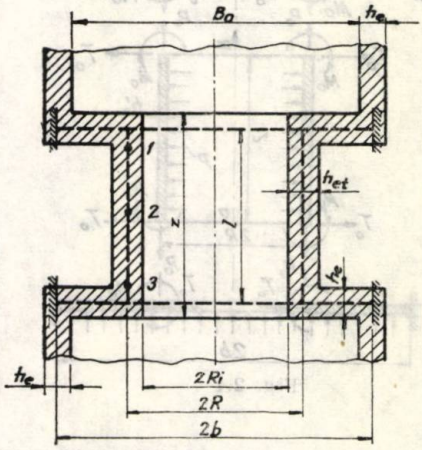


Fig. 2.2

Sistemul de sarcini al acestei substructuri se compune din presiunea interioară de probă a corpului prevenitorului și din forțele rezultante a acțiunii presiunii de probă pe capacele de obturare a orificiului tubular de trecere al garniturii de foraj.

b) Casetele pentru bacuri C_1 și C_2 constituie niște cutii prismatice închise (fig. 2.3), acționate la interior de către presiunea de probă. Se presupune că flanșele oarbe (capacele), ce închid orificiile frontale de pătrundere a bacurilor, fac corp comun cu casetele, astfel că legăturile dintre ele și pereții casetelor se consideră de aceeași natură cu legăturile existente între peretele superior, respectiv inferior (plăcile I — fig. 2.3) și pereții laterali ai acestora (plăcile III).

În locul plăcilor plane și curbe nervurate (fig. 1.3) se consideră în calcul plăci de grosimi constante (izotrope) [9], [12], echivalente din punct de vedere al rigidității la încovoiere. Determinarea acestora se face cu ajutorul relațiilor (6) și (7).

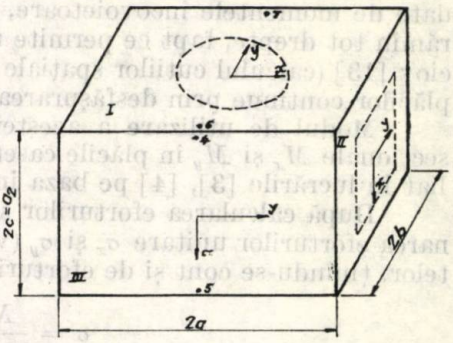


Fig. 2.3

2.1. DETERMINAREA TENSIUNILOR ÎN SUBSTRUCTURA *T*

Se consideră legăturlle dintre corpul tubular cu plăcile inelare drept încastrări elastice (fig. 2.4) şi se determină necunoscutele M_0 şi T_0 prin aplicarea metodei eforturilor de la rezolvarea sistemelor static nedeterminate [3], [5].

După stabilirea necunoscutelor M_0 şi T_0 se determină expresia deplasării radiale w a corpului tubular [3] şi apoi eforturile secţionale M_1, T_1 (pe direcţia longitudinală) şi M_2, T_2 (pe direcţie circumferenţială [3]).

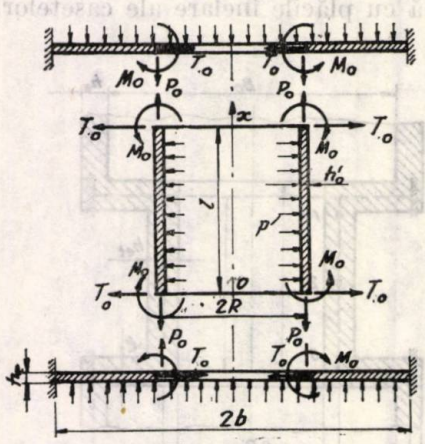


Fig. 2.4

Eforturile unitare σ_l (în direcţie longitudinală) şi σ_t (în direcţie tangenţială) în diferite zone ale corpului tubular sînt date de relaţiile :

$$\sigma_l = \frac{T_1}{h_e''} \pm \frac{6M_1}{h''^2}, \tag{8}$$

$$\sigma_t = \frac{T_2}{h_e'} \pm \frac{6M_2}{h_e'^2}, \tag{9}$$

în care h_e' şi h_e'' sînt grosimi echivalente determinate din rigidităţile exprimate după cele două direcţii.

Semnele $\pm$ în relaţiile (8) şi (9) corespund determinării eforturilor unitare σ_l şi σ_t pe fibra interioară şi, respectiv, exterioară a corpului tubular.

2.2. DETERMINAREA EFORTURILOR UNITARE ÎN CASETELE PENTRU BACURI (C_1, C_2)

Schema de calcul prezentată anterior consideră casetele preventorului ca pe nişte cutii, de formă paralelipipedică, solicitate de o sarcină uniform distribuită la interior, avînd intensitatea egală cu valoarea presiunii de probă. Se admite că aceste cutii paralelipipedice au muchii rigide, adică elementele plăcilor din vecinătatea unei muchii se rotesc cu acelaşi unghi (unghi ce se modifică însă continuu pe lungimea muchiei).

Considerîndu-se că deformaţiile plăcilor casetelor sub acţiunea eforturilor secţionale din planul lor se pot neglija în comparaţie cu deformaţiile date de momentele încovoietoare, rezultă că în urma solicitării muchiile rămîn tot drepte, fapt ce permite utilizarea metodei de calcul a lui Lihaciov [13] (calculul cutiilor spaţiale cu metodele corespunzătoare rezolvării plăcilor continue prin desfăşurarea plană a acestora).

Modul de utilizare a acestei metode la determinarea momentelor secţionale M_x şi M_y în plăcile casetelor pentru bacuri este prezentat detaliat în lucrările [3], [4] pe baza indicaţiilor din [13].

După calcularea eforturilor secţionale M_x şi M_y se trece la determinarea eforturilor unitare σ_x şi σ_y (vezi fig. 2.3) în punctele critice ale casetelor, ţinîndu-se cont şi de eforturile axiale cu relaţii de forma

$$\sigma = \frac{N}{h_e} \pm \frac{6M}{h_e^2}. \tag{10}$$

2.3. DETERMINĂRI TEORETICE ȘI EXPERIMENTALE A TENSIUNILOR PENTRU CORPUL PREVENITORULUI TIP *DF* 13 5/8×350

Pentru corpul prevenitorului *DF* 13 5/8×350 care se fabrică la întreprinderea „1 Mai" Ploiești, s-au calculat eforturile unitare din punctele caracteristice prin metoda analitică propusă [6]. În tabelul 2.1 se dau mărimile care intervin în calculul pentru corpul prevenitorului *DF* 13 5/8×350.

Tabelul 2.1

Denumirea dimensiunii măsurate sau calculate	Relația de calcul	Valoarea	U.M.	Observații
h	desen exec.	75	mm	Cu relațiile 6 ;7 rezultă :
a_r	măsurată	27	mm	
a'_r	măsurată	35	mm	
a_{1r}	măsurată	108	mm	
a'_{1r}	măsurată	114	mm	$k_1 = 0{,}31$
h_1	măsurată	60	mm	$k_2 = 0{,}8$
h'_1	măsurată	142	mm	$h = 75$ mm
Z	măsurată	260	mm	
R_i	măsurată	174	mm	$k_1 = 0{,}25$
B_a	măsurată	510		$k_2 = 1{,}90$
grosimea plăcii I (fig. 2.3) h_1	rezultată	135	mm	$h = 75$ mm
2 *a*	rezultată	800	mm	$k_1 = 0{,}11$
2 *b*	rezultată	600	mm	$k_2 = 0{,}8$
2 c	rezultată	300	mm	$h = 75$ mm
gros.echiv. h_{IIIe}	relația 6 ;7	108	mm	
gros.echiv. h''_e	relația 6 ;7	100	mm	
gros. echiv. h''_e (în rel. de calcul a efort. unitare)	relația 6 ;7	90	mm	
l	$l = z - h_e$	148	mm	
R	$R = R_i + 0{,}5\, h'_e$	264	mm	
b	$b = 0{,}5\,(B_a + h_e)$	311	mm	
V (grosime în relațiile de calcul a efort. unitare)	$V = 0{,}5\, H - R_i$	216	mm	

Pentru a se verifica măsura în care schema de calcul folosită conduce la eforturi unitare reale, s-au efectuat și măsurători experimentale prin metoda tensometriei electrorezistive [6].

În tabelele 2.2 și 2.3 se dau rezultatele pentru punctele cele mai solicitate ale celor două tipuri de substructuri adoptate, în cazul încărcării cu presiunea de probă $p = 700$ daN/cm².

Tabelul 2.2

	Punctul fig. 2.2	Efort unitar σ daN/cm²			
		σ_l		σ_t	
		int.	ext.	int.	ext.
Calculat	1.3	−607	1367	−1,6	132
	2.	−538	1298	1671	1308
Măsurat	2.	−70,8	1645	1648	1238

Tabelul 2.3

	Punctul fig. 2.3.	Efort unitar σ daN/cm²			
		σ_x		σ_y	
		int.	ext.	int.	ext.
Calculat	4.5	3330	−2472	1600	−116
	6.7	1700	−420	3200	−2300
Măsurat	4.5	3613	—	—	—

Din tabele rezultă că efortul unitar maxim, obţinut prin calcul, se află la interiorul corpului, punctele (4), (5), unde $\sigma_x^{max} = 3330$ daN/cm² şi $\sigma_n = -p = -700$ daNcm². Aplicînd teoria de rezistenţă a eforturilor unitare tangenţiale maxime, rezultă $\sigma_{ech} = 4030$ daN/cm².

Experimental, în acelaşi punct, se obţine $\sigma_x = 3613$ daN/cm², ceea ce conduce la $\sigma_{ech} = 4313$ daN/cm².

Din compararea datelor experimentale cu cele teoretice, se poate aprecia că metoda analitică de calcul folosită este corespunzătoare. Unele abateri se explică prin aproximările introduse de folosirea grosimilor echivalente.

3. VERIFICĂRI DE REZISTENŢĂ BAZATE PE TEORIA MECANICII RUPERII LA CORPURILE PREVENITOARELOR ORIZONTALE DUBLE

Mecanica ruperilor consideră materialele în forma lor reală, adică prezentînd defecte (de tip fisură) de diferite forme şi dimensiuni şi foloseşte ipoteza prin care capacitatea portantă a unei piese este determinată de comportarea zonelor sale critice, în care se manifestă influenţa acestor defecte.

Pentru a descrie comportarea unui material faţă de apariţia procesului de rupere, mecanica ruperii foloseşte o serie de parametrii sintetici cum ar fi :

K_i — factorul de intensitate a eforturilor unitare la vîrful unui defect de tip fisură, care reprezintă o caracteristică a distribuţiei eforturilor unitare din vecinătatea vîrfului fisurii în timpul iniţierii şi propagării acesteia. Pentru un defect de o anumită configuraţie, într-o piesă solicitată de un sistem de sarcini exterioare, se poate determina, prin metodele clasice ale teoriei elasticităţii, valoarea corespunzătoare a parametrului K_i. Pentru ca într-o piesă prezentînd un defect să nu se producă ruperea, este necesar ca parametrul K_i la vîrful acestuia să aibă o valoare inferioară unui parametru critic, propriu materialului din care este confecţionată piesa, numit factor critic de intensitate a tensiunilor K_c. Rezultă deci condiţia de proiectare sau verificare a unei piese pe baza conceptelor mecanicii ruperilor sub forma $K_i < K_c$, pentru orice defect conţinut în piesă. Valoarea factorului K_c este o caracteristică de material ce se poate determina prin încercări pe epruvete, în anumite condiţii standardizate (de exemplu la noi în ţară STAS 9760—74).

DVF — deplasarea de deschidere la vîrful unui defect de tip fisură reprezintă o măsură a aptitudinii defectului de a se deschide fără a produce amorsarea ruperii. Pentru un defect, o anumită configuraţie, într-o piesă solicitată de un sistem de sarcini exterioare, se poate determina, prin metodele clasice ale teoriei elasticităţii şi plasticităţii, valoarea corespunzătoare a parametrului *DVF*. Pentru ca, într-o piesă prezentînd un defect, să nu se producă ruperea, este necesar ca parametrul *DVF* să aibă o valoare inferioară unui parametru critic, propriu materialului din carc este confecţionată piesa, numit deplasarea critică de deschi-

dere la vîrful fisurii $DCVF$ (C.O.D.) La fel ca și K_c, valoarea $DCVF$ este o caracteristică de material ce se poate determina prin încercări pe epruvete, în anumite condiții standardizate (de exemplu Britsch Standard DD—1972). Condiția de proiectare sau verificare a unei piese pe baza mecanicii ruperilor poate fi $DVF < DCVF$, pentru orice defect conținut în piesă.

3.1. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR MECANICE ALE MATERIALULUI FOLOSIT LA CONSTRUCȚIA CORPURILOR PREVENITOARELOR ORIZONTALE DUBLE

Corpurile prevenitoarelor orizontale duble se confecționează la noi în țară din oțel turnat T 35 MoCrNi. 08 — STAS 1773—76.

Pentru determinarea caracteristicilor mecanice și de tenacitate la rupere pentru acest material s-au efectuat o serie de încercări experimentale, care sînt utilizate, așa cum se va vedea în continuare, la verificarea corpurilor de prevenitoare pe baza conceptelor mecanicii ruperilor.

Încercările experimentale s-au efectuat pe epruvete prelevate din probe turnate de tip placă $200 \times 200 \times 25$ ce au fost supuse ulterior tratamentelor termice, corespunzătoare (recoacere de omogenizare, normalizare + revenire, îmbunătățire). După tratamentul final de îmbunătățire, durităților probelor folosite la încercări au fost cuprinse între 216 și 245 HV valori ce corespund prescripțiilor întreprinderii „1 Mai" Ploiești. Pentru realizarea epruvetelor necesare la încercările experimentale, s-au folosit cîte două probe tip placă turnate din trei șarje de oțel T35MoCrNi 08, elaborate de întreprinderea „1 Mai" Ploiești, avînd compozițiile chimice indicate în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Nr. șarjei (într. „1Mai")	Compoziție chimică %							
	C	Si	Mn	S	P	Mo	Cr	Ni
3099	0,31	0,34	0,65	0,017	0,020	0,24	0,74	0,73
3108	0,32	0,36	0,60	0,019	0,021	0,23	0,66	0,80
3137	0,35	0,35	0,70	0,023	0,024	0,24	0,92	0,85

Din fiecare probă s-au prelevat :

— cîte trei epruvete cilindrice pentru încercarea la tracțiune avînd diametrul în porțiunea calibrată $d_0 = 10$ mm conform STAS 200—75 ;

— cîte 4...6 epruvete cu crestătură în V pentru încercarea de încovoiere prin șoc, conform STAS 7511—73 ;

— cîte trei epruvete plate (grosimea 10 mm, lățimea 20 mm) cu dublă crestătură pentru determinarea tenacității la rupere prin încercări la tracțiune statică ;

— cîte 4...6 epruvete plate ($55 \times 10 \times 10$) cu dublă crestătură, pentru determinarea tenacității la rupere prin încercări de încovoiere prin șoc.

Încercările experimentale s-au efectuat atlt la temperatura ambiantă, cît şi la temperaturi scăzute (pînă la —60°C), folosindu-se următoarele metodologii de lucru :

a) încercările la tracţiune s-au efectuat pe o maşină universală pentru încercări mecanice cu forţa maximă de tracţiune de 300 kN, corespunzînd calitativ prescripţiilor STAS 1510—66.

Pentru realizarea încercărilor la tracţiune la temperaturi scăzute s-a utilizat un dispozitiv original ce permite menţinerea epruvetelor în mediul de răcire în tot timpul încercării. Pentru aceste încercări s-a folosit ca mediu de răcire eterul de petrol, iar ca agent frigorific bioxidul de carbon solid.

Pentru măsurarea alungirilor s-au folosit extensometre montate direct pe epruvete, avînd precizia de 0,01 mm.

Parametrii determinaţi în urma acestor încercări au fost : rezistenţa la rupere, σ_r, limita de curgere convenţională, $\sigma_{c,0,2}$, şi alungirea la rupere A_5. De asemenea, rezultatele obţinute prin aceste încercări au permis construirea curbelor caracteristice convenţionale la tracţiune ale oţelului turnat studiat.

b) încercările la încovoiere prin şoc au fost realizate cu ajutorul unui ciocan-pendul cu o energie potenţială iniţială de 30 daN·m, respectînd condiţiile tehnice din STAS 7238—73. Încercările de încovoiere prin şoc la temperatura ambiantă s-au efectuat după metodologia recomandată în STAS 7511—73, iar încercările la temperaturi scăzute s-au efectuat după metodologia descrisă în STAS 6833—70. Pentru răcirea epruvetelor s-a folosit un container confecţionat special în care s-a introdus ca mediu de răcire eterul de petrol, iar ca agent frigorific bioxidul de carbon solid. În urma acestor încercări s-au determinat valorile energiilor de rupere, KV, corespunzătoare temperaturilor de lucru.

c) Pentru efectuarea încercărilor de determinare a tenacităţii la rupere pe epruvete supuse la tracţiune statică s-a folosit o maşină universală pentru încercări mecanice, cu forţa maximă de tracţiune de 300 kN, îndeplinind condiţiile tehnice impuse de STAS 1510—66. Pentru realizarea încercărilor la temperaturi scăzute s-a utilizat un dispozitiv original care permite menţinerea epruvetelor în mediul de răcire în tot timpul încercării. Mediile de răcire şi agenţii frigorifici utilizaţi au fost aceiaşi ca la încercările la tracţiune. Metodologia de lucru folosită la aceste determinări a fost :

— s-au măsurat lăţimile crestăturilor realizate prin prelucrarea mecanică (frezare) a_i, folosind un microscop universal de tip C.Z. cu precizia 0,0005 mm ;

— s-au supus epruvetele solicitării de tracţiune statică întrerupîndu-se încercarea atunci cînd ruperea a fost iniţiată (sau iniţiată şi propagată) la una dintre crestături ;

— după încercare s-a măsurat lăţimea la fundul crestăturii care a iniţiat ruperea, a_f, cu microscopul universal de tip C.Z., cu precizia 0,0005mm şi s-a determinat deplasarea de deschidere la vîrful crestăturii,

$$DVF = a_f - a_i, \tag{11}$$

parametru de mecanica ruperii care poate fi utilizat (aşa cum se va vedea în continuare) pentru aprecierea tenacităţii la rupere a oţelului cercetat.

d) Pentru efectuarea încercărilor de determinare a tenacității la rupere pe epruvete supuse la încovoiere prin șoc s-a folosit un ciocan-pendul cu o energie potențială inițială de 30 daN·m ce îndeplinea condițiile tehnice din STAS 7238—73. Pe ciocanul-pendul s-a adoptat un dispozitiv ce a permis lansarea ciocanului de la diferite înălțimi. Epruvetele folosite la încercările la temperaturi scăzute au fost răcite în aceleași condiții ca epruvetele supuse încercărilor de încovoiere prin șoc (reziliență). Metodologia de lucru folosită la aceste determinări a fost :

— s-au măsurat lățimile crestăturilor realizate prin prelucrarea mecanică (frezare) a_i, folosind un miroscop universal de tip C.Z. cu precizia de 0,0005 mm ;

— epruvetele au fost așezate pe suportul ciocanului pendul, iar ciocanul a fost lansat de la diferite înălțimi lovind epruvetele în spatele crestăturilor, la mijlocul distanței dintre acestea.

Cînd energia de lansare a ciocanului-pendul a fost suficientă pentru realizarea fisurării epruvetei în dreptul unei crestături încercarea a fost oprită ;

— după încercare s-au măsurat lățimea la fundul crestăturii care n-a inițiat ruperea, a_f, cu ajutorul microscopului universal de tip C.Z. cu precizia de 0,0005 mm și s-a determinat deplasarea de deschidere la vîrful crestăturii,

$$DVFD = a_f - a_i, \tag{12}$$

parametru de mecanica ruperii care poate fi utilizat pentru aprecierea tenacității la rupere a oțelului cercetat.

Rezultatele obținute în urma realizării încercărilor experimentale ale căror metodologii au fost descrise mai sus sînt prezentate în :

— tabelul 3.2 pentru încercările la tracțiune ;
— tabelul 3.3 pentru încercările la încovoiere prin șoc (reziliență) ;
— tabelul 3.4 pentru încercările de determinare a tenacității la rupere pe epruvete solicitate la tracțiune statică ;
— tabelul 3.5 pentru încercările de determinare a tenacității la rupere pe epruvete solicitate la încovoiere prin șoc.

Rezultatele încercărilor experimentale efectuate pun în evidență fenomenul de micșorare a tenacității oțelului cercetat odată cu scăderea

Tabelul 3.2

Nr. șarjă	Caracteristici mecanice medii la temperatura								
	20°C			−35°C			−60°C		
	R_m (N/mm²)	$R_{p0,2}$ (N/mm²)	A_5 (%)	R_m (N/mm²)	$R_{p0,2}$ (N/mm²)	A_5 (%)	R_m (N/mm²)	$R_{p0.2}$ (N/mm²)	A_5 (%)
3099	729	536	17,0	784	653	11,6	866	716	9,6
3108	752	588	16,1	781	630	10,8	793	583	9,6
3137	773	604	12,6	812	597	9,9	891	690	7,6
Val. med. ptr. cele 3 șarje	751	576	15,2	792	627	10,8	850	663	8,9

Tabelul 3.3

Nr. şarjă	Energia de rupere kV (J) la temperatura 20°C	— 35°C	— 60°C
3099	80/84/88	44/43/39	29/30/32
3108	66/80/77	41/34/44	44/30/34
3137	64/69/70	44/46	50/37/37
Val. med. pt. cele 3 şarje	75,3	41,9	35,9

Tabelul 3.4

Nr. şarjă	Parametrii determinaţi la încercare la temperatura 20°C a_i (mm)	a_f (mm)	DVF (mm)	— 35°C a_i (mm)	a_f (mm)	DVF (mm)	— 60°C a_i (mm)	a_f (mm)	DFV (mm)
3099	0,2216	0,4206	0,1990	0,2231	0,3829	0,1598			
3108	0,2278	0,3921	0,1643	0,2187	0,3290	0,1103	0,2154	0,3233	0,1039
3137	0,2180	0,3591	0,1411	0,2282	0,3525	0,1243	0,2256	0,3412	0,1156
Valori medii ptr. cele 3 şarje	—	—	0,1681	—	—	0,1315	0,2302	0,3012	0,0710
							—	—	0,0968

Tabelul 3.5

Nr. şarjă	Parametrii determinaţi la încercarea la temperatura 20°C a_i (mm)	a_f (mm)	$DVFD$ (mm)	— 53°C a_i (mm)	a_f (mm)	$DVFD$ (mm)	— 60°C a_i (mm)	a_f (mm)	$DVTD$ (mm)
3099	0,2705	0,4555	0,1850	0,2630	0,3878	0,1248	0,2698	0,3496	0,0798
3108	0,2832	0,4153	0,1321	0,2742	0,3683	0,0941	0,2882	0,3703	0,0821
3137	0,2882	0,4238	0,1356	0,2812	0,3723	0,0911	0,2757	0,3199	0,0442
Valori medii pentru cele 3 şarje	—	—	0,1509	—	—	0,1033	—	—	0,0687

temperaturii şi mărirea vitezei de solicitare a epruvetelor. De asemenea, s-a observat creşterea caracteristicilor de rezistenţă mecanică, σ_r şi $\sigma_{c,0,2}$ odată cu scăderea temperaturii.

Folosind criteriile clasice de proiectare, ar rezulta că odată cu scăderea temperaturii, crescînd valorile σ_r $\sigma_{c,0,2}$, cresc valorile eforturilor unitare admisibile (pentru coeficienţii de siguranţă constanţi) şi deci sporeşte capacitatea portantă a corpurilor prevenitoare de erupţie.

În realitate, însă, odată cu scăderea temperaturii oţelul T35MoCrNi08 îşi pierde ductilitatea, iar defectele de turnare existente în corpurile prevenitoarelor îşi sporesc capacitatea de a iniţia ruperi cu caracter fragil.

Această tendinţă de micşorare a capacităţii materialului de a împiedica amorsarea procesului de rupere, datorită scăderii temperaturii poate fi pusă în evidenţă utilizînd metodele mecanicii ruperilor.

3.2. APLICAREA CONCEPTELOR MECANICII RUPERILOR LA VERIFICĂRILE CORPURILOR PREVENITOARELOR ORIZONTALE DUBLE

În cele ce urmează se va căuta să se aplice conceptele mecanicii ruperilor, prezentate succint mai sus, în problema proiectării și verificării corpurilor prevenitoarelor de erupție.

Ținînd seama de încercările experimentale efectuate, se vor folosi în calcule parametrii *DVF* și *DVFD* determinați după metodologia descrisă anterior. Se face însă precizarea că rezultatele care se obțin au un caracter informativ deoarece epruvetele folosite la încercări nu respectă condițiile dimensionale ce se impun la determinările lui *DCVF* (un calcul sumar efectuat indică necesitatea stabilirii unor epruvete cu grosimea minimă de 50 mm).

Un prim mod de utilizare a conceptelor mecanicii ruperilor la proiectarea corpurilor prevenitoarelor de erupție constă în acceptarea următoarelor ipoteze de bază :

— dependența dintre valoarea *DVF* a oricărui defect (fisură) existent în piesă, dimensiunea defectului a, și eforturile unitare, σ, care solicită global defectul perpendicular pe fețele acestuia, este dată de relația

$$DVF = \frac{8R_{p\,0,2}\,a}{\pi E}\left(1 + 1{,}61\,\frac{a^2}{R\cdot t}\right)\ln\sec\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{\sigma}{R_{p\,0,2}}\right), \qquad (13)$$

valabilă în cazul vaselor de presiune avînd raza de curbură R și grosimea pereților t (se observă că pentru $R \to \infty$, prima paranteză devine egală cu 1).

— corpul prevenitorului se supune după fabricare unui control nedistructiv total, astfel încît dimensiunile maxime ale defectelor ce se acceptă în piesă corespund dimensiunilor minime de defect care poate fi depistat prin metoda de control nedistructiv folosită. De exemplu, în cazul grosimilor pereților piesei controlate cuprinse între 75...100 mm (dimensiunile corespund corpului prevenitorului *DF* 13 5/8×350), dimensiunile minime ale defectelor depistate prin control cu ultrasunete sînt de aproximativ 2...3 mm.

Acceptînd aceste ipoteze (considerînd valabilă relația (13) și $a = 2$ mm), se poate determina raportul $\sigma/\sigma_{c,\,0,2}$ maxim (deci coeficientul de siguranță c_{min}) ce poate fi acceptat astfel încît $DVF < DCVF$ și deci să nu existe pericolul apariției procesului de rupere la temperatura de exploatare.

Aplicînd această metodă în cazul substructurii *T* a corpului prevenitorului *DF* 13 5/8×350 (vezi cap. 2) se obțin rezultatele prezentate în tabelul 3.6.

3.6. Cercetînd datele din tabelul 3.6 se poate observa că $c_{min} << c$ considerat în calculele de rezistență (chiar dacă se acceptă că $DCVF = \frac{1}{10}\,DVFD$) ceea ce înseamnă că tenacitatea materialului în prezența unor defecte de dimensiuni $a < 2$ mm, este suficientă pentru a preîntîmpina apariția ruperii la oricare din temperaturile de lucru luate în discuție și deci metodele de dimensionare bazate pe calcule clasice de rezistență sînt acoperitoare.

Un alt mod de abordare a calculelor de proiectare pe baza conceptelor mecanicii ruperilor este de a determina dimensiunea defectului admisibil în piesă, astfel încît ruperea să nu se producă în condiţiile existenţei unei stări de tensiuni caracterizate printr-un raport $\sigma/\sigma_{c,0,2}$ dat. Folosind tot relaţia de calcul (13) se obţin în acest caz rezultatele prezentate în tabelul 3.7.

Tabelul 3.6

Parametrul de calcul		Temperatura de lucru		
		20°C	−35°C	−60°C
Raza medie a corpului T, R	(mm)	262	262	262
Grosimea peretelui $t = h'_e$	(mm)	178	178	178
Limita de curgere $R_{p\,0,2}$	(N/mm²)	576	627	663
$DCVF = DVF$ (tab. 5)	(mm)	0,1509	0,1033	0,0687
Dim. defectului a	(mm)	3	3	3
$DCVF = DVFD$ (tab. 4)	(mm)	0,1681	0,1315	0,0968
$\sigma/\sigma_{c\,0,2}$ considerînd $DCVF - FVD$	(mm)	0,99	0,99	0,99
c_{min} considerînd $DCVF = DVF$	(mm)	1,01	1,01	1,01
$\sigma/\sigma_{c\,0,2}$ considerînd $DCVF = DVFD/10$		0,68	0,83	0,46
c_{min} considerînd $DCVF = DVFD/10$		1,48	1,20	2,18

Tabelul 3.7

$\sigma/R_{p\,0,2}$	c_{min}	Defect maxim admisibil (mm) la temperatura*		
		20°C	−35°C	−60°C
0,67	1,5	3,07	1,93	1,21
0,5	2,0	6,23	3,92	2,46
0,38	2,65	11,4	7,15	4,50
0,36	2,78	12,8	8,03	5,05

* În calcule s-a considerat $DCVF = DVFD/10$ (vezi tab. 3.5) şi $R_{p\,0,2}$ conform tabelului 3.2

În unele lucrări de specialitate se propune ca metoda de proiectare şi stabilire a coeficientului de siguranţă $\sigma_{c0,2}/\gamma$ care să asigure la rupere piesa proiectată în cazul unui defect avînd dimensiunea egală cu jumătate din grosimea peretelui.

Tabelul 3.8

	Temperatura de lucru*		
	20°C	−35°C	−60°C
$\sigma/R_{p\,0,2}$	0,20	0,16	0,13
c_{min}	4,93	6,20	7,8

* În calcule s-a considerat $DCVF = DVFD/10$ (vezi tab. 3.5) şi $\sigma_{p\,0,2}$ (conform tabelului (3.2).

Folosind această metodă în cazul corpului prevenitorului *DF* 13 5/8×350 se obţin valorile coefieinţilor de siguranţă expuşi în tabelul 3.8 (s-a considerat că valoarea medie pentru grosimea peretelui $t = 70$ mm).

Metodele de proiectare bazate pe conceptele mecanicii ruperilor pot fi aplicate, aşa cum s-a arătat mai sus, în multiple variante. Ele constituie instrumente extrem de utile în aprecierea capacităţii portante a corpurilor preve-

nitoarelor prezentînd defecte sau pentru stabilirea dimensiunilor necesare în cazul considerării unor defecte de anumite dimensiuni și configurații.

Pentru cazul corpurilor prevenitoarelor orizontale duble, aplicarea acestor metode va putea să conducă la concluzii aplicabile practic numai după ce se vor realiza încercări experimentale concludente pentru determinarea parametrilor critici K_c sau *DCVF* (pe epruvete de dimensiuni corespunzătoare). Această preocupare va face obiectul etapelor viitoare de cercetare.

4. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

1. Prin cercetările teoretice efectuate asupra stării de tensiuni și de formații din corpurile prevenitoarelor de erupție orizontale duble *DF* 13 5/8×350 [6], s-a ajuns la un algoritm de proiectare și verificare a condițiilor de rezistență care ține seama, în mod corespunzător, atît de alcătuirea complexă a elementelor componente, cît și de conlucrarea dintre substructurile adoptate (tubul circular de legătură T, și casetele c_1, c_2 pentru bacuri).

Etapele prevăzute în algorim, prin care, pornind de la datele generale de proiectare (diametrul garniturii de prăjini și presiunea de probă), se ajunge la forma constructivă de adoptat pentru corpul prevenitorului, se pot parcurge cu ușurință de proiectant și permit luarea în considerație a tuturor factorilor constructivi, tehnologici și de rezistență.

Este indicat însă ca în etapa următoare, algoritmul să fie transpus într-un program pentru calculator automat.

2. Încercarea experimentală s-a făcut pe corpul prevenitorului *DF* 13 5/8×350 și a constat din măsurători tensometrice ale deformațiilor atît la interiorul, cît și la exteriorul corpului prevenitorului [6].

Se apreciază că măsurătorile au fost făcute cu multă grijă, iar prelucrarea datelor a permis stabilirea nivelului maxim de solicitare atît la tubul de legătură, cît și în casetele bacurilor.

Folosind valorile eforturilor unitare maxime înregistrate se ajunge la un coeficient de siguranță față de limita de curgere de 2,35 la tubul de legătură și de 1,28 în punctul cel mai solicitat al casetelor. În consecință, substructurile prevenitorului *DF* 13 5/8×350 sînt corespunzătoare, dar tubul de legătură este solicitat mult sub capacitatea sa portantă.

3. Starea de tensiuni determinată pe baza metodelor stabilite este confirmată în mod satisfăcător de către datele experimentale, abaterile înregistrate fiind mici. În consecință, algoritmul propus, deși structura corpului prevenitorului este desebit de complexă, poate fi aplicat cu succes în proiectare.

4. Pe baza algoritmului stabilit s-au analizat mai multe variante constructive pentru corpul prevenitorului *DF* 13 5/8×350 și se propun în final două variante îmbunătățite : o variantă cu structură nervurată și o alta fără nervuri, care conduc la o reducere a greutății corpului prevenitorului și o comportare mai bună a tuturor elementelor, deoarece reducîndu-se concentratorii de tensiuni, se reduce implicit posibilitatea unor amorse locale de fisuri. În plus, întregul material al corpului prevenitorului este solicitat mai aproape de limita sa de rezistență.

Este necesar ca cele două tipuri îmbunătăţite de corpuri de prevenitor să fie realizate şi experimentate cu multă exisgenţă pentru verificarea atît a condiţiilor de rezistenţă, cît şi a celor de deformaţii.

5. Un capitol important al lucrării îl constitue încercările efectuate pe multe epruvete de diverse tipuri, pentru evidenţierea caracteristicilor mecanice de rezistenţă ale materialului din care se execută corpurile prevenitoarelor. Partea nouă a acestor încercări o constituie punerea în evidenţă a factorilor principali prin care mecanica ruperii apreciază starea admisibilă a unor structuri cu defecte, cazuri foarte frecvente în construcţia preventoarelor de erupţie.

Primită la redacţie la 27 decembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. I. Toivi, P. Raţă, *Utilaje şi instalaţii pentru prevenirea erupţiilor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1971.
2. N. Posea, N. Tatu, Gh. Zecheru, *Cercetări privind rezistenţa corpurilor prevenitoarelor orizontale*, Lucrare de contract nr. 25, I. P. G. Ploieşti, 1975.
3. N. Posea, N. Tatu, Gh. Zecheru, Al. Anghel, *Cercetări privind rezistenţa corpurilor prevenitoarelor orizontale*, Lucrare contract nr. 16, I. P. G. Ploieşti, 1976.
4. N. Posea, N. Tatu, Gh. Zechieru, Al. Anghel, Gh. Hotea, *Cercetări privind rezistenţa corpurilor prevenitoarelor orizontale*, Lucrare contract nr. 25, I. P. G. Ploieşti, 1977.
5. N. Posea, N. Tatu, Gh. Zecheru, Al. Anghel, *O metodă pentru proiectarea şi verificarea rezistenţei corpurilor prevenitoarelor de erupţie orizontale duble*. St. cerc. mec. apl. *4* /1978).
6. N. Posea, N. Tatu, Al. Anghel, Gh. Zecheru, Gh. Hotea, *Cercetări teoretice şi experimentale privind rezistenţa corpului prevenitorului DF 13 5/8×350*. Lucrare contract nr. 7, I. P.G. Piteşti, 1978.
7. G. Ştefănescu, M. D. Ştefănescu, *Îndreptar pentru turnători*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1972.
8. G. Albita, C. Rădulescu, *Bazele proceselor de turnare a metalelor şi aliajelor*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1970.
9. S. Timoshenko, S. K. Woinowski, *Teoria plăcilor plane şi curbe*, Traducere din l. engleză, Ed. tehnică, Bucureşti, 1968.
10. M. Itkis, I. Maliusin, *Asupra calculului corpurilor prevenitoarelor orizontale*, Maşinii i naftenianoe oborudovanie, *3* (1971).
11. A. I. Bublic ş.a., *Utilaj petrolier pentru foraj şi extracţie*, Ed. tehnică. Bucureşti, 1968.
12. D. S. Ponomariov ş.a., *Bazele metodelor moderne de calcul a rezistenţei în construcţia de maşini*, Ed. tehnică, Bucureşri, 1963.
13. A. I. Birgher, *Cruglîe plastinki i obolociki vrascenie*, Gosudarstvenoe naucino-tehniceskoe isdatelstvo, Moscova, 1961.
14. D. Cioclov, *Mecanica ruperii materialelor*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1977.

MODEL MECANIC AL SOLICITĂRILOR STATICE PENTRU MOTORUL LINIAR CU PISTON ÎN CARE CURSA PISTOANELOR ESTE VERTICALĂ

de CONSTANTIN ACKER
Institutul politehnic Iaşi

Cu mijloacele mecanicii teoretice clasice, se efectuează sondajul proprietăţilor statice ale motorului Balandin (denumit motor liniar cu piston, în ultima vreme), relevîndu-se calităţi teoretice excepţionale din acest punct de vedere, deplin concordante cu rezultatele experimentale surprinzătoare obţinute de Balandin în privinţa randamentului mecanic (94%) şi a fiabilităţii înalte (circa 3/2 faţă de cea a motorului tip bielă—manivelă) ale noului motor.

Blocarea preocupărilor din ţară, în privinţa motorului liniar cu piston, datorată lipsei cunoaşterii mecanismului de producere a solicitărilor statice în noul motor, este complet îndepărtată prin rezultatele cuprinse în lucrarea de faţă.

Vizînd argumentarea teoretică a „lipsei solicitărilor" în motorul liniar cu piston — obţinută experimental şi consemnată de S.S. Balandin în cartea sa [1] —, iar prin aceasta vizînd implicit o contribuţie la explicarea teoretică a randamentului mecanic surprinzător (94%) şi a fiabilităţii înalte a motorului susmenţionat, lucrarea [3] oferă o explicaţie clară a „lipsei solicitărilor statice" în piesele rotitoare ale motorului, aşa cum se degajă cu pregnanţă din lista finală a rezultatelor cuprinse în aceast lucrare ([3]), listă reluată mai jos şi care, reamintim, s-a obţinut pentru cazul în care cursa singurelor pistoane active, anume cele de la extremităţile tijei Tx situată pe Ox în figura 3, este verticală (axa Ox fiind presupusă verticală ascendentă):

$$1)\ L_1^* = -G_{ax}\frac{z_c(ax)+d_{pc}}{d_{PcP_L}}, \qquad 2)\ L_2^* = 0,$$

$$3)\ L_5 = -G_{ax}\left(1+\frac{z_c(ax)+d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right), \qquad 4)\ L_6 = 0,$$

$$5)\ L_3 = \frac{G_{AB}}{2}+G_{ax}\frac{d_{HPc}}{2L^*}\left(1+\frac{z_c(ax)+d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right), \qquad 6)\ L_4 = 0,$$

$$7)\ L_1 = -\frac{G_{AB}}{2}+G_{ax}\left(\frac{d_{HPc}}{2L^*}-1\right)\left(1+\frac{z_c(ax)+d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right), \quad 8)\ L_2 = 0,$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 6, 1979, P. 901—906

$$9)\quad T_1 + T_2 = F + G_{Tx} + \frac{G_{AB}}{2} - G_{ax}\left(\frac{d_{HPc}}{2L^*} - 1\right)\left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$10)\quad N_1 + N_2 = 0,$$

$$11)\quad N_3 + N_4 = G_{Ty} + \frac{G_{AB}}{2} + G_{ax}\frac{d_{HPc}}{2L^*}\left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$12)\quad T_3 + T_4 = 0$$

(membrii I în relațiile de mai sus conțin solicitările statice prezentate în figurile 1,3, în modul ; G_{ax}, G_{AB}, G_{Tx}, G_{Ty} sînt, respectiv, greutățile arborelui motor — considerat împreună cu tot ce se rotește solidar cu acesta —, a piesei rigide $QPABBC$ prevăzută cu cele 2 pinioane legate rigid de ea — ca în figura 4 — , a tijei Tx considerată împreună cu pistoanele de la extremități și în sfîrșit a tijei Ty situată pe Oy în figura 3 și considerată de asemenea împreună cu pistoanele de la extremitățile ei ; $z_c(ax)$ este cota, în reperul $XOYZ$ din figura 3, a centrului de masă al arborelui motor considerat împreună cu tot ce se rotește solidar cu acesta, planul XOY al acestui

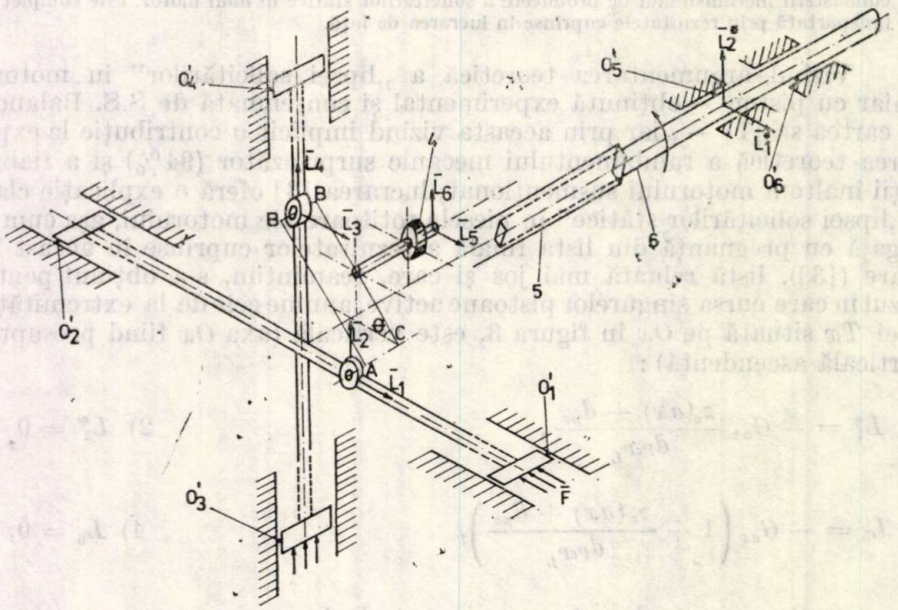


Fig. 1

reper trecînd prin centrul de masă — și totodată centrul geometric — al piesei $QPABBC$; d_{pc} este distanța de la centrul de masă al piesei $QPABBC$ pînă la „planul" de cuplare al arborelui motor ; d_{PcP_L} este distanța de la „planul" de cuplare al arborelui motor pînă la „planul" lagărului în care se sprijină arborele motor ; d_{HPc} este distanța de la mijlocul H al por-

țiunii PA din componența piesei $QPABBC$ (fig. 4) pînă la „planul" de cuplare a arborelui motor; L^* este semidistanța între axele de simetrie longitudinale ale tijelor Tx și Ty.

În cazul folosirii patinelor solidarizate pe mijloacele tijelor Tx și Ty (vezi fig. 3), patine folosite de însuși Balandin în construcția motorului

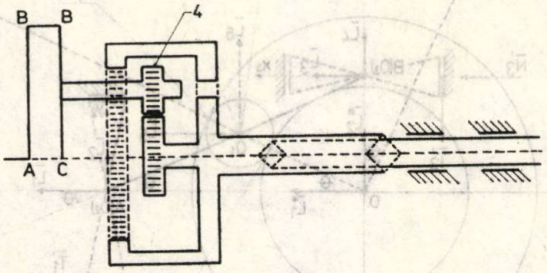


Fig. 2

său, singurele modificări ce apar în rezultatele de mai sus privesc exclusiv pe cele exprimate prin relațiile 9), 10), 11), 12), care devin

$$9') \quad T_1 + T_2 + T_1' = F + G_{Tx} + \frac{G_{AB}}{2} - G_{ax}\left(\frac{d_{HPc}}{2L^*} - 1\right)\left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$10') \quad N_1 + N_2 + N_1' = 0,$$

$$11') \quad N_3 + N_4 + N_3' = G_{Ty} + \frac{G_{AB}}{2} + G_{ax}\frac{d_{HPc}}{2L^*}\left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$12') \quad T_3 + T_4 + T_3' = 0,$$

unde T_1', N_1', N_3', T_3' din membrii I sînt modulii solicitărilor notate cu aceleași litere și cu aceiași indici în figurile 1,3.

Subliniem faptul că în condițiile folosirii sau nefolosirii patinelor și indiferent de modul de cuplare a arborelui motor (vezi fig. 1,2), toate rezultatele susmenționate în privința solicitărilor statice la care sînt supuse piesele rotitoare din motorul liniar cu piston rămîn neschimbate, ceea ce este demn de remarcat.

Modelele mecanice oferite de lucrarea [3] precum și de rezultatele din lucrarea [3] prevăzute cu completările cuprinse în ultimele 2 aliniate precedente, modele mecanice considerate însă nu doar pentru solicitările statice din piesele rotitoare, ci pentru întreg ansamblul solicitărilor statice din motorul liniar cu piston, prezintă carențe, ele rămînînd datoare cu explicarea fiabilității înalte a camerelor de ardere (fiabilitate argumentată cu tabele de rezultate experimentale comparative, de către S.S. Balandin în cartea sa [1]), aceasta deoarece solicitările statice din cilindri — în modelele precedente — rezultă supărător de mari în situația de echilibru la limită.

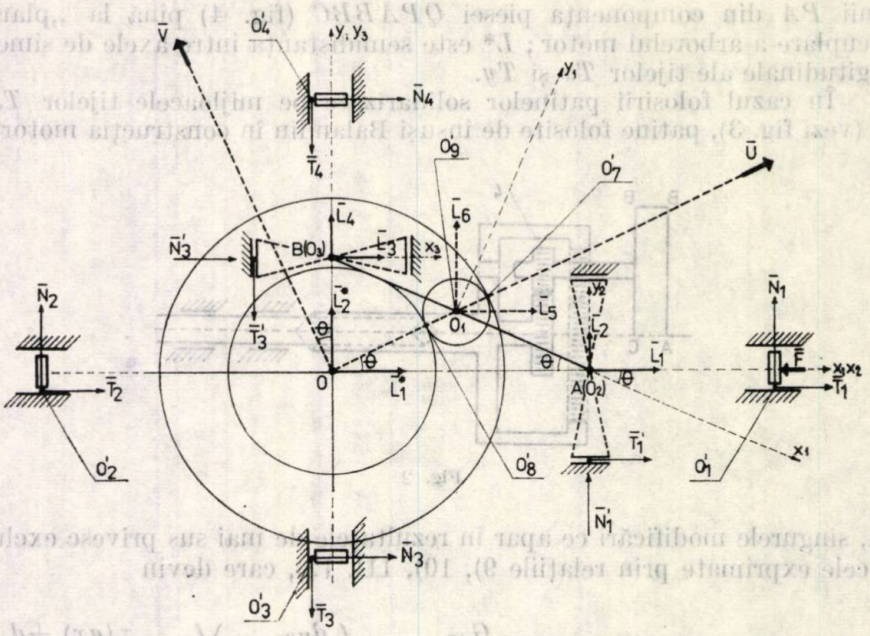


Fig. 3

Dacă vom considera însă cei 2 cilindri opuși în care lunecă pistoanele unei aceleiași tije, ca prelungiți pînă ce ei devin un singur cilindru (prevăzut cu fante laterale pentru a permite mișcarea liberă a axelor din articulațiile A și B, fig. 1,3), tijele însăși — împreună cu pistoanele respective — fiind înlocuite prin cîte un cilindru circular drept compact, prevăzut cu segmenți la extremități (segmenți de același diametru ca și restul cilindrului), atunci numărul total al cuplelor cinematice de translație din motor scade la jumătate, singurele modificări în rezultatele menționate anterior înregistrîndu-se exclusiv cu privire la cele redate prin relațiile 9), 10), 11), 12) (respectiv prin relațiile 9'), 10'), 11'), 12')), care devin

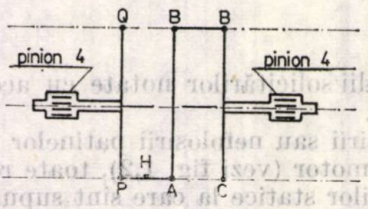


Fig. 3

$$9'') \quad T_1' = F + G_{Tx} + \frac{G_{AB}}{2} - G_{ax}\left(\frac{d_{HPc}}{2L^*} - 1\right)\left(1 + \frac{z_c\,(ax) + d_{Pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$10'') \quad N_1' = 0,$$

$$11'') \quad N_3' = G_{Ty} + \frac{G_{AB}}{2} + G_{ax}\,\frac{d_{HPc}}{2L^*}\left(1 + \frac{z_c(ax) + d_{pc}}{d_{PcP_L}}\right),$$

$$12'') \quad T_3' = 0,$$

fapt ce înlătură incompatibilitatea din modelele mecanice anterioare, semnalate mai sus pentru situația de echilibru la limită, respectiv modulii singurelor solicitări $\bar{T}'_1$, $\bar{N}'_1$, $\bar{N}'_3$, $\bar{T}'_3$ ce mai sînt de semnalat în cilindrii în care lunecă acum pistoanele încetînd de a mai fi supărător de mari (ba chiar dimpotrivă) inclusiv în situația de echilibru la limită.

Observații. 1). O primă recomandare cu caracter general ce s-ar degaja din acest rezultat este aceea de a se urmări realizarea ansamblului format din fiecare pereche de cilindri împreună cu tija prevăzută cu pistoane la extremități, ce lunecă în acești cilindri, cu o structură cît mai apropiată de aceea a unei cuple cinematice de translație *unice*, deoarece în măsura în care se atinge acest obiectiv, se obține — practic — și „dispariția" solicitărilor statice din motorul liniar cu piston, conform relațiilor (1)—(8) și (9″)—(12″).

2). O contribuție la realizarea acestui obiectiv o reprezintă legarea rigidă a tijelor de pistoanele respective, ceea ce nu afectează tehnologia construcției motorului și nici funcționarea acestuia, avînd în vedere că la o cursă a pistoanelor de 6 cm., lungimea totală a unei tije — socotită împreună cu pistoanele respective — este de circa 12 cm, realizarea însăși a cilindrului circular drept compact, prevăzut cu segmenți de același diametru ca și cilindrul — prin care s-a schițat mai sus să se suplinească fiecare tijă cu pistoane —, neridicînd de asemenea probleme speciale (menționăm că Balandin utilizează în unele variante constructive ale motorului său legarea rigidă a tijelor de pistoanele respective).

3). Utilizarea patinelor — solidarizate cu tijele pe mijlocul acestora — care lunecă pe șine, ce fac corp comun cu cilindrii prin blocul motor, contribuie de asemenea la apropierea de obiectivul semnalat în observația 1) (Balandin folosește permanent patinele în toate variantele constructive ale motorului său, dar — avem impresia — mai mult în vederea prevenirii flambajului tijelor, acțiune inutilă în privința acestui flambaj — vezi relațiile (5), (8), (10″), (11″) — , dar utilă în atingerea obiectivului conturat în observația 1).

4). Din modelul mecanic oferit de relațiile (9)—(12) pentru solicitările statice din cilindri urmează că și în lipsa forței $\bar{F}$ ce se aplică pistoanelor, aceste solicitări ar trebui să fie foarte mari, ceea ce contrazice un rezultat experimental simplu obținut cu mecanismul motorului (rezultat care, chiar dacă pistonele nu sînt foarte etanș prinse în cilindri, încă este revelator), anume : lăsînd în repaus mecanismul în poziția din figura 1 (sau fig. 3) el nu rămîne în această poziție ci se pune în mișcare sub acțiunea mecanică $\bar{G}_{Tx}$ datorată tijei verticale Tx, pînă ce articulația A ocupă poziții sub tija orizontală Ty, mecanismul manifestînd totodată o mare sensibilitate chiar la acțiuni mecanice $\bar{F}$ de slabă intensitate, ceea ce, evident, este incompatibil cu modulii supărător de mari ai solicitărilor $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{T}_1$, $\bar{T}_2$, $\bar{N}_3$, $\bar{N}_4$, $\bar{T}_3$, $\bar{T}_4$ ce rezultă în situația de echilibru la limită. De aceea, sîntem înclinați să estimăm că și în cazul cînd nu se folosesc patinele prinse pe mijloacele tijelor, cilindrii opuși corespunzători unei aceleiași tije și solidarizați prin blocul motor funcționează — mai ales în situația legării rigide a pistoanelor de tije — ca o cuplă cinematică de translație *unică*, rezultatul experimental menționat putîndu-și avea una dintre explicații tocmai în acest fapt, valorile modulilor solicitărilor în cîte o

asemenea „cuplă de translație unică" (implicit valoarea lucrului mecanic pierdut pentru punerea în mișcare a mecanismului) fiind de mică importanță, conform rezultatelor (9″)—(12″).

Concluzii. Se realizează astfel un model mecanic mai complet (consemnat prin relațiile (1)—(8) și (9″)—(12″)) pentru solicitările statice din motorul liniar cu piston, care

— înlătură în orice caz (ca și modelele mecanice precedente de altfel) suspiciunile specialiștilor în construcția de motoare cu piston în privința modulului solicitării statice $\bar{L}_2$, care pare „periculos de mare" dacă se asimilează motorul liniar cu piston cu un motor tip bielă-manivelă ce are biela scurtă egală cu manivela și dacă se ține cont de documentația de bază a motorului tip bielă-manivelă în vigoare,

— precizează caracterul și dimensionarea unor subansambluri ale motorului liniar cu piston care garantează reducerea solicitărilor statice din întreg motorul la valori neînsemnate,

— prilejuiește conturarea uneia dintre argumentările menite să contribuie la elucidarea (la explicarea) „lipsei solicitărilor" în motorul liniar cu piston constatată experimental la motoare de același tip a căror structură nu respectă în mod strict recomandarea cuprinsă în observația 1 și prin aceasta

— contribuie la explicarea teoretică a randamentului mecanic (94%) și a fiabilității înalte proprii acestui motor neclasic din punctul de vedere al mecanicii teoretice, dar cu totul apropiat de motorul clasic din punct de vedere tehnologic (în privința realizării pieselor componente și asamblării lor), explicațiile permise de acest model mecanic vizînd inclusiv performanțele înalte atinse cu motoare liniare cu piston construite deja, care nu respectă (am zice, nu aveau cum să respecte) în mod intenționat recomandarea din observația 1, în sfîrșit

— oferă material de referință (elemente de documentație) pentru întocmirea unor proiecte vizînd construcția motorului liniar cu piston la noi în țară.

Primită la redacție la 29 octombrie 1978

BIBLIOGRAFIA

1. S.S. Balandin, *Motoare cu piston fără bielă*, Moscova, 1968.
2. L. Leonidov *Un motor remarcabil*, Sputnik, *2*, p. 99, (1970).
3. C. Acker, *Solicitări statice în motorul liniar cu piston având cursa pistoanelor verticală*, St. cerc. mec. apl. *2*, 251, (1979).

INFLUENȚA DEFORMAȚIEI ELASTICE A ELEMENTULUI CILINDRIC, ASUPRA CALCULULUI UZURII ELEMENTULUI PLAN AL UNEI CUPLE DE FRECARE DE TIP TIMKEN

de LUCIAN CĂPITANU
Institutul de fizică și tehnologia materialelor

Metoda amprentei de uzare și variantele acesteia, utilizate în general ca metode de bază în calculul uzurii elementelor cuplelor de frecare cu contacte hertziene, nu țin seamă în suficientă măsură de proprietățile elastice ale materialelor elementelor în contact și de influența deformației sub sarcină a acestora asupra vitezei lor de uzare. Lucrarea prezintă o nouă metodă analitică de calcul al vitezei de uzare a elementului plan al unei cuple de tip Timken, cu luarea în considerare a deformației elastice sub sarcină a cuplei de frecare și a constantelor elastice ale materialelor în contact.

I. STADIUL ACTUAL

Funcționarea sub sarcină a unei cuple de frecare de tip Timken scoate în evidență apariția unei amprente de uzare pe suprafața elementului plan. Ea se produce prin pătrunderea bucșei cilindrice, sub influența sarcinii normale, în materialul semicuplei plane. În figura 1 este prezentat schematic aspectul amprentei de uzare a elementului plan al unei cuple de tip Timken.

Studiul profilometric al amprentei de uzare evidențiază o anumită neuniformitate a profilului, pe direcția perpendiculară vitezei relative (fig. 2*a*). Aceiași neuniformitate este ilustrată și de profilogramele înregistrate pe direcția vitezei relative (fig. 2*b*). În cazul cuplelor de tip Timken oțel/oțel, neuniformitatea profilului amprentei de uzare este destul de mică, crescînd însă apreciabil în cazul cuplelor material plastic/oțel.

Teoretic, considerînd bucșa cuplei ca fiind rigidă, și ținînd seamă de neuniformitatea relativ mică a profilului amprentei, aceasta poate fi considerată ca fiind formată dintr-o seamă de sectoare de cilindri de lungime egală (p). În această accepțiune, suprafața laterală a unui sector de cilindru (i), care este un segment de cerc, este dată de relația

$$S_i = 0{,}5\, r^2\, (3{,}14\, \varphi_i^0/180^\circ - \operatorname{Sin} \varphi_i), \qquad (1)$$

unde :

r este raza arcului de cerc (raza bucșei) ;

φ_i — unghiul la centru.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 6 ,1979, P. 907–914

Prin dezvoltarea în serie a relației (1), neglijarea puterilor mari și reducerea termenilor asemenea, rezultă

$$S_i = r^2 \varphi_i^3/12. \tag{2}$$

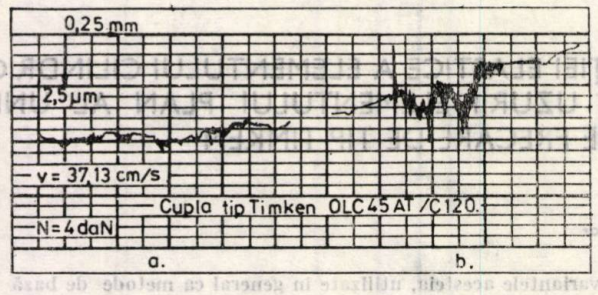


Fig. 1. — Aspectul amprentei de uzare a elementului plan al unei cuple de tip Timken.

Înlocuind unghiul la centru prin raportul l_i/r (fig. 1), relația (2) se poate scrie sub forma

$$S_i = l_i^3/12\, r, \tag{3}$$

în care l_i reprezintă lățimea amprentei de uzare în zona considerată:

Volumul de material al elementului plan îndepărtat prin uzare va fi

$$V_u = \sum_{i=1}^{n} S_i\, p_i \cong L\, l_m, \tag{4}$$

unde L este lungimea amprentei; l_m — lățimea medie a amprentei.

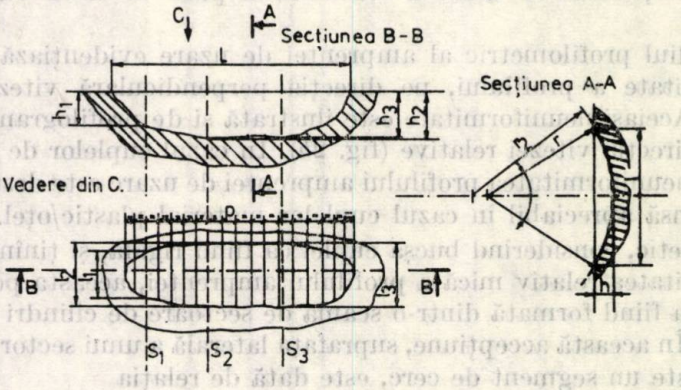


Fig. 2. — Profilograme ale amprentelor de uzare ale unei cuple de tip Timken, oțel/oțel.

În ipoteza bucșei rigide, din ΔABC (fig. 1) rezultă, pentru adîncimea stratului de material îndepărtat prin uzare, expresia

$$h_u = r - \sqrt{r^2 - l^2/4}. \tag{5}$$

În mod practic, utilizarea metodei descrise mai sus necesită măsurarea lățimii amprentei într-un număr de puncte, calcularea lățimii medii, l_m a amprentei de uzare și stabilirea valorilor volumului de material îndepărtat prin uzare, V_u, și a grosimii medii a stratului de material uzat, h_{mu}, cu ajutorul relațiilor (4) și (5), aplicate la lățimea medie a amprentei, l_m.

Practica dovedește că aplicarea metodei descrise conduce la erori apreciabile în stabilirea valorilor uzurii elementului plan al cuplelor de tip Timken. Aceste erori se datoresc în special ipotezei rigidității bucșei, deformația sub sarcină a acesteia nefiind luată în considerare.

Încercările experimentale efectuate pe cuple de tip Timken, evidențiază faptul că raza bucșei cilindrice în zona de contact diferă mult de raza inițială, fapt datorat deformației elastice a bucșei aflate sub sarcină. Apare deci necesară măsurarea sau calcularea razei bucșei deformate în zona de contact.

La ora actuală, pentru stabilirea valorii razei bucșei deformate în zona de contact, se utilizează metode profilometrice. Aceste metode constau în înregistrarea profilului transversal al amprentei de uzare, în punctele în care se măsoară lățimile acesteia și calcularea grafică a razei sale de curbură funcție de adîncimea amprentei [1].

Limitele metodei prezentate, constau în :

a) imposibilitatea măsurării lățimii amprentei de uzare și a înregistrării profilului său transversal, în aceleași puncte ;

b) aproximația mare cu care se stabilește raza bucșei deformate, avînd în vedere faptul că profilul transversal al amprentei nu este uniform, precum și faptul că înregistrarea profilului se face cu amplificări diferite pe orizontală și pe verticală ;

c) imprecizia mare a rezultatelor obținute prin aplicarea metodei descrise, în cazul materialelor cu proprietăți elastice accentuate, ca, de exemplu, în cazul cuplei material plastic armat cu fibre de sticlă/oțel.

II. INFLUENȚA DEFORMAȚIEI ELASTICE

Încercările experimentale efectuate pe cuple de tip Timken, au evidențiat faptul că raza semicuplei cilindrice, r, nu poate fi identificată cu raza acesteia în zona de contact cu semicuplă plană. Aceasta se datorește deformației elastice accentuate a bucșei, ceea ce are ca efect creșterea accentuată a razei sale de curbură în zona de contact. Schematic, acest aspect este ilustrat în figura 3. Notînd cu r_1 raza bucșei nedeformate și cu r_2 raza bucșei deformate în zona de contact, se observă din figura 3*b* că $r_2 > r_1$.

Creșterea razei zonei de contact are ca efect scăderea adîncimii amprentei de uzare de la valoarea h_1 (fig. 3*a*), care ar apare în cazul neglijării deformației elastice a bucșei, la valoarea h_1 (fig. 3*b*), cu cantitatea h_2 [3], în conformitate cu relația

$$h_2 = h_1 - h. \tag{6}$$

Notînd cu l lățimea amprentei de uzare, din ΔABC rezultă

$$(2r_1 - h_1)\, h_1 = l^2/4.$$

Deoarece adîncimea h_1 este foarte mică, termenul h_1^2 are o valoare neglijabilă în raport cu celelalte mărimi și deci se poate scrie că

$$h_1 = l^2/8r_1. \tag{7}$$

Similar, din ΔFGH rezultă

$$(2r_2 - h)\, h = l^2/4.$$

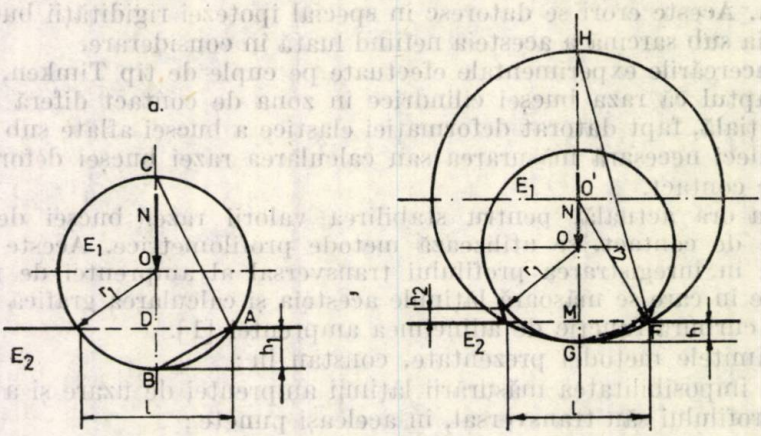


Fig. 3. — Deformarea elastică sub sarcină, a bucșei cilindrice, în zona de contact a unei cuple de tip Timken.

Operînd în același mod ca mai sus, se poate scrie :

$$h = l^2/8r_2. \tag{8}$$

Pe baza relațiilor de mai sus, rezultă

$$h_2 = \frac{l^2}{8}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) =$$

$$= l^2\,(r_2 - r_1)/8r_1r_2 = l^2/8r, \tag{9}$$

unde r reprezintă raza echivalentă :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}. \tag{10}$$

Din relația (9) rezultă expresia

$$r_1 \cdot r_2/(r_2 - r_1) = l^2/8h_2. \tag{11}$$

Considerînd cupla de frecare solicitată în domeniul elastic, cu o distribuție eliptică de eforturi, relația lui Hertz [2] pentru calculul lățimii amprentei de uzare (1), este

$$l^2/4 = 8\,Nr(1 - \nu^2)/3{,}14\,EL, \tag{12}$$

în care

ν reprezintă coeficientul lui Poisson; L — lungimea amprentei de uzare; E — modulul de elasticitate echivalent.

Notînd cu indicele 1 mărimile referitoare la semicupla cilindrică și cu indicele 2 pe cele referitoare la semicupla plană, modulul de elasticitate echivalent este dat de relația

$$1/E = 0{,}5\left(\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2}\right). \tag{13}$$

Aducînd la același numitor și introducînd valorile numerice $\nu_1 \cong \nu_2 \cong$ $\cong 0{,}3$, relația (13) devine

$$E = 2E_1E_2/0{,}91\,(E_1+E_2). \tag{14}$$

Din relația (12) rezultă expresia lățimii amprentei de uzare

$$l = 4\left[\frac{2\,Nr(1-\nu^2)}{3{,}14\,EL}\right]^{1/2}. \tag{15}$$

Introducînd în această relație expresiile modulului de elasticitate echivalent, razei echivalente și valoarea numerică a coeficientului lui Poisson, putem scrie:

$$l = 4\left[2\,N\frac{r_1r_2}{r_2-r_1}\,0{,}91^2\frac{E_1+E_2}{2.3{,}14\cdot E_1E_2}\right]^{1/2}. \tag{16}$$

Introducînd expresia (16) în relația (11), rezultă

$$h_2 = 0{,}527\frac{N(E_1+E_2)}{LE_1E_2}. \tag{17}$$

Ținînd seamă de relațiile (7) și (17), rezultă pe baza relației (6) expresia adîncimii amprentei de uzare:

$$h = \frac{l^2}{8r_1} - 0{,}527\frac{N(E_1+E_2)}{LE_1E_2}. \tag{18}$$

Considerînd amprenta de uzare ca fiind formată dintr-o sumă de sectoare de cilindri, de lungime egală, p, prin dezvoltare în serie a relației (1) și neglijarea puterilor mari, se obține pentru suprafața laterală transversală a unui sector de cilindru, expresia

$$S_i = \frac{r_i^2\varphi^3}{12}. \tag{19}$$

Înlocuind în relaţia (19) unghiul la centru prin raportul $1/r$ şi ţinînd seamă de relaţiile (10), şi (11), rezultă

$$S_i = l^3 (r_2 - r_1)/12\, r_1 r_2 = \frac{2}{3} l\, h_2. \tag{20}$$

Introducînd în expresia (20) valoarea lui h_2 dată de relaţia (17), se obţine expresia suprafeţei laterale transversale a unui sector de cilindri :

$$S_i = 0{,}351 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{N\, l}{L}. \tag{21}$$

Suprafaţa transversală medie a amprentei va fi :

$$S = 0{,}351 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{N\, l_m}{L}. \tag{22}$$

Volumul de material al elementului plan, al cuplei de frecare de tip Timken, îndepărtat prin uzare, va fi dat de relaţia

$$V_u = \sum_{i=1}^{n} S_i\, p_i \cong 0{,}351 \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} N\, l_m, \tag{23}$$

unde l_m este lăţimea medie a amprentei de uzare.

III. CONCLUZII

Comparînd relaţiile (3), (4) şi (5), obţinute în ipoteza rigidităţii perfecte a bucşei, cu relaţiile (17), (22) şi (23) care ţin seamă de deformaţia elastică sub sarcină a acesteia, se pot observa următoarele :

a) relaţiile (3), (4) şi (5) nu depind de sarcina normală aplicată cuplei, decît prin valoarea măsurată experimental a lăţimii amprentei de uzare ;

b) relaţiile (3), (4) şi (5) nu depind de constantele elastice ale materialelor în contact, E, ν, ceea ce conduce la erori foarte mari, în special în cazul cuplelor ale căror elemente sînt confecţionate din materiale cu proprietăţi elastice foarte diferite (de exemplu în cazul cuplelor material plastic/metal). Astfel, pentru toate cuplele de tip Timken, cu bucşe avînd $L = 10$ mm şi $r = 11{,}25$ mm, indiferent de natura materialelor în contact, relaţiile (3), (4) şi (5) conduc la următoarele expresii de calcul :

$$S = 0{,}00641 \cdot l_m^3 \quad [\text{mm}^2],$$

$$V_u = 0{,}0641 \cdot l_m^3 \quad [\text{mm}^3],$$

$$h_u = 11{,}25 - \sqrt{126{,}56 - \frac{l^2}{4}} \quad [\text{mm}].$$

Aplicarea relațiilor (17), (22) și (23) conduce la expresii de calcul, diferite, foarte precise, funcție de natura materialelor în contact .Astfel pentru cuplele de tip Timken oțel/oțel, relațiile practice de calcul de mai sus devin :

$$h_u = \frac{l_m^2}{8r} - 0{,}502 \cdot 10^{-5} \cdot N \quad [\text{mm}],$$

$$S = 0{,}334 \cdot 10^{-5} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^2],$$

$$V_u = 0{,}334 \cdot 10^{-4} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^3].$$

Pentru diferite cuple de tip Timken, material plastic armat cu fibre de sticlă/oțel, relațiile (17), (22) și (23) conduc la expresiile :

— Cupla : poliamidă Norylplast AVE +30% sticlă/oțel :

$$h_u = \frac{l_m^2}{8r} - 6{,}84 \cdot 10^{-5} \cdot N \quad [\text{mm}],$$

$$S = 4{,}55 \cdot 10^{-5} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^2],$$

$$V_u = 4{,}55 \cdot 10^{-4} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^3];$$

— Cupla : policarbonat LEXAN + 20% sticlă/oțel :

$$h_u = \frac{l_m^2}{8r} - 6{,}38 \cdot 10^{-5} \cdot N \quad [\text{mm}],$$

$$S = 4{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^2],$$

$$V_u = 4{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^3];$$

— Cupla : poliamidă NORYL + 20% sticlă/oțel :

$$h_u = \frac{l_m^2}{8r} - 11{,}96 \cdot 10^{-5} \cdot N \quad [\text{mm}],$$

$$S = 7{,}97 \cdot 10^{-5} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^2],$$

$$V_u = 7{,}97 \cdot 10^{-4} \cdot N\, l_m \quad [\text{mm}^3],$$

Dezvoltarea analitică prezentată permite și calculul razei bucșei deformate elastic în zona de contact al cuplei de tip Timken. Astfel, raportînd relația (7) la relația (8), obținem

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h_1}{h}.$$

Introducînd în relaţia de mai sus expresiile (7) şi (18), obţinem

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{l^2/8r_1}{\dfrac{l^2}{8r_1} - 0{,}527\, r_1 \dfrac{N(E_1 + E_2)}{L \cdot E_1 \cdot E_2}},$$

de unde rezultă expresia razei bucşei deformate elastic în zona de contact :

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - 4{,}216 \dfrac{r_1}{l^2} \cdot \dfrac{N(E_1 + E_2)}{L \cdot E_1 \cdot E_2}},$$

în care r_1 reprezintă raza bucşei nedeformate.

Dezvoltarea analitică prezentată permite obţinerea unor rezultate foarte precise, eliminînd metodele profilometrice, laborioase şi legate de incertitudinea măsurării lăţimilor amprentei în acelaşi puncte în care se înregistrează profilul transversal ca şi de aproximaţia cu care se estimează raza bucşei deformate în zona de contact. Metoda poate fi extinsă şi la alte tipuri de contacte cu distribuţie hertziană de eforturi.

Primită la redacţie la 19 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. L. CĂPITANU, *Aspecte ale influenţei deformaţiei sub sarcină a materialelor termoplastice armate cu sticlă, asupra calculului uzurii contrapiesei metalice*, Simpozionul de mecanisme şi transmisii mecanice, Reşiţa, 1979.
2. D. PAVELESCU, *Tribologie*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
3. A. D. SARKAR, *Wear of Metals*, Pergamon Press, 1976.

INFLUENȚA CONCENTRĂRII ȘI AMPLITUDINII TENSIUNII ASUPRA PROPAGĂRII FISURII LA SOLICITĂRI CICLICE LA UN OȚEL CU UN CONȚINUT SUB 0,04% CARBON

de VOICU SAFTA, TIBERIU SCHULZ, IOAN ARGHIRIADE
nstitutul de sudură și încercări de materiale, Timișoara

Se prezintă rezultatele obținute în cadrul unui program experimental mai larg privind influența concentrării și a nivelului tensiunii, la solicitare pulsantă ($R = 0$) cu amplitudine constantă, asupra fazei de inițiere și propagare a fisurii în domeniul oligo și policiclic. Cu corecții aplicate funcție de dimensiunile enclavei plastice la vîrful fisurii, se stabilește o corelație experimentală între variația factorului de intensitate a tensiunii ΔK și cinetica de propagare.
De asemenea, faza de inițiere a fisurii poate fi evaluată — la nivelul de investigare macroscopic — prin corelațiile experimentale ale numărului de cicluri de apariție a fisurii și nivelul de tensiune respectiv efectul de concentrare.

INTRODUCERE

În cadrul unui program experimental mai larg s-a studiat influența concentrării tensiunii și amplitudinii asupra fazei de inițiere și de propagare a fisurii, în condițiile stării plane de tensiune.

Programul experimental a urmărit separarea influenței următorilor parametri :

— concentrarea tensiunii, cu varierea coeficientului de concentrare teoretic între $\alpha_k = 1 \ldots 7{,}3$;

— amplitudinea tensiunii, la solicitare de întindere pulsantă ($R = 0$), cu $\sigma_{max} = 120 \ldots 200$ N/mm^2 (tensiunea nominală raportată la secțiunea netă în dreptul concentratorului).

La alegerea nivelelor de tensiune, corelate cu valorile coeficientului de concentrare teoretic, s-a urmărit plasarea fazelor de inițiere și propagare a fisurii în domeniul durabilităților oligo și policiclice ($N \leqslant 2 \cdot 10^6$ cicluri).

CONDIȚII DE EXPERIMENTARE

Încercările s-au efectuat pentru un oțel feritic cu conținut scăzut de carbon, în stare normalizată (950°C/15 min., răcire în aer). Compoziția chimică și caracteristicile mecanice principale sînt date în tabelul 1*a* și 1*b*.

Tabelul 1 a

Compoziţia chimică a oţelului investigat

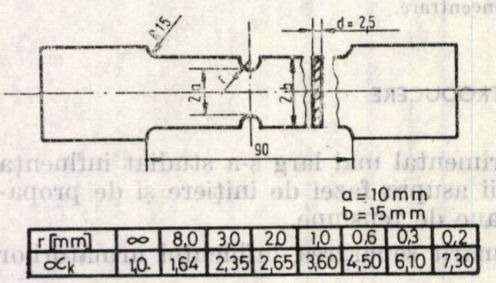
Elemente	C	Si	Mn	P	S	N_2
Conţinut [%]	0,04	0,07	0,11	0,006	0,015	0,0004

Tabelul 1 b

Principalele caracteristici mecanice ale oţelului investigat

Caracteristica mecanică	Limita de curgere R_{eL} [N/mm²]	Rezistenţa la rupere R_m [N/mm²]	Rezistenţa la rupere reală σ_m [N/mm²]	Alungirea uniformă A_u [%]	Alungirea la rupere A_5 [%]	Gîtuirea la rupere Z [%]
Valoarea	240	320	515	16,6	38	65

Pentru simularea mai apropiată a situaţiei reale, cînd fisurile de oboseală se amorsează în concentratori geometrici — constructivi sau tehnologici — care afectează elementele de rezistenţă, s-a adoptat tipul de epruvetă plată cu concentrator bilateral din figura 1.



r [mm]	∞	8,0	3,0	2,0	1,0	0,6	0,3	0,2
α_k	1,0	1,64	2,35	2,65	3,60	4,50	6,10	7,30

Fig. 1. — Epruveta plată cu concentrator bilateral, cu efect de concentrare $\alpha_k = 1{,}0 \ldots 7{,}3$

Încercările s-au efectuat pe un pulsator servohidraulic cu comandă electronică, avînd precizia măsurii/reglării forţei de 0,2%. Măsurarea lungimii fisurii s-a efectuat cu un dispozitiv optic (mărire $15 \times 15 = 225$), avînd precizia de $\pm 0{,}2\mu m$ în domeniul 0...1000 μm, respectiv $\pm$ 2 μm în domeniul peste 1000 μm.

PRELUCRAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Rezultatele experimentale primare s-au obţinut sub forma curbelor lungimea fisurii, număr de cicluri $a = f(N)$, funcţie de parametrii : nivel de tensiune σ (la amplitudine constantă) şi coeficientul de concentrare teoretic α_k. Ca date suplimentare s-au reţinut numărul de cicluri cînd se amorsează fisura N_0, respectiv numărul de cicluri la rupere N_f. În figurile 2 şi 3 sînt reprezentate spre exemplificare două familii de curbe experimentale $a = f(N)$, avînd ca parametru α_k (la σ = const. = 200 N/mm² — fig. 2), respectiv σ(la α_k = const, = 7,30 — fig. 3); curbele evidenţiază prin ordonarea lor după valorile parametrilor influenţa acestora asupra iniţierii fisurii şi cineticii de propagare.

Deși măsurarea lungimii fisurii s-a efectuat la intervale mici, rezultînd în general 20...100 puncte experimentale pentru o curbă ridicată, viteza de propagare a fisurii da/dN nu a putut fi evaluată direct prin ra-

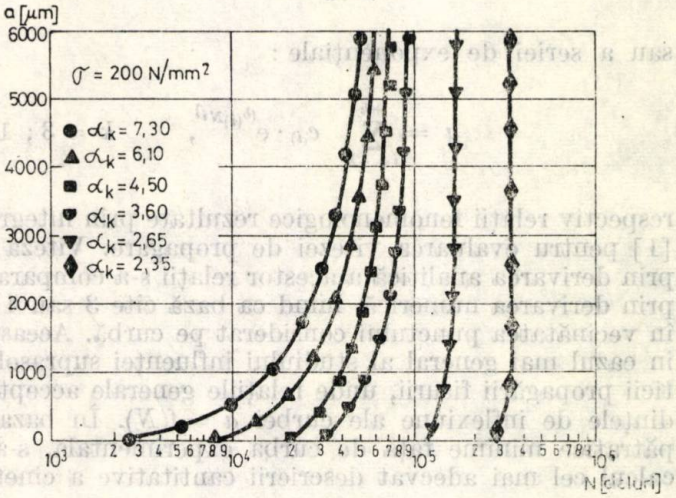


Fig. 2. — Curbele experimentale primare $a = f(N)$ pentru $\beta = 200$ N/mm², α_k parametru

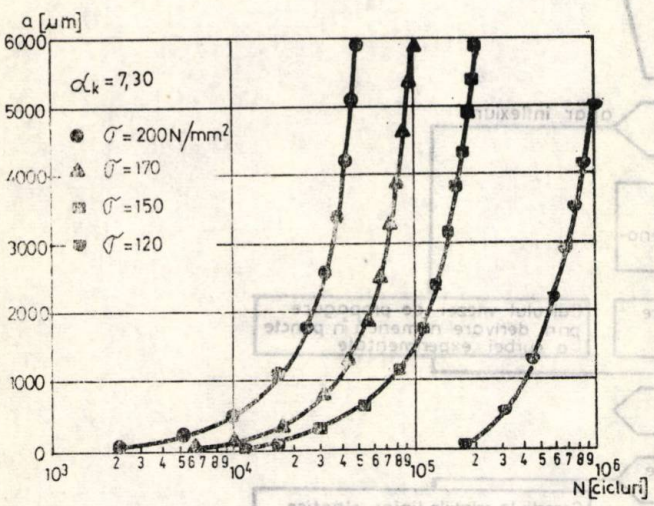


Fig. 3. — Curbele experimentale primare $a = f(N)$ pentru $\alpha_k = 7{,}3$, σ parametru

portarea creșterilor finite, datorită naturii discontinue a fenomenului de propagare a fisurii, erorile de măsurare fiind inoperante.

La prelucrarea datelor s-au luat ca bază curbele $a = f(N)$, care evidențiază clar tendința de variație a lungimii fisurii și care, după o ajustare analitică, permit deducerea prin derivare a vitezei de propagare.

Pentru ajustarea analitică a curbelor $a = f(N)$ s-au utilizat într-o primă etapă relaţiile nefenomenologice de tipul seriei de puteri

$$a = \sum_{i=-k}^{+k} c_{(i)} \cdot N^i, \qquad k = 5;\ 3;\ 1,$$

sau a seriei de exponenţiale :

$$a = \sum_{i=-k}^{+k} c_{(i)} \cdot e^{(b_{(i)}N^i)}, \qquad k = 3;\ 1,$$

respectiv relaţii fenomenologice rezultate prin integrarea relaţiilor propuse [1] pentru evaluarea vitezei de propagare. Viteza de propagare dedusă prin derivarea analitică a acestor relaţii s-a comparat cu valorile calculate prin derivarea numerică, luînd ca bază cîte 3 sau 4 puncte experimentale în vecinătatea punctului considerat pe curbă. Această metodă are valoare în cazul mai general al studiului influenţei suprasolicitărilor asupra cineticii propagării fisurii, unde relaţiile generale acceptate pot denatura tendinţele de inflexiune ale curbei $a = f(N)$. În baza criteriului abaterilor pătratice minime faţă de curba experimentală, s-a adoptat modelul de calcul cel mai adecvat descrierii cantitative a cineticii propagării fisurii.

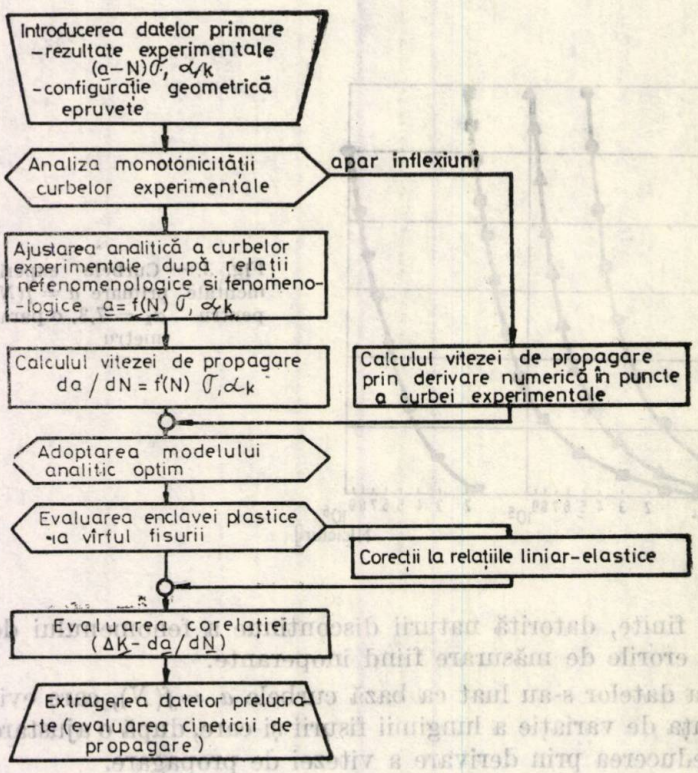


Fig. 4. — Organigrama generală a prelucrării datelor pentru evaluarea cineticii de propagare a fisurii de oboseală

Pentru deducerea variației factorului de intensitate a tensiunii ΔK în configurația geometrică dată a epruvetelor s-a utilizat relația de calcul propusă de TADA [5]. S-au aplicat corecțiile necesare pentru utilizarea relațiilor valide în teoria mecanicii ruperii liniar-elastice și în cazul apariției enclavei plastice la vîrful fisurii datorită valorilor idicate ale coeficientului de concentrare teoretic [2].

Organigrama generală a prelucrării datelor este indicată în figura 4.

Separat, datele referitoare la faza de inițiere a fisurii au fost prelucrate sub aspectul stabilirii unor corelații între numărul de cicluri pînă la apariția fisurii și nivelului tensiunii respectiv valoarea coeficientului de concentrare teoretic. Criterii cantitative pertinente pentru evaluarea procesului de inițiere, bazate pe modele ale mecanismului de nucleație a fisurii, nu au putut fi aplicate la nivelul unor cercetări macroscopice.

ANALIZA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Influența parametrilor definitorii pentru solicitare (nivelul tensiunii nominale și valoarea coeficientului de concentrare teoretic) asupra fazei de inițiere a fisurii este analizată sub forma corelației între numărul de cicluri la apariția fisurii N_0, respectiv mărimea criterială $N_0/(N_f - N_0)$ și parametrii σ și α_k(fig. 5, 6, 7). Se observă o influență relativ scăzută a factorului de concentrare asupra inițierii fisurii la nivele mai ridicate de tensiune (peste 150 N/mm^2), ceea ce se corelează direct cu extinderea și nivelul de ecruisare în zona deformată plastic la vîrful concentratorului. Doar la nivele reduse ale tensiunii, variația numărului de cicluri N_0 este mai pronunțat dependentă de efectul de concentrare, corespunzător unei extinderi mai mari a fazei I a ecruisării ciclice, care, la rîndul ei, se produce cu o rată de ecruisare mult mai scăzută și atinge mai tîrziu faza de saturație.

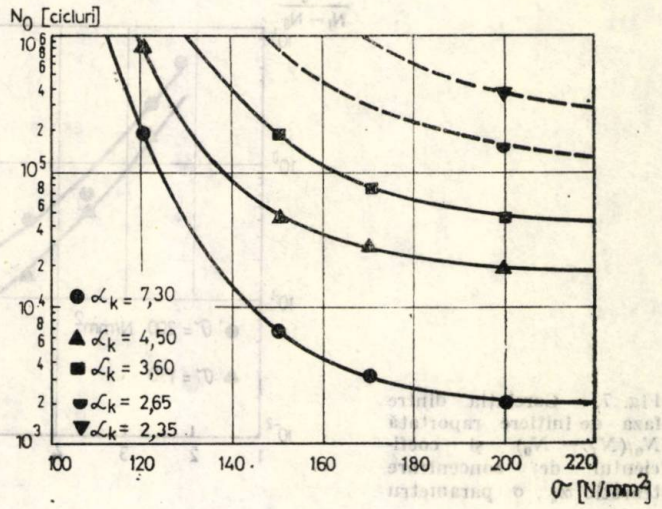


Fig. 5. — Corelația dintre numărul de cicluri N_0 corespunzător apariției fisurii și nivelului de tensiune σ, α_k parametru

Reprezentarea criterială din figura 7 demonstrează totodată influenţa pregnantă a nivelului ecruisării asupra fazei de iniţiere a fisurii, raportat la extinderea fazei de propagare ($N_f - N_0$). La variaţii ale efectului de concentrare între $\alpha_k = 3{,}00$ şi $\alpha_k = 7{,}30$, raportul dintre fazele de iniţiere şi propagare scade cu pînă la două ordine de mărime.

Cinetica propagării fisurii este evidenţiată de diagramele din figurile 8 şi 9, care reprezintă variaţia vitezei de propagare funcţie de mărimea raportată $(N - N_0)/(N_f - N_0)$, avînd ca parametru coeficientul de concentrare teoretic, respectiv nivelul tensiunii. Curbele se ordonează, în privinţa valorii cvasistabilizate a vitezei de propagare a fisurii, funcţie de

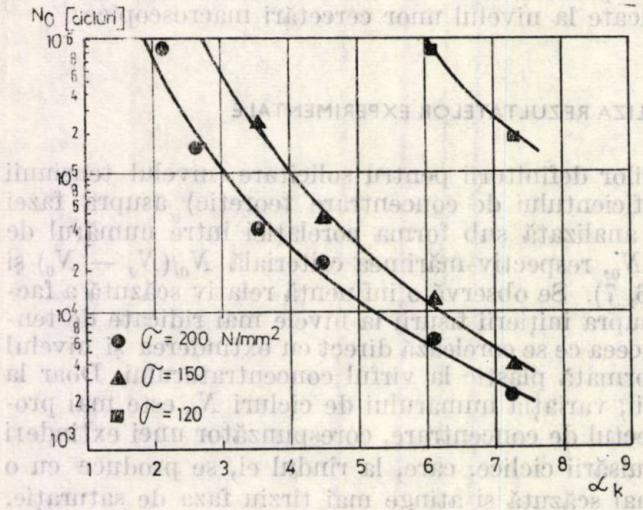


Fig. 6. — Corelaţia dintre numărul de cicluri N_0 corespunzător apariţiei fisurii şi coeficientul de concentrare teoretic α_k, σ parametru.

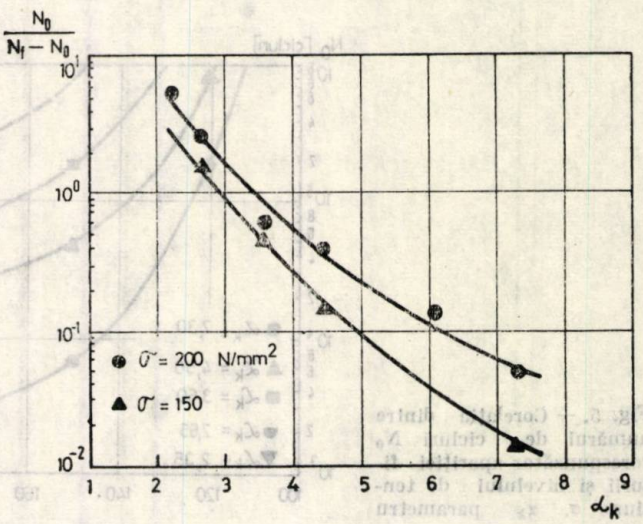


Fig. 7. — Corelaţia dintre faza de iniţiere raportată $N_0/(N_f - N_0)$ şi coeficientul de concentrare teoretic α_k, σ parametru

valorile parametrilor α_k, respectiv σ. Pe măsură ce se tinde spre o propagare intempestivă a fisurii, la același număr de cicluri raportat la extinderea globală a fazei de propagare, vitezele de propagare cresc mai pronunțat la nivele scăzute ale tensiunii, respectiv la efecte de concentrare mai slabe.

Corelația dintre variația factorului de intensitate a tensiunii și viteza de propagare, indicînd o regresie liniară în coordonate logaritmice (fig. 10), evidențiază o bună corespondență cu relația propusă de PARIS-

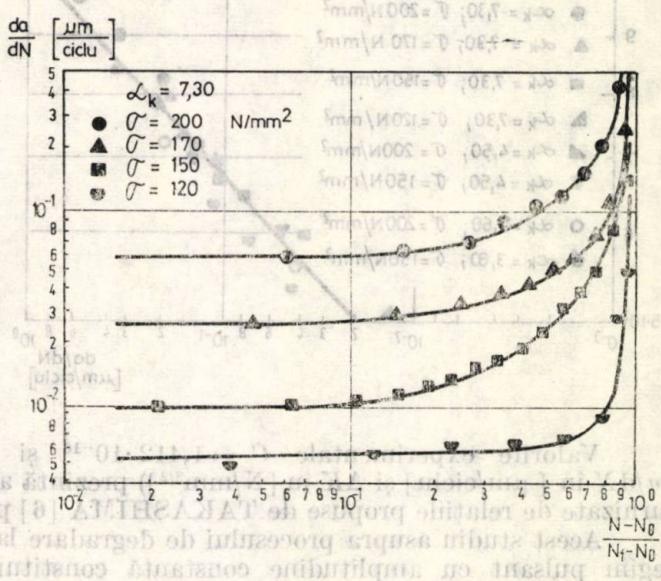


Fig. 8. — Curbele variației vitezei de propagare a fisurii pentru $\alpha_k = 7{,}3$, σ parametru

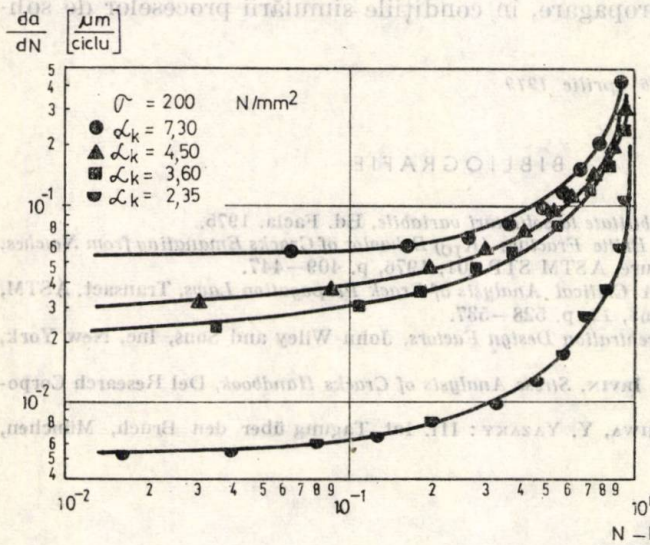


Fig. 9. — Curbele variației vitezei de propagare a fisurii pentru $\sigma = 200 N/m^2$, α_k parametru

ERDOGAN [3]:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot (\Delta K)^m$$

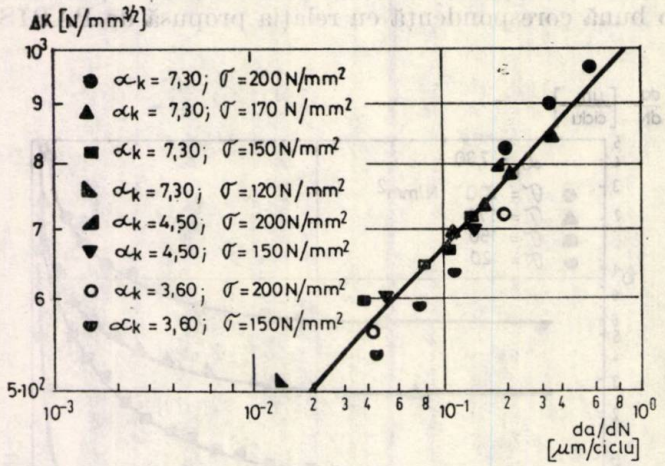


Fig. 10. — Corelația dintre variația factorului de intensitate a tensiunii, ΔK, și viteza de propagare da/dN

Valorile experimentale $C = 1{,}412 \cdot 10^{-16}$ și $m = 5{,}25$ (pentru da/dN în [μm/ciclu] și ΔK în [N/mm$^{3/2}$]) prezintă abateri față de valorile furnizate de relațiile propuse de TAKASHIMA [6] pentru oțeluri similare.

Acest studiu asupra procesului de degradare la solicitări variabile în regim pulsant cu amplitudine constantă constituie baza cercetărilor, într-un context mai larg, ale influenței suprasolicitărilor asupra inițierii fisurii și a cineticii de propagare, în condițiile simulării proceselor de solicitare reale.

Primită la redacție la 26 aprilie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. D. Cioclov, *Rezistență și fiabilitate la solicitări variabile*, Ed. Facla. 1975.
2. S.R. Novak, J. M. Barsom, *Britte Fracture (K_{IC}) Behavior of Cracks Emanating from Notches*, Cracks and Fracture, ASTM STP 601, 1976, p. 409—447.
3. P. C. Paris, E. Erdogan, *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws*, Transact. ASTM, J. Basic Eng., 1963, *12*, p. 528—537.
4. R. E. Peterson, *Stress Concentration Design Factors*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1953.
5. H. Tasa, P. C. Paris, G. R. Irvin, *Stress Analysis of Cracks Handbook*, Del Research Corporation, 1973.
6. J. Takashima, H. T. Urashiwa, Y. Yazaky: III. Int. Tagung über den Bruch, München, 1973.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 38 1979

INDEX ALFABETIC

ACKER, CONSTANTIN, Solicitări statice în motorul liniar cu piston, avînd cursa pistoanelor verticală 2 251

ACKER, CONSTANTIN, Model mecanic al solicitărilor statice pentru motorul liniar cu piston în care cursa pistoanelor este verticală 6 901

AMZA, GHEORGHE, PETRE GRADCOV, Cercetări asupra strunjirii în cîmp ultrasonor 2 341

ANGHEL, ALEXANDRU v. POSEA, NICOLAE 6 885

ARGHIRIADE, IOAN v. SAFTA, VOICU 6 915

BĂNUŢ, VALERIU, Calculul geometric neliniar al structurilor spaţiale formate din bare 2 259

BOB, CORNELIU, VALENTIN BOTA, TUDOR CLIPII, Calculul dalelor ortotrope prin metoda fişiilor finite 3 425

BORCIA, ECATERINA, Modelarea comportării mecanice a masivelor de pămînt în sensul teoriei curgerii plastice 6

BOTA, VALENTIN v. BOB, CORNELIU 3 425

BRATU, POLIDOR, Dinamica maşinilor compactoare vibratoare autropropulsate mixte 3 449

CALOTĂ, NICOLAE, Cercetări privind dinamica procesului de introducere a materialului tubular în sondă 6 873

CĂPITANU, LUCIAN, Cercetări privind comportarea la frecare şi uzare a dozatorilor celulari pentru evacuarea cenuşii de şist din electrofiltre 2 331

CĂPITANU, LUCIAN, Influenţa deformaţiei elastice a elementului cilindric, asupra calculului uzurii elementului plan al unei cuple de frecare de tip Timken . . 6 907

CÎRTOAJE, VASILE, Caracterizarea în domeniul frecvenţei a sistemelor liniare continue, invariante în timp, cu funcţii indiciale de tip exponenţial-polinominal 1 53

CODREANU, CONSTANTIN v. OPREAN, AUREL 5 731

COLIBAN, VIRGIL v. SETEANU, ION 3 357

CONONOVICI, SERGIU v. MANAFI, NICULAE 2 219

CONONOVICI, SERGIU v. MANAFI, NICULAE 6 731

CLIPII, TUDOR v. BOB, CORNELIU 3 425

CREŢU, ION, Modelări numerice ale mişcării petrolului şi gazelor în medii poroase, în condiţiile transferului masic interfazic 5 629

CRISTIAN, IOAN v. IVAN MIRCEA 4 603

DINCĂ, FLOREA, O. GÜNDISCH, V. NICOLAE, T. SIRETEANU, I. ROŞU, Amortizoare secvenţiale pentru autovehicule 1 89

DUMITRESCU, HORIA, O familie biparametrică de profile laminare de viteză . 6 817

DUMBRAVĂ, MIRCEA A., Elemente de teoria grafurilor aplicate în studiul şi interpretarea fenomenelor de curgere din lagărele hidrostatice 2 305

DUMBRAVĂ, MIRCEA A., Aprecieri asupra stabilirii caracterului curgerii într-un lagăr hidrostatic radial 3 465

ST. CERC. MEC. APL., TOM 38, NR. 6, 1979, P. 923–925

11–c. 1556

FLORIAN, VIRGILIU, VIRGILIU TALLE, SPERANȚA PRODAN, Calculul cablelor încărcate cu sarcini uniform repartizate în lungul lor și cu forțe concentrate 4 487
FRANGOPOL, DAN, JACQUES RONDAL, Combinarea optimă a siguranței și economiei în dimensionarea structurilor 2 299
FRANGOPOL, DAN, Optimizarea probabilistă cu valori discrete a structurilor metalice în domeniul plastic 3 419
FRANGOPOL, DAN, Concepte probabiliste în optimizarea structurilor .I 4 519
FRANGOPOL, DAN, Concepte probabiliste în optimizarea structurilor. II 5 695
GEORGESCU, EMIL, Utilizarea procedeelor seismice la determinarea caracteristicilor mecanice ale terenurilor de fundație și la microzonarea seismică a amplasamentelor 4 595
GLADCOV, PETRE, Cercetări asupra strunjirii în cîmp ultrasonor 2 341
GÜNDISCH, ORTWIN v. DINCĂ, FLOREA 1 89
GÜNDISCH, ORTWIN v. SIRETEANU, TUDOR 1 75
GÜNDISCH, ORTWIN v. SIRETEANU, TUDOR 3 435
HALANAY, ARISTIDE, MIHAIL POPESCU, Analiza stabilității hidraulice generale de funcționare la regimuri tranzitorii a uzinelor hidroelectrice prevăzute cu unul sau două castele de echilibru, prin metoda funcției Liapunov 1 3
HORNEA, VALERIU v. SIRETEANU, TUDOR 3 435
HOTEA, GHEORGHE v. POSEA, NICULAE 6 885
IEREMIA, MIRCEA v. NICOLAU, ALEXANDRU 5 681
IONESCU, FLORIN, Elemente de analiză matriceală a dinamicii conexiunilor de motoare hidraulice rotative 1 41
IVAN, MIRCEA, IOAN CRISTIAN, Creșterea temperaturii electrolitului în zona de lucru, un nou criteriu de stabilire a vitezei de avans la prelucrarea electrochimică 4 603
JARCA, ȘTEFAN, Calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale cu comportare viscoelastică 2 287
KÜMBETLIAN, GARABET, Influența grosimii asupra cîmpurilor mărimilor fizice ale barelor și plăcilor groase 1 99
MACOVEI, NECULAI, Curgerea unui fluid binghaman la deplasarea axială relativă a doi cilindri circulari coaxiali 3 371
MACOVEI, NECULAI, Mișcarea unui fluid binghaman la deplasarea axială relativă a doi cilindri circulari coaxiali — Situații posibile 6 839
MANAFI, NICULAE, S. CONONOVICI, Algoritme pentru calculul pozițional și cinematic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale binare, utilizate în programul general CINCINET 2 219
MANAFI, NICULAE, SERGIU CONONOVICI, Algoritme pentru calculul cinetostatic al mecanismelor formate pe baza grupelor structurale binare, utilizate în programul CINCINET 6 847
MANOLESCU GORUN, O încercare de formalizare a abordării top-down-structurate a produselor informatice cu aplicare la cercetarea-proiectarea tehnică și tehnologică 5 741
MARINOV, ANCA v. SETEANU, ION 5 619
MUNTEANU, MIRCEA, Asupra unei probleme plane de contact 5 661
DAHLIK, ADALBERT, ALEXANDRU PASTIA, Metodă exactă pentru echilibrarea rotorilor în două plane 2 237
AICA, ALEXANDRU v. ȚURCANU, COSTICĂ 1 125
NICOLAE, VIOREL v. DINCĂ, FLOREA 1 89
NICOLAU, ALEXANDRU, MIRCEA IEREMIA, Studiul voalării plăcilor plane prin metode interative de calcul 5 681
OPREAN, AUREL, CONSTANTIN CODREANU, Cercetări privind dinamica sistemelor hidraulice de acționare cu acumulator 5 731
ORĂȘANU, MIRCEA T., Asupra mișcărilor nestaționare cu suprafața liberă printr-un masiv poros neomogen de tipul III 2 209
ORĂȘANU, MIRCEA T., Asupra unei mișcări în fregvența infiltrației 3 383
ORĂȘANU, MIRCEA T., Asupra mișcării printr-un baraj permeabil omogen și izotrop 6 791
OROVEANU, TEODOR, AL. D. STAN, Mișcarea unui fluid printr-un tub cu pereți permeabili 1 29

OROVEANU, TEODOR, AL. D. STAN, Considerații asupra regimului termic în mișcarea gazelor prin conducte 2 197
OROVEANU, TEODOR, B. SIRO, Asupra unor posibilități de optimizare a transportului succesiv de produse petroliere 3 393
PASTIA, ALEXANDRU v. NAHLIK, ADALBERT 2 237
PAVEL, ALECSANDRU, Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice I. . 4 537
PAVEL, ALECSANDRU, Pretensionarea tendoanelor rezervoarelor sferice. II . . 5 717
PĂRĂIANU, PETRU-SORIN v. SIRETEANU, TUDOR 1 75
PĂRĂIANU, PETRU-SORIN v. SIRETEANU, TUDOR 3 435
POPA, CONSTANTIN GH., Asupra condițiilor la limită și inițiale în dezlocuirea imiscibilă a țițeiului cu un amestec bifazic gaze-apă 6 807
POPA RADU v. SETEANU, ION 1 21
POPA, RADU v. SETEANU, ION 3 357
POPA, RADU v. SETEANU, ION 5 619
POPESCU, MIHAI, Studiul manevrelor optime ale vechiculelor spațiale în apropierea punctelor de librație din sistemul Pământ-Lună 5 649
POPESCU, MIHAIL v. HALANAY, ARISTIDE 1 3
POSEA, NICOLAE, N. TATU, GH. ZECHERU, AL. ANGHEL, GH. HOTEA, Criterii și metode pentru calculul corpurilor prevenitoarelor de erupție orizontale duble 6 885
PRODAN, SPERANȚA v. FLORIAN, VIRGILIU 4 487
RAȘEEV, DUMITRU, EMIL TOCACI, Aspecte privind studiul mișcării sapelor de foraj 1 155
RĂUȚĂ, MIHAI v. SIRETEANU, TUDOR 1 75
ROCO, MIHAIL, Evoluția caracteristicilor de funcționare ale instalațiilor de hidrotransport a zgurei și cenușii în timpul exploatării. II 4 567
RONDAL, JACQUES v. FRANGOPOL, DAN 2 299
ROȘU, IULIAN v. DINCĂ, FLOREA 1 89
SAFTA, VOICU, TIBERIU SCHULZ, IOAN ARGHIRIADE, Influența concentrării și amplitudinii tensiunii asupra propagării fisurii la solicitări ciclice la un oțel cu un cuțit sub 0,04 % carbon 6 915
SCHULZ, TIBERIU v. SAFTA, VOICU 6 915
SETEANU, ION, R. POPA, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. II. Efectul formei secțiunii transversale a curgerii 1 21
SETEANU, ION, V. COLIBAN, R. POPA, Analiza influenței pulsațiilor curgerii turbulente asupra erodării albiilor 3 357
SETEANU, ION, R. POPA, A. MARINOV, Amortizarea undelor de suprafață în albii deschise 5 619
SIDON, SERGIU v. VASILESCU, CĂLIN ADRIAN 4 557
SILVESTRU, CONSTANTIN v. ZĂTREANU, GHEORGHE 1 141
SIRETEANU, TUDOR, C. TEODOSIU, O. GÜNDISCH, M. RĂUȚĂ, S. PĂRĂIANU Studiul caracteristicilor de lucru ale amortizoarelor hidraulice 1 75
SIRETEANU, TUDOR, O. GÜNDISCH, S. PĂRĂIANU, V. HORNEA, Influența reglajului caracteristicii de amortizare la viteze mici de lucru asupra confortului și aderenței roată-sol 3 435
SIRETEANU TUDOR, v. DINCĂ FLOREA 1 89
SIRO, BORIS v. OROVEANU, TUDOR 3 393
SOARE, MIRCEA V., O propunere de codificare a teoriilor din mecanica construcțiilor. 1 107
STAN, ALECSANDRU D., Curgerea laminară a fluidelor în spații inelare . . . 5 637
STAN, ALECSANDRU D., Mișcări turbulente prin spații inelare 6 825
STAN, ALECSANDRU D. v. OROVEANU, TUDOR 1 29
STAN, ALECSANDRU D. v. OROVEANU, TUDOR 2 197
STAN, MIHAI D., Studiul curgerii unui fluid perfect incompresibil în jurul unui cilindru poros slab deformat 2 187
STAN, MIHAI D., Asupra ecuațiilor de mișcare într-un mediu poros micropolar deformabil 6 765
STANCIU, ȘTEFAN, Lagăre radiale hidrostatice echipate cu drosele din materiale sinterizate 2 317
STANCIU, ȘTEFAN, Caracteristicile lagărelor radiale hidrostatice alimentare prin droselul capilar circumferențial multiplu 3 471
STEMATIU, DAN v. STERE, CONSTANTIN 6 773

STERE, CONSTANTIN, DAN STEMATIU, Modelarea prin metoda elementelor finite a oscilațiilor libere ale suprafețelor de apă 6 773
STERE, MARCEL D., Calculul deformațiilor mari ale plăcilor folosind metoda relaxării dinamice 2 273
TALLE, VIRGILIU v. FLORIAN, VIRGILIU 4 487
TATU, NECULAI v. POSEA, NICOLAE 6 885
TEODOSIU, CRISTIAN v. SIRETEANU, TUDOR . . . . . .
TOCACI, EMIL, Aspecte ale efectului forțelor percutante și ale dinamicii particulei de masă variabilă, în cazul relativist 1 75
2 175
TOCACI, EMIL v. RAȘEEV, DUMITRU 1 155
TURCOIU, TITI v. VASILESCU, CĂLIN ADRIAN . . . . . .
ȚURCANU, COSTICĂ, AL. NICA. Modele analitico-cinetice pentru evaluarea emisiilor poluante de la turbomotoarele de aviație ; tehnici de limitare 4 557
VASILESCU CĂLIN ADRIAN, T. TURCOIU, S. SIDON, Analiza efectelor neuniformității injecției asupra încărcării arborelui cotit al motorului Diesel
ZĂTREANU, GHEORGHE, CONSTANTIN SILVESTRU, Echilibrajul forțelor de inerție la motoarele in H 1 125
4 557
ZECHERU, GHEORGHE v. POSEA, NICOLAE 1 141
ZECHERU, GHEORGHE v. POSEA, NICOLAE 6 885

MIHAI D. STAN

ASUPRA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE ÎNTR-UN MEDIU POROS MICROPOLAR DEFORMABIL

Folosindu-se un procedeu de mediere bazat pe teoria distribuțiilor se construiește un model al curgerii unui fluid viscos printr-un mediu poros micropolar deformabil.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 6, 1979, p. 765—771
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CONSTANTIN STERE, DAN STEMATIU

MODELAREA PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE A OSCILAȚIILOR LIBERE ALE SUPRAFEȚELOR DE APĂ

Calculul stării de oscilație proprie a suprafețelor de apă, de forme și adîncimi oarecare, reprezintă o problemă cu aplicabilitate inginerească deosebită. Evaluarea răspunsului dinamic al unor volume de apă, în stare de excitație forțată — constituită practic de acțiunea cutremurelor, a valurilor sau a altor factori perturbatori — , se face pe baza cunoașterii acestei stări de oscilație liberă sau naturală. În lucrare se prezintă un model matematic și algoritm de calcul al acestei stări de oscilație liberă, dezvoltate pe baza metodei energetice variaționale Ritz-Galerkin, cu o discretizare a cîmpului suprafeței libere în elemente finite. Metoda permite abordarea suprafețelor cu contururi închise sau deschise, care acoperă practic toată gama construcțiilor hidrotehnice.

St. cerc. mec. apl., tom. 38, nr. 6, 1979, p. 773—789
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA ORĂȘANU

ASUPRA MIȘCĂRII PRINTR-UN BARAJ PERMEABIL OMOGEN ȘI IZOTROP

Studiul mișcărilor de filtrație cu suprafață liberă și umedă prezintă dificultăți deosebite din punct de vedere matematic. Ele conduc la probleme limită de tip sistem pentru două funcții analitice pe porțiuni [1]. Dificultățile provin din faptul că nu avem o metodă generală de a găsi efectiv soluția problemei amintite. Există cazuri cînd astfel de probleme au fost rezolvate prin utilizarea teoriei analitice a ecuațiilor diferențiale [2].
În lucrarea de față ne propunem să studiem mișcarea de filtrație către un masiv poros cu talpa impermeabilă orizontală, situată la adîncime finită.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 791—805
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CONSTANTIN GH. POPA

ASUPRA CONDIȚIILOR LA LIMITĂ ȘI INIȚIALE ÎN DEZLOCUIREA IMISCIBILĂ A ȚIȚEIULUI CU UN AMESTEC BIFAZIC GAZE-APĂ

Lucrarea tratează problema curgerii multifazice prin mediile poroase în cazul dezlocuirii țițeiului cu un amestec bifazic gaze-apă. În acest scop la teoria prezentată într-o lucrare anterioară se fac modificările care privesc condițiile la limită și cele inițiale. Soluția este aflată tot prin metoda caracteristicilor, prezentîndu-se pentru exemplificare și o aplicație concretă.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 807—815
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

OSCILATIILE LIBERE ALE SUBANSAMBLELOR DE AVE

MODELAREA PRIN METODA ELEMENTELOR FINITE A

CONSTANTIN GH. POPA

Calculul static al osaturilor plane a subansamblelor de aripa de forma si
dimensiuni oarecare, reprezinta o problema de obligatoriu studiu
pentru constructorii de avioane. Elementele tridimensionale dinamice ale unor aripi
de forma geometrica complexa, constituie baza de pornire
pentru calculul matricelor de rigiditate si masa ale subansamblelor aripa cu motoare.
Pe baza acestora se pot determina frecventele proprii si formele modale de oscilatie
ale subansamblelor aripa-motor, precum si deplasarile, vitezele si acceleratiile
oricarui punct de pe suprafata lor. Pentru determinarea frecventelor proprii
si a formelor modale de oscilatie libera, pentru subansamblele aripa-motor
cu cuplaj inertial, se foloseste metoda iteratiei inverse cu deplasari succesive
pentru doua constructii diferite.

Studii și cercetări de mecanică aplicată, tom 32, nr. 6, p. 1123–1129, București, 1973

MICROPOLAR DEFORMABIL

ASUPRA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE ÎNTR-UN MEDIU POROS

MIRCEA ORĂȘANU

Se construiește un model de mediu deformabil care are drept caz particular
mediul poros studiat de Biot [1]. Ecuațiile de mișcare pentru un mediu
poros micropolar deformabil
Formulându-se un procedeu de modelare pentru problema dinamicii
elastice a mediilor poroase [2] se obține un model mai general decît
cel al lui Biot [1]. Diferențierea ce apare constă în faptul că în
cazul de față nu se neglijează în ecuațiile de mișcare ale fazei
solide termenii ce conțin derivatele în raport cu timpul ale
vectorului de rotație [3].
Pentru un mediu poros cu pori temporar închiși elaborarea
unui model de asemenea natură prezintă un deosebit interes
practic. Astfel de probleme au fost tratate pînă acum în
literatura de specialitate [4] numai în cazul unui mediu
elastic omogen și izotrop.

Studii și cercetări de mecanică aplicată, tom 32, nr. 6, p. 1131–1137, București, 1973

O FAMILIE BIPARAMETRICĂ DE PROFILE LAMINARE DE VITEZĂ

În lucrare se propune pentru stratul limită laminar incompresibil, bidimensional, o familie de profile, care depinde de doi parametri : parametrul binecunoscut al lui „Pohlhausen" $\lambda = \delta^2/\nu \, dU/d_e x$, care ține seama de gradientul longitudinal de presiune și un al doilea parametru, $\zeta = \frac{\delta^3}{\mu U_e}\left(\frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2}\right)$, care ține seama de gradientul transversal de presiune, la perete. Această familie de profile acoperă o mare varietate de situații de curgere, accelerate și frînate pînă la desprindere.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 817—824
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

ALEXANDRU D. STAN

MIȘCĂRI TURBULENTE PRIN SPAȚII INELARE

Sînt multe situații în tehnică, cum ar fi în cea petrolieră, unde se întîlnesc mișcări turbulente prin spații inelare. Un asemenea caz ar putea fi la mișcarea fluidelor în spațiul creat de coloana de exploatare și coloana țevilor de extracție. De cele mai multe ori spațiile inelare formate sînt cu excentricități constante sau variabile. Pierderea de presiune în spațiul inelar este mai mare decît într-un tub cu secțiunea circulară dacă în ambele este același regim de curgere. Coeficientul de rezistență, deci și pierderea de presiune, este mai mic într-un spațiu inelar excentric decît în cel fără excentricitate. Efortul de forfecare pe cilindrul cu raza mai mică care formează spațiul inelar este mai mare decît efortul de forfecare de pe cilindrul cu raza mare al spațiului inelar. Rezultatele experimentale sînt în bună concordanță cu cele teoretice.

St. cerc. mec. apl.,tom 38, nr. 6, 1979 ,p. 825—837
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

N. MACOVEI

MIȘCAREA UNUI FLUID BINGHAMIAN LA DEPLASAREA AXIALĂ RELATIVĂ A DOI CILINDRI CIRCULARI COAXIALI — SITUAȚII POSIBILE—

În această lucrare sînt descrise situațiile ce pot surveni la deplasarea longitudinală relativă a doi cilindri coaxiali plini cu un fluid de tipul Binghamian. Ele decurg din prezența unei tensiuni limită sub a cărei valoare curgerea nu poate avea loc. Astfel, dacă secțiunea transversală a interiorului tubului central este mică în raport cu cea a spațiului inelar, fluidul din interior este antrenat (sau rămîne în repaus) o dată cu tubul interior, iar curgerea există doar în exteriorul lui. Dimpotrivă, dacă spațiul dintre tuburi este îngust, fluidul se va mișca în sens opus deplasării tubului mobil doar prin interiorul acestuia.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 839—846
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

NICULAE MANAFI, SERGIU CONONOVICI

ALGORITME PENTRU CALCULUL CINETOSTATIC AL MECANISMELOR FORMATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE BINARE, UTILIZATE ÎN PROGRAMUL GENERAL CINCINET

În cadrul prezentei lucrări se continuă prezentarea principiilor și algoritmelor care au stat la baza elaborării programului general CINCINET destinat calculului cinematic și cinetostatic automatizat al mecanismelor plane formate pe baza grupelor structurale binare.
În strictă corelație cu algoritmele pentru calculul pozițional și cinematic, publicate anterior, în lucrare sînt prezentate algoritmele pentru calculul cinetostatic elaborate de autori, incluse integral în programul CINCINET.
Se utilizează o formă de prezentare și de sistematizare adecvată a algoritmelor pentru a facilita utilizarea lor și cu ajutorul mini calculatoarelor.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 847—862
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

Revista: Bucureşti, str. Const. Miile nr. 12
Şt. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 6, 1979, p. 811–854

MIŞCAREA UNUI FLUID BINGHAMIAN LA DEPLASAREA AXIALĂ

N. MACOVEI

REFERITOR LA DOI CILINDRI CIRCULARI COAXIALI

— SITUAŢII POSIBILE —

In acestă lucrare sînt descrise situaţiile ce pot survenl la deplasarea longitudinală relativă a doi cilindri coaxiali, fluid cu un fluid de tipul Bingham. Se decelă din prezenta analiză, pasul limită sub a cărei valoare curgerea nu poate avea loc. Ştiind, dacă secţiunea transversală a interstiţiului tubului central este mică în raport cu cea a spaţiului inelar, fluidul din interior este antrenat (sau rămîne în repaus) numai în cazul în care, pasul de deplasare este mai mare decît pasul limită. Dacă se va o dată cu tubul interior, far curgerea extrăgă, dacă în exterior fluidul se va deplasa cu tubul interior, far curgerea extrăgă, dacă în exterior fluidul se va mişca în sens opus deplasării tubului mobil doar prin interiorul tubului central.

Revista: Bucureşti, str. Const. Miile nr. 12
Şt. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 6, 1979, p. 855–870

O FAMILIE DE PARAMETRICĂ DE PROFILE LAMINARE DE VITEZĂ

In lucrare se propune pentru stratul limită laminar incompresibil, un model de profil, care depinde de doi parametri: parametrul adimensional al lui Nikuradse $y = \frac{y}{\delta}$ care este un sens de gradient transversal de presiune, la perete. Această familie de profile acoperă o mare varietate de situaţii de curgere: accelerate şi frînate pînă la desprindere.

parametru $\gamma = \frac{\nu_1^{\alpha}}{\delta_2}\left(\frac{\delta_2^{\alpha}}{\nu_2^{\alpha}}\right)$ care este sensul de gradient transversal de presiune şi nu al doilea parametru adimensional al lui Nikuradse $y = \frac{y}{\delta}$ care depinde de doi parametri: γ şi δ.

Revista: Bucureşti, str. Const. Miile nr. 12
Şt. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 6, 1979, p. 871–884

MIŞCĂRI TURBULENTE PRIN SPAŢII INELARE

Mişcarea turbulentă a fluidelor prin spaţii inelare, cu mişcare axă, sînt mult mai puţin studiate, cum ar fi în cea perfectă, unde se pot obţine mişcări turbulente prin spaţii inelare. Un element axă, pentru calculul cinetostatic al unor structuri spaţiale, este un program de calculator care se utilizează o formă de prezentare şi de sistematizare adecvată a programului CINCINET.

Revista: Bucureşti, str. Const. Miile nr. 12
Şt. cerc. mec. apl., tom 28, nr. 6, 1979, p. 885–898

ALGORITME PENTRU CALCULUL CINETOSTATIC AL MECANISMELOR FORMATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE BINARE, UTILIZATE ÎN PROGRAMUL GENERAL CINCINET

MIHAI-SERGIU CONSTANTINESCU

In cadrul prezentei lucrări se continuă prezentarea principiilor şi algoritmilor care au stat la baza elaborării programului general CINCINET, destinat calculului cinematic şi cinetostatic automatizat al mecanismelor plane formate de baza elementelor structurale binare.

ECATERINA BORCIA

MODELAREA COMPORTĂRII MECANICE A MASIVELOR DE PĂMÎNT ÎN SENSUL TEORIEI CURGERII PLASTICE

Se prezintă elementele de bază ale teorie curgerii plastice. Se formulează cadrul ipotetic în care se dezvoltă modelul elastoplastic pentru pămînturi. Se stabilesc forme proprii masivelor de pămînt pentru condiția de ecruisare, criteriul de încărcare-descărcare, relația tensiune-deformație.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 863—871
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

N. CALOTĂ

CERCETĂRI PRIVIND DINAMICA PROCESULUI DE INTRODUCERE A MATERIALULUI TUBULAR ÎN SONDĂ

În prezenta lucrare este studiată dinamica sistemului elastic cuprinzînd ansamblul instalației de suprafață — material tubular — sondă în timpul proceselor de manevră cu particularizarea pentru operația de coborîre. Sistemul real este echivalent cu un model mecanic cu parametri distribuiți liniar neparametric, alcătuit din două mase concentrate reunite printr-o legătură elasto-disipativă cu masă. Modelul mecanic aferent, constînd dintr-o ecuație diferențială cu derivate parțiale de ordinul trei, este rezolvat prin metoda Bernoulli-Fourier și cu utilizarea ecuațiilor Lagrange de speța a II-a, în coordonate generalizate.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 873—884
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

N. POSEA, N. TATU, GH. ZECHERU, AL. ANGHEL, GH. HOTEA

CRITERII ȘI METODE PENTRU CALCULUL CORPURILOR PREVENITOARELOR DE ERUPȚIE ORIZONTALE DUBLE

Pe baza criteriilor constructive, tehnologice și de rezistență, lucrarea fundamentează o metodă pentru predimensionarea și verificarea rezistenței corpurilor prevenitoarelor de erupție orizontale duble.
Metoda de calcul elaborată s-a aplicat pentru un tip curent de prevenitor care a fost încercat experimental. Datele experimentale confirmă în mod satisfăcător rezultatele teoretice, ceea ce constituie o verificare concludentă a algoritmului stabilit.
Ținînd seama de defectele care apar la turnarea corpurilor prevenitoare, se prezintă, de asemenea, o metodologie de calcul bazată pe criteriile mecanicii ruperii.
Rezultatele obținute au permis formularea unor propuneri pentru optimizarea dimensiunilor prevenitorarelor analizate.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 885—900
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CONSTANTIN ACKER

MODELUL MECANIC AL SOLICITĂRILOR STATICE PENTRU MOTORUL LINIAR CU PISTON ÎN CARE CURSA PISTOANELOR ESTE VERTICALĂ

Cu mijloacele mecanicii teoretice clasice se efectuează sondajul proprietăților statice ale motorului Balandin (denumit motor liniar cu piston, în ultima vreme), relevîndu-se calități — teoretice — excepționale din acest punct de vedere, deplin concordante cu rezultatele experimentale surprinzătoare obținute de Balandin în privința randamentului mecanic (94%) și a fiabilității înalte (circa 3/2 față de cea a motorului tip bielă-manivelă) ale noului motor.
Blocarea preocupărilor din țară, în privința motorului liniar cu piston, datorată lipsei cunoașterii mecanismului de producere a solicitărilor statice în noul motor, este complet îndepărtată prin rezultatele cuprinse în lucrarea de față.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 901—906
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CERCETĂRI PRIVIND DINAMICA PROCESULUI DE INTRODUCERE A MATERIALULUI TUBULAR ÎN SONDĂ

M. CALOTĂ

MODELAREA COMPORTĂRII MECANICE A MASIVELOR DE PĂMÂNT ÎN SENSUL TEORIEI CUREREA PLASTICE

CRITERII ŞI METODE PENTRU CALCULUL CORNURILOR PREVENITOARELOR DE ERUPŢIE ORIZONTALE DUBLE

MODELUL MECANIC AL SOLICITĂRILOR STATICE PENTRU MOTORUL LINIAR CU PISTON ÎN CARE CAUZA PISTOANELOR ESTE VERTICALĂ

LUCIAN CĂPITANU

INFLUENȚA DEFORMAȚIEI ELASTICE A ELEMENTULUI CILINDRIC, ASUPRA CALCULULUI UZURII ELEMENTULUI PLAN AL UNEI CUPLE DE FRECARE DE TIP TIMKEN

Metoda amprentei de uzare și variantele acesteia, utilizate în general ca metode de bază în calculul uzurii elementelor cuplelor de frecare, cu contacte hertziene, nu țin seamă în suficientă măsură de proprietățile elastice ale materialelor elementelor în contact și de influența deformației sub sarcină a acestora asupra vitezei lor de uzare. Lucrarea prezintă o nouă metodă analitică de calcul a vitezei de uzare a elementului plan al unei cuple de tip Timken, cu luarea în considerare a deformației elastice sub sarcină a cuplei de frecare și a constantelor elastice ale materialelor în contact.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 907—914
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

VOICU SAFTA, TIBERIU SCHULZ, IOAN ARGHIRIADE

INFLUENȚA CONCENTRĂRII ȘI AMPLITUDINII TENSIUNII ASUPRA PROPAGĂRII FISURII LA SOLICITĂRI CICLICE LA UN OȚEL CU UN CONȚINUT SUB 0,04% CARBON

Se prezintă rezultatele obținute în cadrul unui program experimental mai larg privind influența concentrării și a nivelului tensiunii, la solicitarea pulsantă ($R = 0$) cu amplitudine constantă, asupra fazei de inițiere și propagare a fisurii în domeniul oligo și policiclic. Cu corecții aplicate funcție de dimensiunile enclavei plastice la vîrful fisurii, se stabilește o corelație experimentală între variația factorului de intensitate a tensiunii (ΔK) și cinetica de propagare.
De asemenea, faza de inițiere a fisurii poate fi evaluată — la nivelul de investigare macroscopic — prin corelațiile experimentale alenumărului de cicluri de apariție a fisurii și nivelul de tensiune respectiv efectul de concentrare.

St. cerc. mec. apl., tom 38, nr. 6, 1979, p. 915—922
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

LUCIAN CĂPITANU

INFLUENȚA DEFORMAȚIEI ELASTICE A ELEMENTULUI CILINDRIC, ASUPRA CALCULULUI UZURII ELEMENTULUI PLAN AL UNEI CUPLE DE FRECARE DE TIP TIMKEN

Metoda amprentei de uzare și variantele acestei utilizate în general ca metode de bază în calculul uzurii elementelor cuplelor de frecare, cu contacte hertziene, nu țin seamă în suficientă măsură de proprietățile elastice ale materialelor elementelor în contact și de influența deformației sub sarcină a acestora asupra vitezei lor de uzare. Lucrarea prezintă o nouă metodă analitică de calcul a vitezei de uzare a elementului plan al unei cuple de tip Timken, cu loarea în considerare a deformației elastice sub sarcină a cuplei de frecare și a constantelor elastice ale materialelor în contact.

St. cerc. mec. apl., tom 23, nr. 6, 1979, p. 907—914
Redacția: București, str. Const. Mille, nr. 15

VOICU SAFTA, TIBERIU SCHULZ, IOAN ARGHIRIADE

INFLUENȚA CONCENTRĂRII ȘI AMPLITUDINII TENSIUNII ASUPRA PROPAGĂRII FISURII LA SOLICITĂRI CICLICE LA UN OȚEL CU UN CONȚINUT SUB 0,04% CARBON

Se prezintă rezultatele obținute în cadrul unui program experimental mai larg privind influența concentrării și a nivelului tensiunii, la solicitarea pulsantă ($R = 0$) cu amplitudine constantă, asupra fazei de inițiere și propagare a fisurii în domeniul oligo și policiclic. Cu corecții aplicate funcție de dimensiunile enclavei plastice la virtul fisurii, se stabilește o corelație experimentală între variația factorului de intensitate a tensiunii (ΔK) și cinetica de propagare.

De asemenea, faza de inițiere a fisurii poate fi evaluată — la nivelul de investigare macroscopic — prin corelațiile experimentale alenumărului de cicluri de apariție a fisurii și nivelul de tensiune respectiv efectul de concentrare.

St. cerc. mec. apl., tom 23, nr. 6, 1979, p. 915—922
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15